PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES

MATEMÁTICA

VITÓRIA RODRIGUES CASTRO DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE VOLUME NA PERSPECTIVA DA ATIVIDADE DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

GOIÂNIA

2025

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES

MATEMÁTICA

VITÓRIA RODRIGUES CASTRO DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE VOLUME NA PERSPECTIVA DA ATIVIDADE DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Trabalho apresentado à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como requisito parcial para aprovação na disciplina Monografia.
Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

GOIÂNIA

2025

VITÓRIA RODRIGUES CASTRO DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE VOLUME NA PERSPECTIVA DO ENSINO DESENVOLVIEMNTAL DE DAVYDOV

Este trabalho foi julgado adequado e aprovado para a obtenção do título de graduação em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Goiânia, 17 de junho de 2025

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Orientador

Prof. Dr. Adelino Cândido Pimenta
Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Banca

Profa. Dra. Bianka Carneiro Leandro
Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Banca

Profa. Dra. Vanda Domingos Vieira
Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Banca

DEDICATÓRIA

"Dedico este trabalho aos meus pais, Arlan e Terezinha.
Tudo o que conquistei até aqui tem a marca do cuidado,
do exemplo e do apoio de vocês."

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta didática para o ensino do conceito de volume, fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov, em articulação com os princípios da teoria histórico-cultural de Vygotsky e da teoria da atividade de Leontiev. A proposta tem como objetivo guiar o aluno em um percurso de aprendizagem que começa com a percepção empírica da ocupação do espaço e avança para a construção teórica do conceito de volume, compreendido como uma relação entre a área da base e a altura de um sólido. Essa relação é tratada como núcleo conceitual do volume, a partir do qual se torna possível deduzir, de forma fundamentada, as diferentes fórmulas aplicáveis aos sólidos geométricos. A metodologia consiste na elaboração de uma sequência didática orientada pela atividade de estudo, que parte de uma situação real e se desenvolve por meio de ações de análise, modelação e abstração, sendo utilizados recursos visuais com apoio do software GeoGebra para auxiliar na compreensão e na generalização do núcleo conceitual. Embora não tenha sido aplicada, a proposta é analisada teoricamente quanto à sua coerência com os fundamentos da teoria do ensino desenvolvimental e suas potencialidades pedagógicas. Espera-se que este trabalho contribua com subsídios para práticas pedagógicas mais conscientes no ensino de matemática, especialmente no que diz respeito à construção de conceitos geométricos.

Palavras-chave: Volume. Núcleo conceitual. Ensino desenvolvimental.

ABSTRACT

This work presents a didactic proposal for teaching the concept of volume, based on V. V. Davydov's developmental teaching theory, in conjunction with the principles of Vygotsky's historical-cultural theory and Leontiev's activity theory. The proposal aims to guide the student through a learning path that begins with the empirical perception of space occupation and advances to the theoretical construction of the volume concept, understood as a relationship between the base area and the height of a solid. This relationship is treated as the conceptual core of volume, from which it becomes possible to deduce, in a well-founded manner, the different formulas applicable to geometric solids. The methodology consists of designing a didactic sequence oriented by the study activity, starting from a real situation and developing through actions of analysis, modeling, and abstraction, using visual resources supported by GeoGebra software to aid the comprehension and generalization of the conceptual core. Although it has not been applied, the proposal is theoretically analyzed regarding its coherence with the foundations of developmental teaching theory and its pedagogical potential. It is expected that this work will contribute subsidies for more conscious pedagogical practices in mathematics teaching, especially concerning the construction of geometric concepts.

Keywords: Volume. Conceptual core. Developmental teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos contextos escolares, o ensino da matemática, especialmente no campo da geometria, é frequentemente desenvolvido por meio da apresentação de fórmulas e procedimentos voltados à resolução de problemas. Essa abordagem, que tem sua relevância no cotidiano das práticas pedagógicas, tende, por vezes, a priorizar a aplicação de regras e técnicas em detrimento da compreensão dos fundamentos conceituais que estruturam esse conhecimento. Um exemplo disso pode ser observado no ensino do volume, que, não raramente, é introduzido aos estudantes por meio de expressões prontas, sem que se explorem as relações espaciais e os princípios que as originam. Embora esse modo de ensinar possa contribuir para a aprendizagem de procedimentos operatórios importantes, ele pode não favorecer de forma suficiente o desenvolvimento do pensamento teórico, entendido como a capacidade de compreender o movimento interno dos conceitos, suas origens e suas articulações lógicas.

Na perspectiva do ensino desenvolvimental proposto por Davydov, a formação de conceitos não deve ocorrer pela via da memorização de definições ou pelo acúmulo de exemplos, mas por meio de atividades que favoreçam a apropriação consciente dos nexos internos do objeto de estudo. Isso implica considerar o movimento lógico-histórico do conceito, ou seja, compreender como ele surgiu social e historicamente e como pode ser reconstruído no percurso formativo dos estudantes. No caso do volume, trata-se levar o estudante a compreender seu conceito aos poucos, começando pela percepção simples de que os objetos ocupam espaço, até chegar à ideia mais elaborada de que o volume pode ser calculado multiplicando a área da base pela altura, relação essa que se apresenta como núcleo conceitual capaz de gerar as fórmulas conhecidas.

Nesse sentido, este trabalho se justifica pela necessidade de buscar outras formas de ensinar matemática que não se limitem à transmissão de fórmulas prontas, mas que coloquem os alunos em uma atividade de estudo, na qual possam pensar, investigar e compreender os conceitos de forma mais consciente e orientada para o desenvolvimento do pensamento teórico. O objetivo central é analisar o movimento lógico-histórico da formação do conceito de volume e, a partir disso, elaborar uma proposta de ensino que tenha como foco mostrar como o núcleo conceitual do volume pode ser generalizado para diferentes sólidos.

A metodologia adotada é de natureza básica, bibliográfica, experimental e qualitativa, consistindo na elaboração de uma proposta estruturada em etapas que respeitam o percurso do pensamento teórico. Parte-se de uma situação real, da qual se desenvolvem ações de análise, modelação e abstração, conduzindo à identificação do núcleo conceitual e à sua generalização, com o apoio de representações visuais construídas no software GeoGebra.

É esperado que os resultados desta proposta possam mostrar o potencial do ensino desenvolvimental na formação de conceitos matemáticos, de modo que os professores possam se apropriar da metodologia proposta e adaptá-la às especificidades de suas realidades escolares. Com isso, busca-se possibilitar que os estudantes avancem para além da aplicação de fórmulas, desenvolvendo a compreensão dos fundamentos conceituais que lhes dão origem.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos. O primeiro apresenta o referencial teórico que sustenta a proposta, com destaque para a teoria histórico-cultural, a teoria da atividade e a teoria do ensino desenvolvimental. O segundo capítulo descreve a proposta metodológica para a construção do conceito de volume, com base em seu movimento lógico-histórico, incluindo exemplos e ilustrações. No terceiro capítulo, realiza-se uma análise teórica da proposta elaborada, discutindo suas potencialidades pedagógicas, sua coerência com os pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental e suas possibilidades de aplicação em sala de aula. Por fim, o quarto capítulo apresenta as considerações finais, refletindo sobre as contribuições da pesquisa para o ensino da matemática e indicando caminhos para investigações futuras.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

1.1. INTRODUÇÃO À TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL DE VYGOTSKY

A teoria histórico-cultural desenvolvida por Vygotsky[1] foi capaz de integrar diversos ramos do conhecimento em uma abordagem que considera os indivíduos em seu respectivo contexto sociocultural de desenvolvimento. Vygotsky se dedicou ao estudo do psiquismo humano, se concentrando na forma como os processos mentais humanos são moldados e desenvolvidos, e enfatizou que eles são influenciados pelas interações socioculturais. De acordo com Rego (1995, p. 41)

[1] Lev Semionovitch Vygotsky (1896 - 1934). Psicólogo russo, psicolinguista e teórico da educação que desenvolveu a Teoria Histórico-Cultural.

> Vygotsky afirma que as características tipicamente humanas não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, nem são meros resultados das pressões do meio externo. Elas resultam da interação dialética do homem e seu meio sociocultural. Ao mesmo tempo em que o ser humano transforma o seu meio para atender suas necessidades básicas, transforma-se a si mesmo.

Sua teoria buscou compreender e explicar os processos mentais humanos levando em consideração o contexto cultural em que eles estão inseridos. Em outras palavras, essa teoria considera que o desenvolvimento e a formação do pensamento estão vinculados às interações sociais, às práticas culturais e às atividades que são desenvolvidas pelos indivíduos ao longo da história. Nesse processo, a atividade externa, que é inicialmente influenciada pelo ambiente e pelas relações sociais, gradativamente se transforma em uma atividade interna, o que permite que o indivíduo internalize conceitos e construa seu próprio pensamento. Isso significa que o desenvolvimento não ocorre apenas pelo amadurecimento biológico ou simplesmente pelo acúmulo de experiências, mas é fruto de um envolvimento do sujeito com aquilo que ele deseja conhecer (Rego, 1995). É por meio desse enfrentamento e dessa troca que o aprendizado e o desenvolvimento acontecem, pois conhecer um objeto exige um embate com ele, uma atividade que o sujeito precisa realizar para se apropriar do conhecimento.

> O processo pelo qual o indivíduo internaliza a matéria-prima fornecida pela cultura não é, pois, um processo de absorção passiva, mas de transformação, de síntese. Esse processo é, para Vygotsky, um dos principais mecanismos a serem compreendidos no estudo do ser humano. É como se ao longo de seu desenvolvimento, o indivíduo tomasse posse das formas de comportamento fornecidas pela cultura, num processo em que as atividades externas e as funções interpessoais transformam-se em atividades internas, intrapsicológicas. (OLIVEIRA, 1997. p. 39)

Com base nos princípios de Vygotsky, é possível afirmar que o ser humano vive em uma constante interação com o mundo externo, sendo estimulado por ele e, como consequência, internalizando ativamente os conhecimentos historicamente construídos, incluindo conceitos, valores e significados. Rego (1995, p. 101) escreve: "Vygotsky parte deste princípio e postula que é na atividade prática, nas interações estabelecidas entre os homens e a natureza que as funções psíquicas, especificamente humanas, nascem e se desenvolvem".

1.1.1. A natureza das funções psicológicas

Segundo Rego (1995), Vygotsky se dedicou ao estudo das funções psicológicas superiores, características exclusivas da espécie humana, como a memória voluntária, o pensamento dedutivo, a habilidade de controlar o comportamento e a capacidade de pensar abstratamente. Essas funções psíquicas são consideradas superiores pois dizem respeito a mecanismos intencionais, ou seja, são ações controladas e processos voluntários que permitem ao indivíduo se desvincular das condições imediatas de tempo e espaço, ou seja, conseguem agir de forma independente das circunstâncias presentes. Para Vygotsky, essas funções, diferentemente das funções biológicas, não são inatas. Elas se desenvolvem por meio da apropriação das formas culturais de comportamento e são influenciadas pelo ambiente histórico e cultural na qual o indivíduo está inserido (Rego, 1995). Segundo Teixeira e Preuss (2021), Vygotsky reconhece que os aspectos biológicos próprios da espécie humana são uma condição necessária para o desenvolvimento psicológico, mas ressalta que, por si só, não são suficientes.

1.1.2. A mediação por instrumentos e signos

As funções psicológicas superiores, de acordo com Vygotsky, não surgem de forma isolada ou espontânea, mas são mediadas por ferramentas culturais. Nesse processo, Vygotsky enfatiza que a relação entre o ser humano e o mundo é mediada por instrumentos e signos. Para Oliveira (1997, p. 26), “mediação, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.”

Os instrumentos são elementos externos e materiais, como ferramentas criadas pelos homens[2] para transformar a realidade, incluindo desde simples utensílios até tecnologias complexas. Já os signos são recursos simbólicos que representam e comunicam eventos, ideias, situações e objetos, desempenhando um papel determinante na organização do pensamento, além de auxiliar na memória e na atenção humana (Rego, 1995). Para Oliveira (1997), a capacidade humana de utilizar representações em substituição à realidade concreta permite ao indivíduo libertar-se das limitações do tempo e do espaço imediatos. Por meio dessa habilidade, torna-se possível estabelecer relações mentais mesmo na ausência dos objetos físicos, além de planejar, imaginar e agir de maneira intencional.

É através dessas ferramentas mediadoras, nas atividades práticas e nas interações sociais que o ser humano se desenvolve, ou seja, as formas psicológicas mais sofisticadas emergem da vida cultural. A respeito dos instrumentos e dos signos:

> Vygotsky faz uma interessante comparação entre a criação e a utilização de instrumentos como auxílio nas relações concretas e os signos, que ele chama de “instrumentos psicológicos”, que tem a função de auxiliar o homem nas suas atividades psíquicas, portanto, internas ao indivíduo: a "invenção e o uso de signos

[2] Aqui o termo "homens" é utilizado no sentido amplo, como sinônimo de humanidade.

auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) é análoga à invenção e uso de instrumentos, só que agora no campo psicológico. O signo age como um instrumento da atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho" (Vygotsky, 1984, p. 59-60, apud REGO, 1995. p 52).

1.1.3. Zona de desenvolvimento real e iminente

Segundo Rego (1995), para compreender o processo de ensino-aprendizagem[3] e desenvolvimento humano, Vygotsky identificou duas zonas de desenvolvimento, uma se refere às conquistas já efetivadas, que ele chama de zona de desenvolvimento real ou efetivo, e o outra, a zona de desenvolvimento proximal ou iminente, que se relaciona às capacidades em vias de serem construídas.

A zona de desenvolvimento real refere-se ao conjunto de habilidades e conhecimentos que o indivíduo já domina e consegue utilizar de maneira independente. É aquilo que ele pode realizar sem assistência, resultado do desenvolvimento já consolidado. Já a zona de desenvolvimento iminente corresponde ao espaço entre aquilo que o indivíduo já sabe fazer sozinho e aquilo que pode aprender com ajuda de alguém mais experiente, como um professor ou um colega. Ou seja, essa zona representa as potencialidades do sujeito, aquilo que ele ainda não domina por completo, mas pode alcançar por meio de um suporte adequado.

Segundo Rego (1995), Vygotsky defende que um bom processo de ensino-aprendizagem é aquele que se antecipa ao desenvolvimento, ou seja, que se dirige às funções psicológicas que estão em processo de formação. Ao atuar sobre a zona de desenvolvimento iminente, por meio de desafios orientados, o indivíduo vivencia processos que favorecem a formação de suas funções psíquicas superiores. Para Libâneo (2016, p. 357):

> Esse modo de intervenção educativa considerando os níveis de desenvolvimento do sujeito que aprende e, ao mesmo tempo, a expansão desse desenvolvimento, significa que os professores precisam investigar conhecimentos que os alunos já possuem ou aqueles que estão na iminência de surgir se eles forem estimulados, de modo que possa lhes em prestar seus próprios conhecimentos e ajudá-los a fazer vir à tona esses conhecimentos iminentes e ampliar qualitativamente sua aprendizagem.

À medida que esses processos começam a ocorrer de forma autônoma, sem a necessidade da intervenção de outras pessoas, eles são internalizados. Assim, a atividade que

[3] Neste texto, será adotado o termo "ensino-aprendizagem" para destacar a unidade dialética entre essas duas dimensões do processo educativo, compreendidas não como etapas separadas, mas como momentos interdependentes de uma mesma atividade

inicialmente dependia de um auxílio externo passa a se transformar em um processo voluntário e independente. Esse processo de internalização é amplificado pela utilização dos instrumentos e dos signos.

1.1.4. O processo de internalização

Com o auxílio desses instrumentos e signos, os indivíduos não apenas resolvem problemas imediatos, mas também se apropriam das construções culturais. Por meio dessas mediações, os indivíduos em desenvolvimento se apropriam dos modos de funcionamento psicológico, do comportamento e da cultura, ou seja, do legado da história humana e de seu grupo cultural.

> Como signos culturais complexos incorporam experiências e habilidades de gerações anteriores, aprender a usá-los leva uma dimensão da história social e da cultura ao desenvolvimento de cada pessoa. Essa capacidade emergente para usar instrumentos e signos, de acordo com Vigotski, gradualmente permite aos humanos – em sua história como espécie biológica (filogenia), como civilização (história social) e como indivíduos (ontogenia) – saltarem das restrições do ambiente natural, definido pelas leis da evolução biológica, e de modos de comportamento estímulo resposta, para o domínio do desenvolvimento histórico-cultural com seu grau infinito de liberdade. (Rieber e Robinson, 2024. p 936)

A apropriação desses signos e instrumentos culturais ocorre por meio do processo de internalização, como mencionado anteriormente, no qual as interações sociais e as práticas mediadas externamente são transformadas em funções psicológicas superiores. Inicialmente, o indivíduo depende do suporte de outros para utilizar esses recursos simbólicos, mas, com o tempo, passa a empregá-los de forma mais independente. Esse processo não se limita à repetição de experiências externas, mas envolve a reconstrução ativa do conhecimento dentro do próprio sistema cognitivo do sujeito.

A passagem da ação externa para a ação interna mostra que o desenvolvimento humano ocorre em um movimento dialético[4], no qual a interação com o meio sociocultural é fundamental na transformação do pensamento e do comportamento. Assim, à medida que o indivíduo internaliza os signos e instrumentos culturais, ele não apenas adquire novas habilidades, mas também aumenta sua capacidade de pensar, agir e transformar a realidade.

[4] O movimento dialético refere-se à concepção de desenvolvimento baseada na interação e transformação constante entre opostos. No contexto do pensamento vygotskyano, significa que o desenvolvimento humano ocorre a partir da relação entre o indivíduo e o meio sociocultural, em um processo dinâmico no qual novas formas de pensamento e comportamento emergem da superação de contradições e desafios.

1.1.5. O papel da língua no desenvolvimento do pensamento

No processo de internalização e apropriação cultural, a língua[5] (também traduzida como linguagem em alguns textos) desempenha uma função fundamental, consolidando-se como o principal instrumento de mediação do pensamento. De acordo com Rego (1995), Vygotsky afirma que o pensamento adulto não ocorre de maneira isolada, mas é mediado por signos, sendo a língua o mais complexo e poderoso deles.

A língua não apenas possibilita a comunicação entre indivíduos, mas também reestrutura os processos cognitivos, o que permite a formulação de conceitos abstratos e a organização do raciocínio. Dessa forma, ao longo do desenvolvimento, a língua se transforma no principal meio pelo qual o sujeito internaliza significados, regula seu próprio pensamento e interage com o mundo, tornando-se essencial para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Segundo Oliveira (1997, p. 45), "o surgimento do pensamento verbal e da linguagem como sistema de signos é um momento crucial no desenvolvimento da espécie humana, momento em que o biológico se transforma no sócio-histórico".

O desenvolvimento do indivíduo apresenta paralelos com a evolução da espécie humana. Antes da integração entre pensamento e língua, a criança passa por uma fase em que essas funções se desenvolvem separadamente. Inicialmente, ela demonstra habilidades cognitivas sem o domínio da língua, como resolver problemas práticos ou utilizar objetos para alcançar um objetivo, o que mostra uma inteligência prática semelhante à dos primatas. Ainda que não compreenda a língua como um sistema simbólico, a criança utiliza expressões sonoras como choro, riso e balbucios, que cumprem tanto uma função emocional quanto social (Oliveira, 1997). Esse período do desenvolvimento corresponde ao estágio da comunicação emocional direta, que será abordado posteriormente no tópico de periodização do desenvolvimento psíquico.

Em um determinado momento do desenvolvimento, ocorre a integração entre pensamento e língua, o que promove uma transformação na cognição. A fala passa a exercer uma função simbólica e generalizante, enquanto o pensamento se torna mediado pela língua. Esse avanço acontece por meio da interação com indivíduos mais experientes, que já dominam

---

[5] Neste texto, adotamos o termo "língua" em vez de "linguagem", considerando que traduções das obras de Vygotsky nem sempre distinguem claramente esses conceitos. Enquanto "linguagem" pode referir-se a qualquer sistema de signos, "língua" diz respeito a um sistema específico de signos verbais compartilhado por uma comunidade, sendo este o foco central na mediação do pensamento.

um sistema linguístico estruturado. A partir desse ponto, a língua e o pensamento verbal tornam-se predominantes, possibilitando um funcionamento psicológico mais complexo. Dessa forma, a mediação simbólica proporcionada pela língua se torna essencial no desenvolvimento dos processos mentais superiores, fundamentais para a constituição do ser humano enquanto ser social e histórico (Rego, 1995).

1.2. A TEORIA DA ATIVIDADE E A CONTRIBUIÇÃO DE LEONTIEV

Além de Vygotsky, outro teórico e propositor da teoria histórico-cultural foi Leontiev[6]. Ele expandiu as ideias de Vygotsky ao formular a Teoria da Atividade, que enfatiza o papel das atividades humanas na formação da consciência e da personalidade. Como explicado por Santos e Asbahr (2020), Leontiev considerava que a atividade humana deveria ser a base para o estudo e a investigação do desenvolvimento psíquico humano. Leontiev definiu a atividade como:

> O processo, produtor do e mediado pelo reflexo psíquico da realidade, responsável por concretizar as relações de caráter objetivo/subjetivo do homem com o mundo e com o gênero humano e satisfazer suas necessidades, promovendo, assim, seu desenvolvimento integral e garantindo a produção e reprodução de sua vida material. (LEÓNTIEV, 1978; LEONTIEV, 2004; 2010, apud SANTOS & ASBAHR, 2020. p 5).

Dessa forma, Leontiev entende a atividade como o processo pelo qual o ser humano interage com o mundo, transformando-o e sendo transformado por ele. É por meio da atividade que o sujeito assimila e se apropria dos conhecimentos, habilidades e produtos culturais desenvolvidos ao longo da história, atendendo às suas necessidades e promovendo seu desenvolvimento.

> Até mesmo a organização corporal dos indivíduos incorpora a necessidade que eles participem em um relacionamento ativo com o mundo externo; a fim de existir eles devem agir, produzir os meios necessários de vida. Agindo sobre o mundo externo, eles o mudam, ao mesmo tempo eles mudam a si mesmos. Isso é porque o que eles próprios representam é determinado por sua atividade, condicionado pelo nível já obtido de desenvolvimento, pelos meios e a forma de sua organização. (LEONTIEV, 1978. p. 16)

Leontiev aprofundou a compreensão da atividade humana ao introduzir a distinção entre atividade, ação e operação. Segundo ele, a atividade é orientada por uma necessidade e organizada em torno de um motivo, que dá sentido ao que se realiza e se dirige ao alcance de

---

[6] Alexei Nikolaievitvh Leontiev (1903 - 1979) foi um psicólogo e filósofo soviético, contemporâneo e parceiro de pesquisa de Vygotsky. Leontiev foi o propositor da Teoria da Atividade.

uma finalidade. Dentro dessa atividade, as ações surgem como unidades subordinadas, dirigidas a objetivos específicos, e essas ações, por sua vez, são realizadas por meio de operações, que correspondem a modos automáticos e adaptáveis de execução, dependendo das condições concretas em que ocorrem (Leontiev, 1978).

A distinção entre ação e operação pode ser exemplificada pela ação de cortar madeira. Quando uma pessoa deseja dividir uma tábua ao meio, o objetivo é claro: separar a peça em duas partes. No entanto, a forma como essa ação será realizada depende das condições disponíveis, como as ferramentas ao seu alcance. Se ela estiver usando um serrote, a operação realizada será serrar a madeira com movimentos repetitivos para atingir o objetivo. Por outro lado, se utilizar um machado, a operação muda para golpear a madeira com força. Embora a ação de dividir a madeira permaneça a mesma, as operações se modificam conforme as ferramentas e condições específicas. Outro exemplo pode ser encontrado no aprendizado da direção. Um iniciante, ao mudar de marcha, realiza essa atividade como uma ação consciente, prestando atenção em cada etapa. Com o tempo e a prática, essa ação se automatiza e se transforma em uma operação, sendo realizada sem necessidade de reflexão deliberada. (Leontiev, 1978).

1.2.1. As condições externas e a divisão de classes sociais

O desenvolvimento psíquico humano está diretamente relacionado às condições materiais e imateriais que estruturam a atividade. As condições materiais incluem os meios de produção, o acesso a ferramentas, infraestrutura e recursos essenciais ao desenvolvimento de uma pessoa. Já as condições imateriais englobam fatores como a qualidade da educação, os estímulos culturais e as relações sociais que influenciam a atividade humana. O desenvolvimento de um indivíduo é potencializado quando ele tem acesso a condições favoráveis. Por exemplo, uma pessoa inserida em um ambiente com bons recursos educacionais e acesso a materiais de estudo terá mais possibilidades de internalizar conhecimentos do que outra que vive em um contexto de escassez. Para Santos e Asbahr (2020, p. 8), a atividade que medeia a relação do homem com o mundo é "determinada pelo lugar ocupado pelo sujeito no sistema de relações sociais estabelecidas entre os homens para reprodução dos modos de produção". Isso significa que a atividade depende não apenas da motivação interna do sujeito, mas também das condições externas que possibilitam ou limitam sua realização. Nessa perspectiva, Rios e Rossler (2017, p. 31), escreve:

> Assim, a divisão de classes, a pobreza extrema, as barreiras culturais, as atualizações na configuração das instituições educativas (família, escola e trabalho), além de fatores como desestrutura familiar, transtornos congênitos e distúrbios psicopatológicos, por exemplo, afetam diretamente os processos de desenvolvimento psíquico como um todo.

1.2.2. Necessidades e motivos

No entanto, para além das condições sociais do indivíduo, é fundamental compreender que toda atividade humana é impulsionada por um motivo, que surge a partir de uma necessidade. Assim, mesmo diante de limitações materiais ou imateriais, o sujeito se envolve em atividades que visam suprir suas demandas, seja buscando conhecimento, trabalho ou outras formas de realização. A relação entre necessidade e motivo é o que dá sentido à atividade, orientando as ações e determinando a participação no meio social.

Na teoria da atividade, Leontiev destaca que as pessoas não agem de maneira aleatória, mas são direcionadas por aquilo que precisam ou desejam alcançar. Por exemplo, uma pessoa que sente fome (necessidade) busca preparar ou obter comida (atividade) para satisfazê-la. Da mesma forma, um estudante pode se comprometer no aprendizado de um conteúdo escolar porque percebe sua utilidade para alcançar um objetivo pessoal, como ingressar em uma universidade ou desenvolver uma competência específica. No entanto, quando o motivo da atividade não está claro para o sujeito, ele pode se envolver na ação sem compreender seu real significado, levando a uma atividade alienada. A alienação na atividade ocorre quando o sujeito executa ações sem compreender seu propósito ou sem enxergar sua conexão com suas necessidades e motivações. No contexto escolar, isso se manifesta quando os estudantes se perguntam: "Para que preciso aprender isso?" ou "Nunca vou usar isso na vida real." Isso acontece porque, na ausência de um motivo real e significativo para o estudante, a atividade de estudo se torna apenas uma obrigação imposta externamente. Quando o aluno não consegue associar o conteúdo trabalhado com sua vida prática ou com seus interesses, o ensino-aprendizagem perde o sentido.

Leontiev diferencia sentido e significado dentro da atividade humana. O significado está relacionado ao aspecto socialmente construído da atividade, ou seja, o que determinada ação representa dentro de um contexto cultural.

> A significação é o reflexo da realidade independente da relação individual ou pessoal do homem a esta. O homem encontra um sistema de significações pronto, elaborado historicamente, e apropria-se dele tal como se apropria de um instrumento (LEONTIEV, 2004, pp. 100-102, apud SANTOS & ASBAHR, 2020. p. 13).

Já o sentido está ligado à vivência subjetiva do indivíduo, sua relação pessoal com aquela atividade. Assim, "o sentido pessoal traduz precisamente a relação do sujeito com os fenômenos objetivos conscientizados" (Leontiev, 2004, p. 105, apud Santos e Asbahr, 2020. p. 13).

1.2.3. A periodização do desenvolvimento psíquico

Leontiev propôs que o desenvolvimento psíquico humano ocorre em etapas estruturadas, nas quais cada período se caracteriza por uma atividade principal, essencial para a formação das funções psicológicas superiores. Essas atividades principais são aquelas protagonistas na relação do sujeito com o mundo. Rios e Rossler (2017) afirmam que os estágios do desenvolvimento psíquico são determinados histórica e socialmente, pois estão relacionados à forma como cada sociedade organiza a apropriação das experiências acumuladas ao longo da história, bem como à posição social do indivíduo.

> O critério básico que delimita os estágios da vida é a atividade principal (dominante ou guia), entendida como a maneira fundamental de o indivíduo se relacionar com a realidade. Por meio dessa atividade socialmente mediada ocorrem as principais mudanças no psiquismo e na personalidade (Rios e Rossler, 2017. p. 31)

Dessa forma, cada período é marcado por mudanças estruturais na relação do indivíduo com o meio, resultando na reconfiguração das funções psíquicas e na emergência de novas necessidades e motivações.

A primeira fase do desenvolvimento, a "comunicação emocional direta", ocorre nos primeiros meses de vida e tem como principal característica a interação afetiva entre o bebê e os adultos. Através do olhar, do toque e da expressão emocional, a criança estabelece vínculos primários, o quais são fundamentais para o desenvolvimento posterior da linguagem e da capacidade de reconhecimento do outro. Essa forma de comunicação inicial está ligada à necessidade de proteção e cuidado, sendo essencial para a construção das bases do desenvolvimento psíquico. (Rios e Rossler, 2017)

Do primeiro ao terceiro ano de vida, emerge a "atividade objetal manipulatória", caracterizada pela interação da criança com os objetos do mundo exterior. Durante esse estágio do desenvolvimento infantil, caracterizado pela exploração do ambiente, a criança investiga os objetos ao seu redor, manipulando-os e descobrindo suas propriedades físicas e funcionais. Essa atividade é importante para o desenvolvimento do pensamento prático e para a formação das primeiras generalizações sobre o mundo material, preparando a criança para formas mais complexas de atividade. Na fase seguinte, o “jogo de papéis” torna-se predominante. Durante a infância, a criança passa a representar diferentes papéis sociais em brincadeiras, internalizando normas e regras que organizam a vida em sociedade. O jogo de papéis permite que a criança compreenda o funcionamento das relações humanas e desenvolva formas mais elaboradas de pensamento e comportamento, guiadas por regras compartilhadas na sociedade. (Rios e Rossler, 2017)

1.2.4. A atividade de estudo e a formação do pensamento teórico

Ao ingressar na escola, a criança passa a ter na “atividade de estudo” seu principal meio de desenvolvimento. Esse período marca a necessidade da apropriação dos conhecimentos científicos e sistematizados, sendo o ensino-aprendizagem mediado pela atividade intelectual consciente. De acordo com Rios e Rossler (2017, p.37), a “apropriação dos conceitos científicos representa a socialização do conhecimento historicamente produzido e sistematizado, residindo aí a principal função da escola”. Diferente das fases anteriores, em que a criança aprende de maneira espontânea, na atividade de estudo a assimilação do conhecimento ocorre de forma intencional e planejada, permitindo que o estudante compreenda relações abstratas e construa conceitos teóricos.

Segundo Rios e Rossler (2017), essas fases têm grande importância na formação do indivíduo, uma vez que estão interligadas por meio das necessidades e motivos que emergem ao longo do desenvolvimento. Leontiev também aponta outras formas de atividade predominantes no desenvolvimento humano, como a comunicação íntima pessoal na adolescência e juventude e, posteriormente, a atividade profissional e de estudo na vida adulta. No entanto, este trabalho terá foco na atividade de estudo, pois ela é determinante na apropriação dos conceitos científicos e para formação do pensamento teórico, aspectos fundamentais para o desenvolvimento do indivíduo.

1.3. O ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

É a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural de Vygotsky e da teoria da atividade de Leontiev que se desenvolveram os estudos de Vasili V. Davydov[7], cuja produção contribuiu para a compreensão da atividade de estudo como meio privilegiado de

[7] Vasili V. Davydov foi um psicólogo russo que se destacou por suas contribuições às investigações no campo da psicologia e da didática a partir do enfoque histórico-cultural. É amplamente reconhecido por ter desenvolvido a Teoria da Atividade de Estudo e a Teoria de Ensino Desenvolvimental.

desenvolvimento psíquico. Ao buscar compreender como acontece a formação dos conceitos científicos na escola, Davydov propôs um sistema de ensino que se apoia em um processo de ensino-aprendizagem voltado ao desenvolvimento do pensamento teórico. Segundo Libâneo (2016, p. 357), "a escola científica de Davídov compõe-se de três direções de investigação: a teoria da generalização do conteúdo e formação de conceitos; a teoria psicológica da atividade de estudo; o sistema de ensino desenvolvimental". Esses três caminhos se dirigem à criação de um sistema que vê o processo de ensino-aprendizagem como algo planejado para desenvolver o pensamento teórico, se fundamentando na organização do conteúdo a partir de princípios gerais, no planejamento de tarefas que promovam a atividade de estudo e na criação de condições para que os estudantes realizem operações mentais que os levem da abstração à generalização.

1.3.1. O domínio do conhecimento teórico

Com base nas contribuições de Vygotsky acerca da generalização e da constituição dos conceitos científicos, Davydov aprofundou esse entendimento ao defender que a atividade de estudo deve ter como foco o domínio do conhecimento teórico e científico, bem como o desenvolvimento das habilidades intelectuais necessárias para investigar os objetos de conhecimento. Essa compreensão surgiu a partir de análises em instituições escolares russas, nas quais constatou que um ensino centrado apenas em conteúdos empíricos e descritivos não era suficiente para promover grandes avanços na aprendizagem. A partir disso, ele propôs um modelo pedagógico voltado à construção do pensamento teórico, fundamentando-se na perspectiva do materialismo histórico-dialético e no percurso que vai do pensamento abstrato ao pensamento concreto. Libâneo (2016)

1.3.2. O caminho da abstração a generalização

Para Davydov, formar o pensamento teórico não é apenas decorar informações ou repetir definições, é um processo de compreensão mais profundo, no qual o estudante precisa descobrir a essência, a origem e como se deu o desenvolvimento histórico de um determinado conhecimento. Em outras palavras, não basta saber "o que é", é preciso entender "como surgiu, por que é assim e como se transformou" ao longo do tempo. Quando o aluno se apropria do processo de formação histórica de um saber (por exemplo, como o conceito de volume foi sendo construído ao longo da história da ciência), ele não aprende só o conteúdo, mas também absorve os modos de pensar que estão por trás daquele conteúdo, ou seja, compreende os métodos e estratégias cognitivas usados para construir aquele conhecimento.

Ao compreender o conhecimento dessa forma mais profunda, o aluno desenvolve ferramentas mentais (procedimentos mentais) que permitem analisar, interpretar e resolver problemas, inclusive fora da escola, na vida real. É isso que se entende por generalização: o que foi aprendido num conteúdo pode ser usado em outras situações.

O objetivo da aprendizagem, então, não é só aprender o que os sentidos percebem ou o que é resultado da experiência imediata, mas ir além. Nessa perspectiva, o estudo deve levar o aluno a aprender a pensar, não só a repetir o que foi ensinado.

Libâneo (2016, p. 360) apresenta uma síntese do processo de formação do pensamento teórico no contexto do ensino, com base na teoria de Davydov:

> Trata-se, inicialmente, por meio da análise do conteúdo a ser aprendido, de ajudar os alunos a buscarem a determinação primeira de seu aspecto mais geral, as relações gerais básicas, o princípio geral que caracteriza o conteúdo. Em seguida, eles vão verificando como essas relações gerais se manifestam em outras relações particulares, seguindo o caminho da abstração à generalização.

Isso quer dizer que, para os estudantes desenvolverem um pensamento teórico é necessário que eles se envolvam em atividades de estudo que estimulem certas operações mentais, como análise, síntese, comparação, abstração e generalização. Através dessas tarefas os estudantes podem construir os conceitos em sua forma mais ampla. A abstração, nesse contexto, pode ser compreendida como a capacidade de identificar, em um objeto de estudo, aquilo que é essencial, suas propriedades fundamentais e suas relações estruturais. A partir dessa identificação, o aluno será capaz de realizar generalizações, isto é, perceber como essas propriedades se manifestam em diferentes situações e objetos, reconhecendo um princípio comum entre eles. Esse processo resulta na formação do conceito, entendido como uma estrutura mental organizada em torno de um "núcleo" teórico do conteúdo.

O caminho de formação de conceitos não parte da apresentação de conhecimentos prontos ou exemplos isolados, mas é um movimento teórico-metodológico chamado por Davydov de ascensão do abstrato ao concreto. Segundo Libâneo (2016, p. 361) "a generalização e formação dos conceitos em relação ao material estudado, dependem da realização de tarefas de estudo que possibilitem o exercício de operações mentais de transição do universal para o particular e vice-versa." Nesse movimento, parte-se da análise teórica do conteúdo para se chegar às suas manifestações particulares. Ou seja, se inicia pela identificação de um princípio geral que determina o conteúdo estudado e, a partir dele, é explorada sua manifestação nos diferentes fenômenos concretos. Assim, o conceito passa a funcionar como um guia para interpretar e organizar novos conhecimentos, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento teórico-científico. Segundo Libâneo (2016, p. 362):

> Dado um determinado conteúdo, os alunos são orientados a captar uma relação geral, um princípio lógico que forma um "núcleo conceitual" do objeto estudado, formando uma representação mental desse objeto. Essa captação se dá por meio de tarefas de estudo, um caso, um problema, um questionamento, utilizando-se de procedimentos particulares até dominarem o procedimento geral de solução dessa tarefa, momento em que os alunos podem internalizar o conceito, ou seja, dominar o procedimento geral de solução de problemas particulares e casos do mesmo tipo.

Dessa forma, a compreensão do ensino-aprendizagem como um meio para a formação do pensamento teórico exige que o professor faça a organização da atividade de estudo. Para Libâneo (2016, p. 364):

> O ensino voltado para o desenvolvimento do pensamento teórico-científico requer do professor que ele leve os alunos a "colocarem-se efetivamente em atividade de estudo". Na atividade de estudo os alunos devem formar conceitos e com eles operar mentalmente (procedimentos lógicos do pensamento), por meio do domínio de símbolos e instrumentos culturais socialmente disponíveis e que na disciplina estudada encontram-se na forma de objetos de aprendizagem (conteúdos).

Isso quer dizer que o planejamento não se limita à seleção de conteúdo ou à definição de métodos, mas envolve a criação de condições que mobilizem o aluno a investigar, refletir e generalizar. Davydov (1988. p. 181, apud Libâneo, 2016. p. 365) indica ações que devem ser planejadas pelo professor e realizadas pelos estudantes:

1. "transformação dos dados da tarefa a fim de pôr em evidência a relação universal do objeto estudado;
2. modelação da relação diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras;
3. transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em "forma pura";
4. construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
5. Controle sobre o cumprimento das ações anteriores;
6. Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada."

A partir dessas ações, torna-se viável propor uma sequência didática centrada na compreensão do núcleo conceitual do conteúdo, permitindo que o conceito seja construído de forma progressiva, a partir da exploração orientada desse núcleo. É com base nesses princípios que se estrutura a proposta metodológica apresentada a seguir.

2. METODOLOGIA

2.1. CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Com base nos fundamentos teóricos apresentados ao longo deste trabalho, especialmente na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental e no processo de formação de conceitos descrito por Davydov, esta seção tem como objetivo apresentar e justificar uma proposta didática elaborada para a construção do conceito de volume em sala de aula. A proposta visa percorrer o caminho da abstração à generalização, conduzindo os estudantes à compreensão do núcleo conceitual por meio de atividades que envolvam análise e modelação, com o apoio do software GeoGebra.

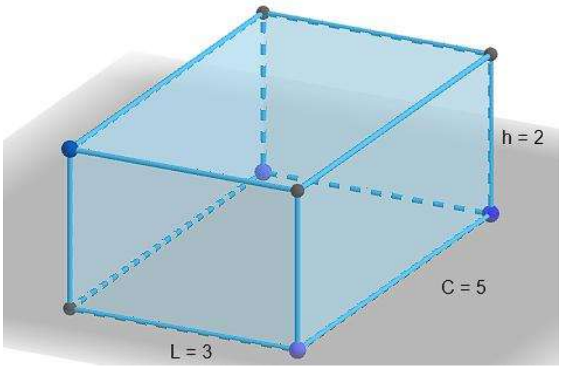
A pesquisa aqui desenvolvida se trata de uma pesquisa bibliográfica, pois se fundamenta em referências teóricas sobre o processo de ensino-aprendizagem, e de caráter experimental, à medida que propõe e simula uma sequência didática, utilizando representações visuais no GeoGebra para ilustrar os processos mentais envolvidos na construção do conceito de volume. Pode-se ainda considerá-la como uma pesquisa básica com potencial de aplicação em campo, uma vez que visa subsidiar práticas pedagógicas intencionais, orientadas para o desenvolvimento dos estudantes e, por fim, de natureza qualitativa, pois está centrada na compreensão e interpretação dos processos de aprendizagem e na construção de sentidos.

2.1.1. Situação problema como ponto de partida

O ponto de partida será um problema real que mobiliza a necessidade de se compreender o conceito de volume e tem a função de iniciar o processo investigativo, permitindo aos alunos identificarem, por meio da análise da situação, os elementos essenciais do conteúdo a ser estudado. A situação-problema que servirá como ponto de partida para o desenvolvimento do conceito é: *"Quantos litros de água são necessários para encher completamente uma piscina retangular com 5 metros de comprimento, 3 metros de largura e 2 metros de profundidade?"*

Esse problema envolve uma situação concreta e próxima da realidade dos estudantes, o que pode mobilizar os motivos e dar sentido à aprendizagem. No entanto, para resolvê-lo de maneira fundamentada, é preciso compreender o que significa "medir um volume" e qual é a unidade básica utilizada nesse tipo de medição. Vale ressaltar que, nesse caso, foram utilizadas unidades inteiras, pois isso facilita o entendimento inicial do conceito, e que esse exemplo servirá apenas como ponto de partida para a identificação do núcleo conceitual, não para resolução imediata e tratamento com as unidades de medida. Embora o enunciado utilize a unidade de medida “litros”, que é bastante familiar aos estudantes, essa escolha tem apenas o objetivo de situar a problemática em um contexto cotidiano. Ao longo do trabalho, a proposta se concentra na construção conceitual do volume, sem abordar diretamente a conversão entre unidades. A relação entre o litro e o decímetro cúbico (1 L = 1 dm^3) e as outras unidades de medida, embora relevante, é tratada apenas como uma sugestão de desdobramento possível da proposta, mencionada nas discussões finais, e não faz parte do percurso investigativo desenvolvido neste trabalho.

Figura 1 - Representação gráfica de um paralelepípedo retângulo que simboliza a piscina mencionada.

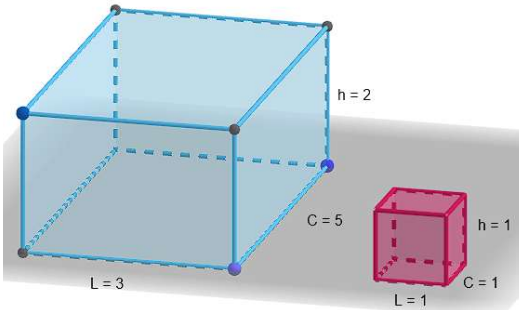


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

2.1.2. Identificação do núcleo conceitual

Diante da situação-problema proposta, a resolução imediata com o uso de fórmulas pode não ser viável aos estudantes caso eles ainda não tenham sido apresentados ao conceito formal de volume. Então, para conseguir solucionar o problema, é preciso que os estudantes compreendam primeiro o que significa medir o volume de um corpo tridimensional. Para isso, cabe ao professor conduzir os alunos à identificação de uma unidade de preenchimento tridimensional, como o cubo unitário, que funcione como ponto de partida para a construção do conceito e para a identificação do núcleo conceitual.

Figura 2 - Representação gráfica do paralelepípedo retângulo e um cubo unitário.

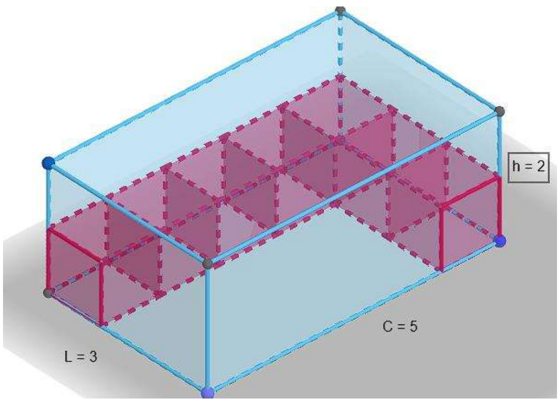


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Essa unidade, representada acima por um cubo cujas arestas medem uma unidade de comprimento (1x1x1), será o ponto de partida da investigação do conceito, ou seja, é a partir da compreensão desse elemento que será possível generalizar a ideia de volume para diferentes objetos e situações.

Com o auxílio do GeoGebra, é possível visualizar esse cubo unitário e ilustrar como ele pode ser utilizado para "preencher" o espaço interno da piscina apresentada no problema inicial. Essa visualização permite que os alunos percebam o volume como a medida da quantidade de unidades cúbicas necessárias para preencher completamente o interior de um objeto tridimensional. Na representação gráfica abaixo, o paralelepípedo não está completamente preenchido pelos cubos unitários, mas, seguindo essa ideia, é possível imaginar o processo de preenchimento total como uma contagem sistemática dessas unidades, o que conduz à compreensão da fórmula para o cálculo do volume desse paralelepípedo.

Figura 3 - Paralelepípedo preenchido parcialmente com cubos unitários



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Ao observar a piscina como uma grande caixa retangular, os estudantes podem investigar quantos cubos de 1 unidade de aresta cabem ao longo do comprimento, da largura e da profundidade. Essa contagem, inicialmente feita de forma concreta e visual, permite que eles percebam a ideia de volume como resultado do preenchimento completo de um espaço tridimensional e, a partir dessa experimentação, deduzam e generalizem a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo:

$$V = C \times L \times h$$

onde C representa o comprimento, L a largura e h a altura (ou profundidade). Essa expressão também pode ser interpretada como a área[8] da base multiplicada pela altura, já que a base do paralelepípedo reto é um retângulo cuja área é dada por $Ab = C \times L$, logo, seu o volume é:

$$V = Ab \times h$$

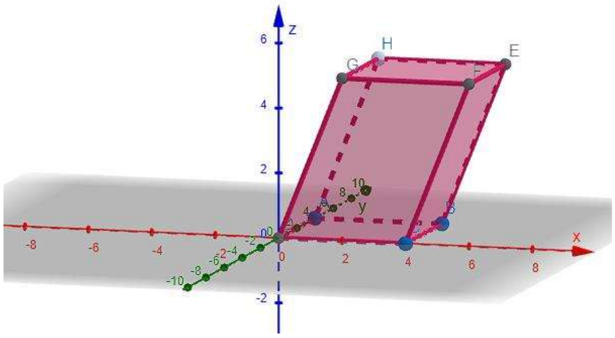
2.1.3. Generalização da fórmula do volume do paralelepípedo

Com base na compreensão do volume do paralelepípedo retângulo, é possível dar continuidade ao processo de construção conceitual por meio de novos vínculos dedutivos. A construção anterior se baseou em um paralelepípedo reto, no qual as faces laterais são perpendiculares à base. Nesse caso, a altura do paralelepípedo coincide com a medida das arestas laterais verticais, o que facilita a visualização e o cálculo do volume. Contudo, é possível considerar uma ampliação desse conceito, abordando os chamados paralelepípedos oblíquos.

Nos paralelepípedos oblíquos, as faces laterais são paralelogramos inclinados, e as arestas laterais não são perpendiculares à base. A principal diferença entre os retos e os oblíquos está na forma de identificar a altura, que, nos oblíquos, não coincide com a medida da aresta inclinada, mas sim com a distância perpendicular entre as bases. A imagem a seguir representa um paralelepípedo oblíquo, também conhecido como prisma quadrangular oblíquo.

[8] A área é uma medida bidimensional que expressa a quantidade de superfície de uma figura. No caso de um retângulo, é obtida pela multiplicação do comprimento pela largura. Esse conceito geralmente é trabalhado antes do volume, pois envolve o raciocínio sobre a ocupação de espaço em duas dimensões.

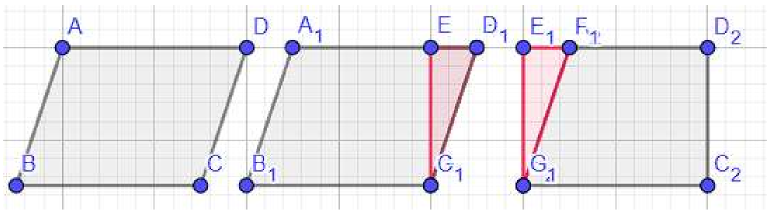
Figura 4 - Representação de um paralelepípedo oblíquo.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A análise das bases de um paralelepípedo oblíquo permite verificar que sua forma pode ser reorganizada sem alteração da área, como ilustrado na figura abaixo por meio de uma sequência de transformações. Inicialmente, observa-se a base inclinada característica desse tipo de prisma. Em seguida, uma porção triangular (destacada em vermelho) é deslocada geometricamente para o lado oposto, reorganizando os elementos da figura de modo a formar uma base retangular. Essa reconfiguração não modifica a área da base, apenas redistribui sua estrutura.

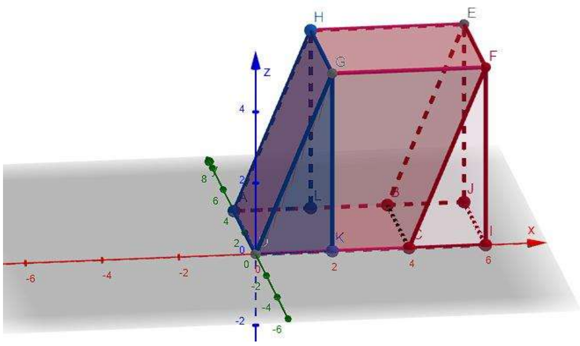
Figura 5 - Transformações na base de um paralelepípedo oblíquo.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Na imagem tridimensional a seguir, é possível observar o paralelepípedo oblíquo sendo transformado em um paralelepípedo reto por meio do deslocamento de uma de suas partes laterais. A parte destacada em azul, que corresponde a um prisma triangular, será deslocada lateralmente e encaixada do outro lado do sólido, preenchendo o espaço vazio que existe na extremidade. Esse encaixe transforma o paralelepípedo oblíquo em um paralelepípedo reto, mantendo as dimensões da base e da altura, e consequentemente preservando o volume total do sólido.

Figura 6 - Transformação de um paralelepípedo oblíquo em um paralelepípedo reto.

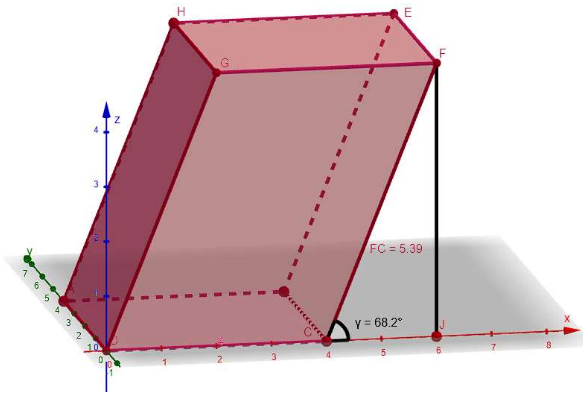


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Como a altura do paralelepípedo é definida pela distância perpendicular entre as bases e não pela inclinação das arestas laterais, essa transformação demonstra que o volume permanece inalterado. Portanto, a fórmula do volume que é válida para prismas retos, também se aplica aos prismas oblíquos, desde que a altura seja interpretada corretamente. No entanto, é comum que em algumas situações, a altura não seja dada diretamente. Em vez disso, é fornecida a medida inclinada da aresta lateral e o ângulo que essa aresta forma com a base. Nesses casos, é necessário utilizar uma relação trigonométrica para obter a altura real. Vale ressaltar que, na introdução do conceito de volume, geralmente são apresentadas figuras simples e regulares para facilitar o entendimento inicial. O exemplo a seguir, entretanto, mostra uma alternativa para resolver casos mais complexos.

Na representação abaixo, observa-se que a altura real (distância do ponto F até o ponto J), não é fornecida como dado inicial. Entretanto, é fornecido o comprimento da aresta inclinada FC o ângulo γ que essa aresta forma com a base.

Figura 7 - Determinação da altura real de um paralelepípedo oblíquo.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A identidade trigonométrica do seno pode ser utilizada para determinar a altura verdadeira, perpendicular à base e necessária para calcular o volume. Na imagem, é possível ver o triângulo retângulo formado pelos pontos F, C e J, onde o segmento FC é a hipotenusa, o segmento FJ (que representa a altura) é o cateto oposto ao ângulo γ e o segmento CJ é o cateto adjacente.

Como a intenção é descobrir a altura, que está sendo representada pelo segmento FJ, a identidade trigonométrica a ser usada é o seno. Isso porque o seno de um ângulo em um triângulo retângulo é definido como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, logo:

$$\sin(\gamma) = \frac{FJ}{FC}$$

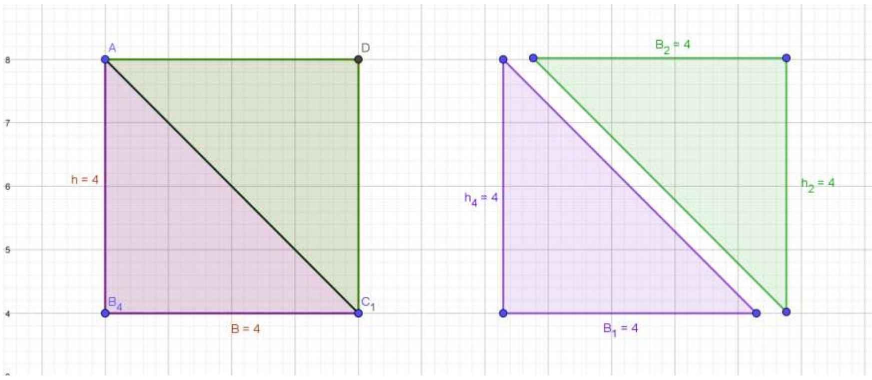
$$FJ = FC \times \sin(\gamma)$$

Ou seja, a altura real do paralelepípedo é dada pelo produto entre a medida da aresta inclinada e o seno do ângulo que ela forma com a base. Apesar da inclinação das arestas, o cálculo do volume continua sendo a área da base vezes a altura. A diferença está apenas na forma de obter essa altura, que, nesses casos, precisa ser deduzida com o auxílio da trigonometria.

2.2. GENERALIZAÇÃO DA FÓRMULA DO VOLUME PARA UM PRISMA QUALQUER

Dando continuidade ao processo de construção conceitual por vínculos dedutivos, é possível avançar na generalização da fórmula do volume. Uma das possibilidades é partir de um cubo e, a partir dele, construir uma nova figura por meio da divisão da base em dois triângulos congruentes. Antes disso, é importante destacar que o cálculo do volume do cubo segue o mesmo princípio utilizado no paralelepípedo: considera-se a área da base (neste caso, um quadrado) multiplicada pela altura. Essa continuidade no raciocínio permite que os estudantes reconheçam a permanência de um mesmo princípio (área da base vezes altura) mesmo com variações na forma da base.

Figura 8 - Representação bidimensional da base de um cubo sendo dividida em dois triângulos congruentes.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A imagem acima representa a base de um cubo, ou seja, um quadrado de lados iguais (neste caso, 4 unidades). Essa base pode ser utilizada para ilustrar como é possível obter dois triângulos congruentes por meio da divisão diagonal do quadrado.

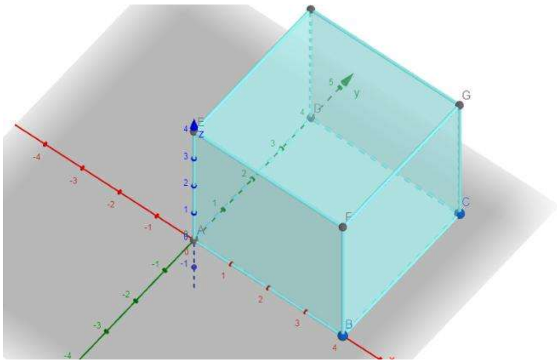
Na figura à esquerda, o quadrado foi dividido ao meio, mostrando que cada triângulo ocupa exatamente metade da área da base original. Na figura à direita, os dois triângulos resultantes da divisão estão destacados separadamente, com suas dimensões (base e altura) mantidas. A partir dessa construção, é possível compreender a origem da fórmula da área do triângulo, dada por:

$$A = \frac{B \times h}{2}$$

onde B representa a base e h a altura.

Essa construção em duas dimensões serve como preparação para a visualização em três dimensões, na qual o cubo será dividido a partir dessa base triangular, originando dois prismas de base triangular com volumes equivalentes a metade do volume do cubo original. A figura abaixo apresenta a construção tridimensional de um cubo, elaborada no software GeoGebra 3D.

Figura 9 - Construção tridimensional de um cubo com arestas de 4 unidades.

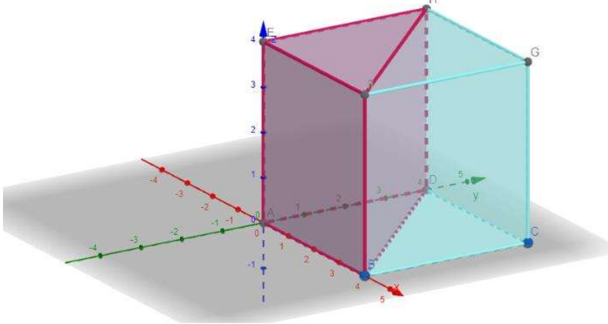


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Como foi generalizada anteriormente a partir da experimentação com o paralelepípedo retângulo, a fórmula para calcular o volume do cubo será semelhante, pois ambos os sólidos têm um formato retangular em suas dimensões. O cubo é, na verdade, um caso especial de paralelepípedo, em que todas as arestas possuem o mesmo comprimento. Assim, a fórmula do volume, $V = C \times L \times h$, é aplicada da mesma maneira, mas no caso do cubo, como as três dimensões são iguais, a fórmula se simplifica para $V = a^3$ onde a representa a medida da aresta do cubo.

Dando continuidade à construção, traçando a diagonal na base quadrada do cubo, obtêm-se dois triângulos iguais. Com essa nova base triangular e mantendo a altura original do cubo, o sólido pode ser dividido em dois prismas de base triangular.

Figura 10 – Representação tridimensional de um cubo decomposto em dois prismas de base triangular.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Cada um desses prismas tem como base um dos triângulos formados pela diagonal e conserva a altura do cubo. Assim, a área da base de cada prisma é metade da área da base do cubo, e o volume de cada um é calculado multiplicando a área da base triangular pela altura. Essa representação mostra que o volume do prisma pode ser obtido pela multiplicação da área da base triangular pela altura do prisma. Sabendo que a área da base é $Ab = \frac{B \times h}{2}$, o volume do prisma será dado por:

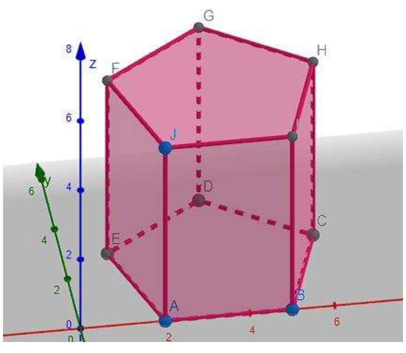
$$V = \frac{B \times h}{2} \times H$$

onde B representa a base do triângulo, h é a altura do triângulo e H é a altura do prisma.

A construção e a análise do prisma de base triangular, obtido a partir da divisão do cubo, permite que os estudantes percebam que o volume do sólido resulta do produto entre a área da base e a altura. Esse princípio, visualizado e compreendido em um caso específico, pode ser estendido a todos os prismas. Isso quer dizer que, as bases podem ter diferentes formatos (triangulares, quadrangulares, pentagonais etc.) mas a lógica que rege o cálculo de seu volume permanece a mesma: preencher o espaço tridimensional com "camadas" da base, empilhadas ao longo da altura. Essa estrutura dá origem a fórmula do volume para qualquer prisma.

Para ilustrar essa generalização, considera-se agora um prisma cuja base seja um pentágono, ou seja, um polígono de 5 lados.

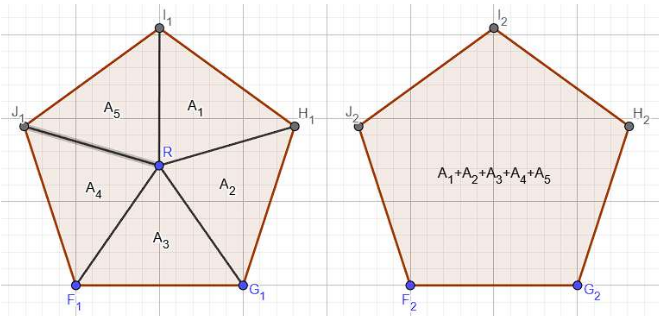
Figura 11 - Representação tridimensional de um prisma de base pentagonal



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A ideia de generalização se justifica pela possibilidade de dividir a base do prisma em triângulos. Cada polígono que constitui a base de um prisma pode ser decomposto em um conjunto de triângulos cujas áreas podem ser calculadas individualmente e, ao somar as áreas desses triângulos, obtém-se a área total da base do prisma. Como a altura do prisma permanece constante em toda sua extensão, o volume pode ser calculado multiplicando essa área total pela altura. A imagem a seguir ilustra como a base pentagonal pode ser dividida em cinco triângulos isósceles, já que o pentágono é regular. Também é possível decompor a base em três triângulos, a depender do método de triangulação escolhido e das informações disponíveis.

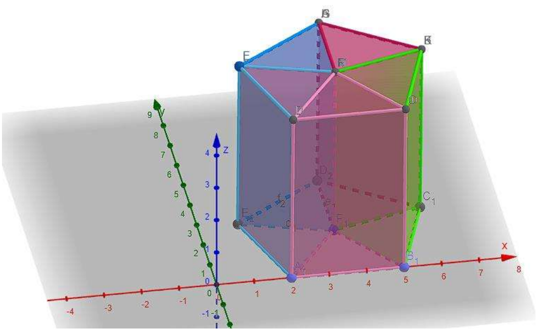
Figura 12 - Pentágono regular - Base do prisma pentagonal



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Cada um desses triângulos tem sua área calculada pela fórmula $A = \frac{B \times h}{2}$. Ao somar as áreas dos cinco triângulos $Ab = \mathrm{A1} + \mathrm{A2} + \mathrm{A3} + \mathrm{A4} + \mathrm{A5}$, obtém-se a área total da base do prisma pentagonal, denotada por Ab. Ao multiplicar essa área total pela altura H do prisma, chega-se ao volume do sólido. No caso de uma base regular, como os cinco triângulos são congruentes, essa área total também pode ser expressa como cinco vezes a área de um único triângulo, o que simplifica o cálculo.

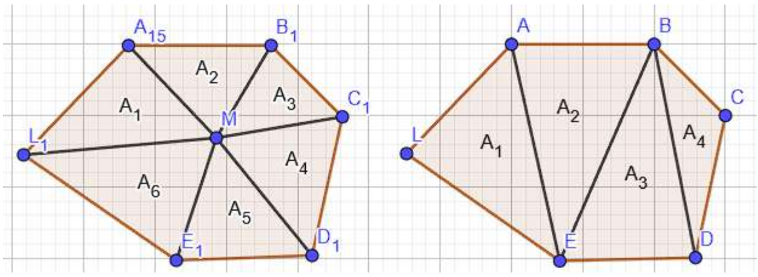
Figura 13 - Representação tridimensional do prisma de base pentagonal completamente preenchido.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Considerando agora um prisma cuja base é um hexágono irregular, ou seja, um polígono de seis lados com lados e ângulos de medidas diferentes.

Figura 14 - Hexágono irregular - Base do prisma hexagonal



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Nessa situação, não é possível utilizar a simetria para dividir a base em triângulos congruentes, como no caso do polígono regular. No entanto, a base ainda pode ser decomposta em triângulos: a primeira imagem mostra uma divisão em seis triângulos, enquanto a segunda apresenta uma triangulação com apenas quatro triângulos, para mostrar que o número de divisões pode variar de acordo com a estratégia adotada e as informações disponíveis. Em ambos os casos, a área de cada triângulo deve ser calculada individualmente e, ao somá-las, a área total da base Ab será encontrada.

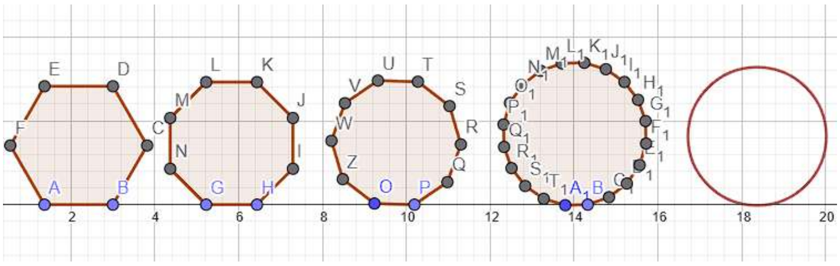
Assim, independentemente do número de lados do polígono que forma a base de um prisma ou da forma como ela é decomposta, o volume de qualquer prisma sempre será dado pelo produto entre a área da base Ab e a altura H, o que pode ser expresso pela fórmula:

$$V_{prisma} = Ab \times H.$$

2.3. TRANSIÇÃO DO PRISMA AO CILINDRO COMO CASO LIMITE

O raciocínio anterior ainda pode ser ampliado ao se considerar um processo de aumento progressivo no número de lados do polígono da base. À medida que esse número cresce indefinidamente, a forma da base vai se aproximando de um círculo, como é possível visualizar na figura abaixo.

Figura 15 - Transição de polígonos regulares para um círculo por meio do aumento gradual do número de lados



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

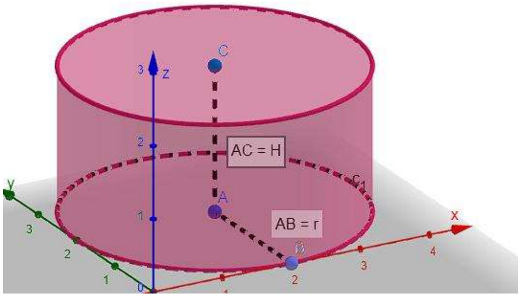
No limite desse processo, quando o número de lados do polígono tende ao infinito, a base se torna cada vez mais parecida com a de um círculo, e o prisma se aproxima de um cilindro. Apesar da mudança no formato da base, o princípio para o cálculo do volume continua sendo o produto entre a área da base e a altura. Nesse caso, como a base é um círculo, sua área é calculada por $Ab = \pi r^2$, em que r representa o raio da circunferência.

Dessa forma, a fórmula do volume do cilindro é expressa por:

$$V_{cilindro} = Ab \times H$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \times H$$

Figura 16 - Representação de um cilindro.



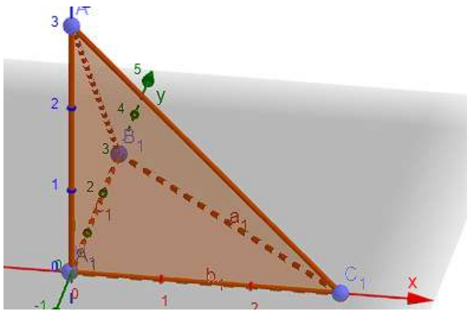
Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

2.4. VOLUME DA PIRÂMIDE

Após a generalização da fórmula do volume para prismas com diferentes tipos de base, ainda se pode avançar na construção conceitual e dar início à dedução do volume da pirâmide. Assim como o prisma, a pirâmide é definida a partir de uma base poligonal e uma altura que parte de um ponto externo a essa base. No entanto, diferentemente do prisma, em que as faces laterais são paralelas entre si, a pirâmide converge para um único vértice, o que altera a distribuição do espaço interno do sólido. A fórmula do volume da pirâmide pode ser compreendida a partir de sua relação com o prisma.

Para compreender essa fórmula, considera-se inicialmente uma pirâmide de base triangular e altura igual a 3 unidades, representada na figura 17. Embora a pirâmide esteja representada na forma reta, o método para calcular o seu volume é válido também para pirâmides oblíquas e para qualquer tipo de base poligonal. Isso porque, como foi demonstrado anteriormente, qualquer polígono que forma a base de um sólido pode ser decomposto em triângulos.

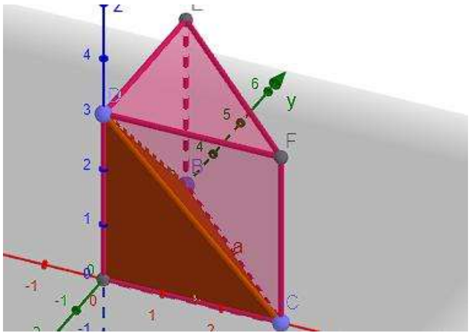
Figura 17 - Representação tridimensional de uma pirâmide de base triangular



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A próxima etapa consiste em construir um prisma que possua exatamente a mesma base e a mesma altura da pirâmide. Essa sobreposição permite visualizar como a pirâmide ocupa apenas uma parte do volume do prisma de base triangular.

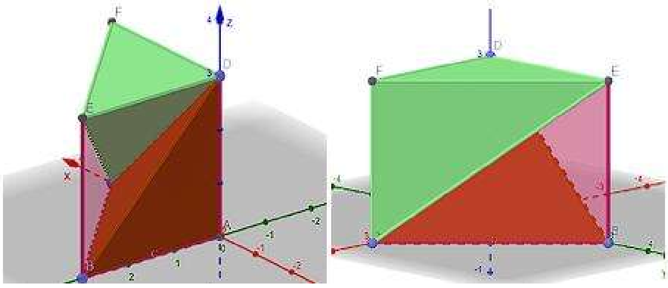
Figura 18 - Representação tridimensional de uma pirâmide inserida em um prisma de base triangular com mesma base e altura



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Na sequência, outra pirâmide idêntica à primeira é inserida dentro do prisma, como mostram as imagens a seguir, apresentadas em ângulos diferentes para uma melhor visualização. É possível notar que ainda resta um espaço vazio que pode ser preenchido por uma terceira pirâmide congruente às anteriores. Isso mostra que três pirâmides com a mesma base e altura preenchem completamente o volume do prisma correspondente.

Figura 19 - Representação tridimensional de duas pirâmides inseridas em um prisma de base triangular



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Essa construção permite perceber que, quando uma pirâmide e um prisma possuem a mesma base e a mesma altura, o volume da pirâmide corresponde a exatamente um terço do volume do prisma. Então, para calcular o volume de uma pirâmide, deve-se considerar a área de sua base e sua altura, e então dividir esse valor por 3. Daí a fórmula:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times Ab \times H$$

2.5. VOLUME DO CONE

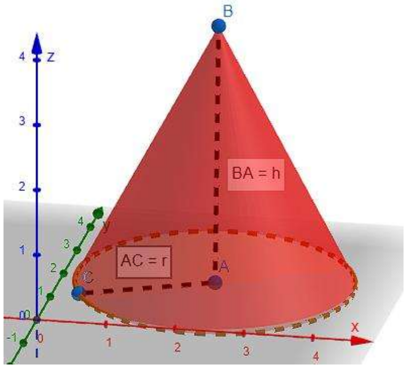
A partir desse raciocínio, pode-se pensar sobre o que acontece com pirâmides de outras bases, não somente a triangular. Como foi exemplificado anteriormente, qualquer polígono que forma a base de um sólido pode ser decomposto em triângulos. Com isso, cada um desses triângulos pode gerar, com o mesmo vértice superior, uma pirâmide triangular com a mesma altura.

Isso quer dizer que, uma pirâmide de base quadrada, pentagonal ou de qualquer outro polígono regular ou irregular pode ser vista como a união de várias pirâmides triangulares, todas com a mesma altura. Como já foi demonstrado no caso da pirâmide de base triangular, pode-se aplicar essa mesma lógica a qualquer outra pirâmide. Dessa forma, o volume de qualquer pirâmide corresponde exatamente a um terço do volume do prisma que possui a mesma base e a mesma altura, mantendo-se a fórmula geral para o cálculo do volume: $V = \frac{1}{3} \times Ab \times H.$

De modo semelhante ao processo utilizado para construir o conceito de volume do cilindro, que foi obtido a partir da generalização do volume dos prismas com base poligonal, também é possível ampliar o raciocínio sobre o volume da pirâmide para chegar ao cone. No caso do cilindro, foi observado que, ao aumentar indefinidamente o número de lados de um polígono regular que forma a base de um prisma, essa base se aproxima de um círculo, dando origem ao cilindro como um caso limite.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, considera-se agora uma pirâmide cuja base é um polígono regular com um número de lados cada vez maior, assim como foi mostrado na figura 15. À medida que esse número cresce, a forma da base se aproxima de um círculo e, no limite, a pirâmide se transforma em um cone.

Figura 20 - Cone



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

O cone, assim como a pirâmide, é um sólido que converge para um único vértice, e seu volume também representa um terço do volume do cilindro que possui a mesma base e altura. A base do cone é um círculo de raio r, cuja área é dada por $Ab = \pi r^2$. A altura H é a distância do vértice até o plano da base. Dessa forma, o volume do cone pode ser determinado pela seguinte fórmula:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\, Ab \times H$$

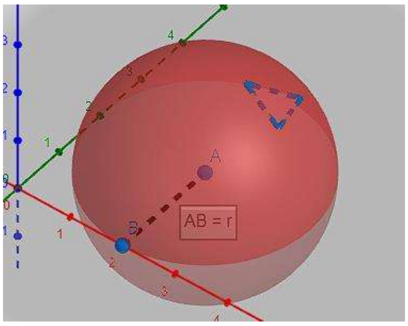
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \times H$$

2.6. DEDUÇÃO DO VOLUME DA ESFERA

Após a dedução da fórmula do volume de diferentes sólidos geométricos, passa-se à análise do último sólido estudado neste trabalho: a esfera. Diferente dos sólidos anteriormente explorados, a esfera não possui faces planas, vértices ou arestas, sendo definida como o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado de centro. Essa distância constante é denominada raio.

Para compreender o volume da esfera, pode-se recorrer à ideia de decomposição do sólido em partes menores, semelhantes àquelas já conhecidas e demonstradas ao longo deste trabalho. Considera-se, então, a divisão da superfície esférica em um número muito grande (tendendo ao infinito) de pequenas regiões, cada uma delimitada por três pontos sobre a superfície, formando o que se chama de triângulos esféricos. Embora esses triângulos estejam sobre uma superfície curva, é possível aproximá-los de triângulos planos quando suas dimensões são suficientemente pequenas.

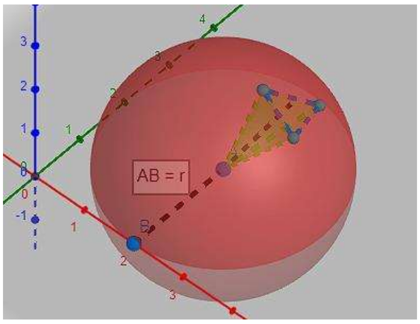
Figura 21 - Marcação de um triângulo sobre a superfície de uma esfera



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Ao unir cada um desses triângulos ao centro da esfera por segmentos de reta, formam-se sólidos que se assemelham a pirâmides de base aproximadamente triangular. No entanto, à medida que se reduzem as dimensões dos triângulos sobre a superfície esférica (ou seja, quanto mais triângulos forem traçados, tornando suas áreas cada vez menores), a curvatura local da base torna-se praticamente desprezível. Nesse limite, a base pode ser tratada como um triângulo plano, e a altura do sólido passa a se aproximar do raio da esfera. Assim, cada pirâmide formada tende a ser uma pirâmide reta de base triangular e altura igual ao raio da esfera. A imagem abaixo ilustra uma dessas pirâmides.

Figura 22 - Representação de uma pirâmide formada entre o centro da esfera e um triângulo da superfície



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Sabendo que o volume de uma pirâmide qualquer é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3}\ Ab \times H$ e que a esfera contém uma quantidade ilimitada dessas pirâmides, o volume total da esfera pode ser aproximado pela soma dos volumes dessas pequenas pirâmides:

$$V = \frac{1}{3}Ab_1 \times H + \frac{1}{3}Ab_2 \times H + \frac{1}{3}Ab_3 \times H + \cdots + \frac{1}{3}Ab_n \times H$$

Mas todas as pirâmides contidas na esfera têm como altura o raio da esfera, logo:

$$V = \frac{1}{3}Ab_1 \times r + \frac{1}{3}Ab_2 \times r + \frac{1}{3}Ab_3 \times r + \cdots + \frac{1}{3}Ab_n \times r$$

Colocando o fator comum em evidência:

$$V = \frac{1}{3} \times r(Ab_1 + Ab_2 + Ab_3 + \cdots + Ab_n)$$

A soma das áreas de todas as pequenas bases $A = (Ab_1 + Ab_2 + Ab_3 + \cdots + Ab_n)$ corresponde à área total da superfície da esfera, que é dada por $A = 4\pi r^2$. Substituindo:

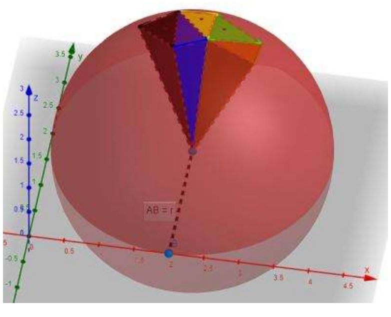
$$V = \frac{1}{3} \times r \times 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \times r \times \pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

A esfera pode, portanto, ser compreendida como o limite de uma soma de pirâmides, cujas bases cobrem toda sua superfície e cujas alturas são iguais ao raio. Esse raciocínio mostra a construção do conceito de volume a partir da decomposição e generalização de ideias fundamentais. A imagem a seguir ilustra esse processo de preenchimento da esfera e, à medida que o número de pirâmides aumenta, o volume total se aproxima do volume da esfera.

Figura 23 - Esfera sendo preenchida por pirâmides

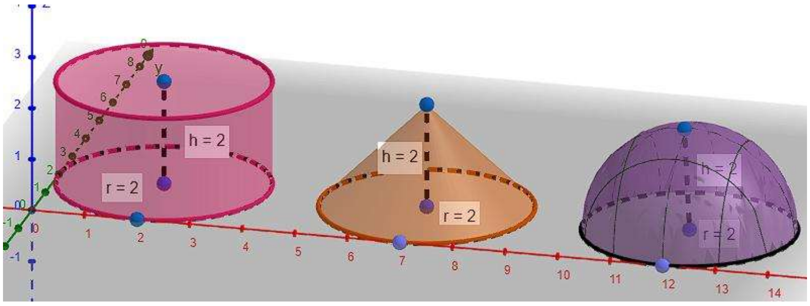


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

2.7. PROPOSTA DE APLICAÇÃO: COMPARAÇÃO ENTRE SÓLIDOS COM MESMO RAIO E ALTURA

Agora que os volumes dos principais sólidos geométricos foram estudados, é possível propor uma atividade que leve os estudantes a explorarem relações entre esses volumes, por meio de experimentos e comparações. Para isso, será apresentada aqui uma proposta didática baseada na análise de três sólidos com o mesmo raio e a mesma altura: um cilindro, um cone e uma semiesfera[9].

Figura 24 - Cilindro, cone e semiesfera com mesma base e altura



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A proposta consiste em pedir aos alunos que escolham um número e usem esse mesmo valor tanto para o raio quanto para a altura dos três sólidos. Com esses valores, eles deverão calcular o volume de um cilindro, de um cone e de uma semiesfera. Ao final, deverão verificar se a soma do volume do cone com o da semiesfera resulta no volume do cilindro.

Para ilustrar, considere o caso em que o raio é 2 e a altura também é 2. Os volumes podem ser calculados da seguinte forma:

Volume do cilindro:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \times h$$

$$V_{cilindro} = \pi 2^2 \times 2$$

$$V_{cilindro} = 8\pi$$

9 Uma semiesfera é a metade de uma esfera.

Volume do cone:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi 2^2 \times 2$$

$$V_{cone} = \frac{8\pi}{3}$$

E o volume da semiesfera, que é a metade do volume da esfera:

$$V_{semiesfera} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2}$$

$$V_{semiesfera} = \frac{\frac{4}{3}\pi 2^3}{2}$$

$$V_{semiesfera} = \frac{\frac{32\pi}{3}}{2}$$

$$V_{semiesfera} = \frac{16\pi}{3}$$

Ao somar o volume do cone e da semiesfera, tem-se:

$$V_{cone+semiesfera} = \frac{8\pi}{3} + \frac{16\pi}{3}$$

$$V_{cone+semiesfera} = \frac{24\pi}{3}$$

$$V_{cone+semiesfera} = 8\pi$$

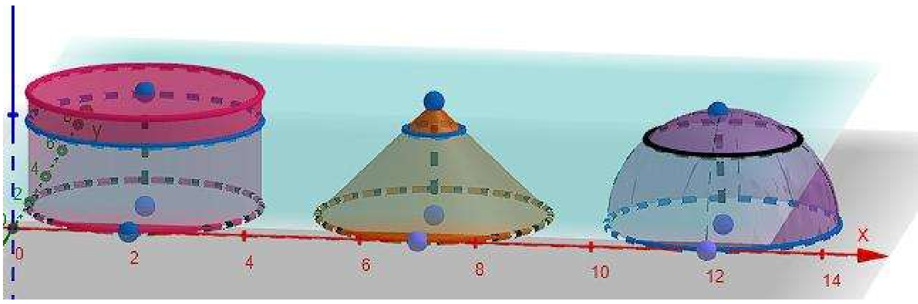
Mas 8π é justamente o volume do cilindro, logo:

$$V_{cilindro} = V_{cone+semiesfera}$$

Esse resultado não é exclusivo para os valores $r = 2$ e $h = 2$. Na verdade, essa relação se generaliza para quaisquer valores de raio e altura iguais. Sempre que um cilindro, um cone e uma semiesfera forem construídos com o mesmo raio e a mesma altura, a soma dos volumes do cone e da semiesfera será igual ao volume do cilindro.

Ao realizar essa atividade, os alunos irão perceber que, mesmo tendo escolhido valores diferentes entre si, todos chegaram ao mesmo tipo de conclusão: a soma do volume do cone com o da semiesfera resulta no volume do cilindro. Essa observação, feita a partir de diferentes casos numéricos, permite que eles percebam um padrão e desenvolvam a capacidade de generalizar a partir de situações particulares. Além disso, ela pode ser uma introdução intuitiva ao Princípio de Cavalieri, mesmo sem entrar em detalhes formais. Isso porque, ao analisar cortes horizontais feitos nos três sólidos, é possível observar que, a cada altura, a área da seção transversal do cilindro é igual à soma das áreas das seções transversais do cone e da semiesfera. Como todos os sólidos têm a mesma altura, essa equivalência nas seções sugere que os volumes também devem ser iguais, o que é justamente o que afirma o Princípio de Cavalieri.

Figura 25 - Visualização das seções transversais em um cilindro, cone e semiesfera com mesma altura e raio, ilustrando o Princípio de Cavalieri



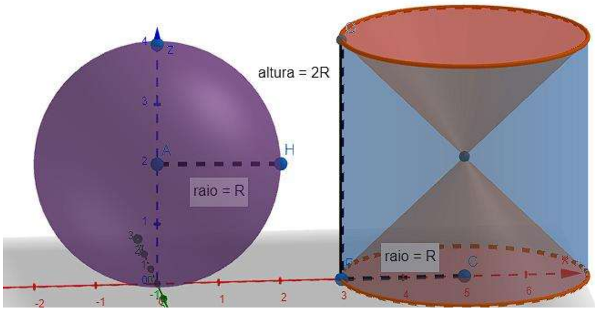
Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Essa é uma forma de utilizar o conhecimento desenvolvido ao longo da atividade de estudo para realizar generalizações e aprofundar a compreensão das propriedades geométricas. Experimentos como esse podem ser realizados tanto de forma visual, como apresentado neste trabalho, quanto com materiais concretos, se estes forem acessíveis.

2.7.1. Princípio de Cavalieri e relações entre sólidos

O princípio de Cavalieri afirma que, se dois sólidos possuem a mesma altura e áreas de secções transversais equivalentes em todos os planos paralelos às bases, então seus volumes também são iguais. A partir desse princípio, é possível comparar volumes de sólidos diferentes, desde que possuam a mesma altura e que, em qualquer plano paralelo às bases, as áreas das seções transversais sejam iguais. Para ilustrar a aplicação desse princípio, será apresentada a clássica comparação entre a esfera e um sólido conhecido como anticlepsidra. Essa comparação também pode ser usada para deduzir o volume da esfera, dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Figura 26 - Esfera e anticlepsidra com mesma altura e raio.

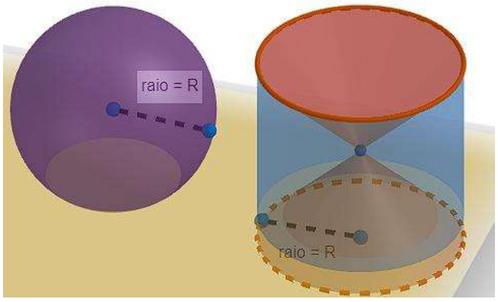


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A anticlepsidra é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero[10], cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Ela está representada como o espaço azul da figura acima. Ambos os sólidos representados possuem a mesma altura $2R$ e raio R.

Ao imaginar cortes horizontais feitos paralelamente às bases, percebe-se que, nas duas figuras, a área da seção transversal varia de maneira semelhante ao longo da altura. Inicialmente, próximo à base inferior, as áreas das seções são pequenas.

Figura 27 - Visualização da seção transversal de ambos os sólidos em um plano próximo à base.

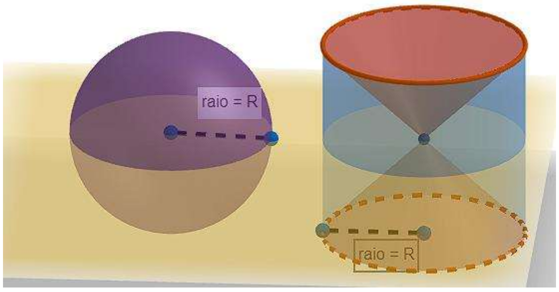


Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

[10] Um cilindro equilátero é um cilindro cujo diâmetro é igual a altura.

À medida que esses cortes se aproximam do centro, as áreas aumentam gradualmente, atingindo o valor máximo na região central. Nesse ponto, tanto a esfera quanto a anticlepsidra apresentam uma seção transversal com formato de circunferência completa. No caso da anticlepsidra, essa circunferência corresponde à base comum dos dois cones, com a única diferença de que, exatamente no centro, há o ponto de encontro dos vértices, o que não interfere significativamente na área total.

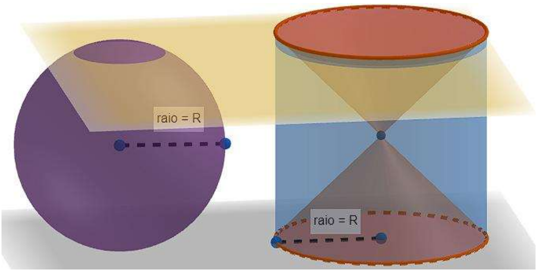
Figura 28 - Comparação das maiores seções transversais, onde ambos os sólidos apresentam uma circunferência completa.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

A partir daí, as seções em ambos os sólidos voltam a diminuir de maneira semelhante até desaparecerem completamente no topo.

Figura 29 - Corte próximo ao topo: seções transversais novamente pequenas



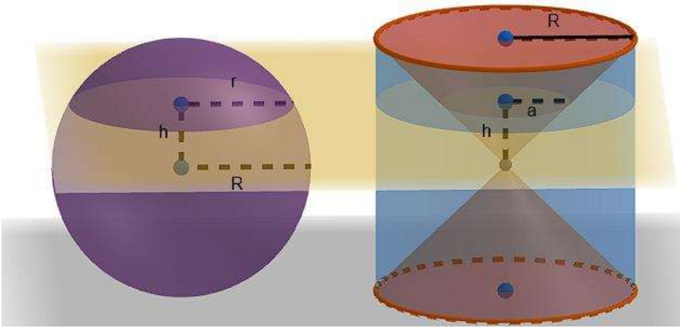
Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Essa é uma maneira intuitiva de observar a semelhança entre as variações das áreas das seções transversais dos dois sólidos. No entanto, para garantir que essa correspondência seja válida em qualquer altura, é necessário recorrer a uma verificação matemática.

Na esfera, a seção transversal em uma altura h diferente do centro é um círculo, cujo raio será menor que o raio máximo da esfera. Chamando o raio da esfera de R e o raio do círculo da seção de r, a área dessa seção será dada por πr^2, sendo r dependente da altura escolhida.

Já na anticlepsidra, ao realizar um corte na mesma altura h, a seção obtida será uma coroa circular. Essa coroa é formada pela diferença entre a área do círculo do cilindro (de raio R) e a área do círculo interno removido pelo cone, cujo raio será chamado de a. Assim, a área da seção transversal da anticlepsidra será dada por $A = \pi R^2 - \pi a^2$, ou $A = \pi(R^2 - a^2)$

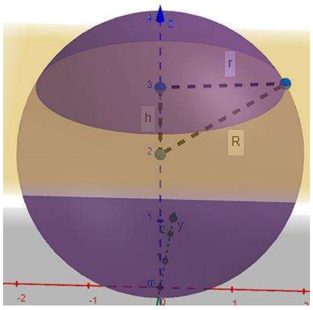
Figura 30 - Seções em altura h na esfera e na anticlepsidra.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Para relacionar as áreas das seções transversais da esfera e da anticlepsidra, é necessário compreender como o raio r do círculo da seção da esfera e o raio a do cone na anticlepsidra variam com a altura h, medida a partir do centro dos sólidos. Considerando o corte horizontal feito na esfera a uma altura h, é possível traçar um triângulo retângulo, já que o raio da esfera é o mesmo em qualquer ponto da superfície.

Figura 31 - Triângulo retângulo formado pelo corte na esfera a uma altura h



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

Aplicando o teorema de Pitágoras a esse triângulo, em que a hipotenusa é o raio R da esfera, um cateto é a altura h e o outro cateto é o raio da seção r, tem-se: $r^2 + h^2 = R^2$

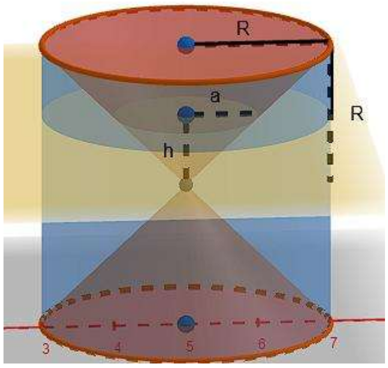
$$r^2 = R^2 - h^2$$

Substituindo na área dessa seção que foi dada anteriormente por $A = \pi r^2$, tem-se:

$$A_{esfera} = \pi(R^2 - h^2)$$

Já na anticlepsidra, para determinar o valor de a, é possível utilizar a semelhança de triângulos.

Figura 32 - Representação dos triângulos semelhantes formados no cone superior da anticlepsidra.



Fonte: Elaboração própria via GeoGebra

O cone superior completo (com altura R e raio da base também R) é semelhante ao cone menor que surge a partir do vértice até o plano de corte na altura h, cujo raio da base é a. Pela semelhança, tem-se que $a = h$, já que:

$$\frac{R}{R} = \frac{a}{h} = 1$$

Substituindo a por h na expressão da área da seção da anticlepsidra, que foi dada anteriormente por $A = \pi(R^2 - a^2)$, tem-se:

$$A_{anticlepsidra} = \pi(R^2 - h^2)$$

Com isso, pode-se comprovar que, para qualquer altura h, as áreas das seções transversais dos dois sólidos são iguais. Como ambas as figuras também possuem a mesma altura total, o princípio de Cavalieri garante que os volumes da esfera e da anticlepsidra são idênticos.

Mas como isso pode ser usado para justificar a fórmula do volume da esfera? Para se concluir isso, deve-se partir do pressuposto de que o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra. No entanto, o volume da anticlepsidra pode ser calculado como o volume de um cilindro de raio R e altura $2R$, subtraído dos volumes dos dois cones (superior e inferior), cada um com raio da base R e altura R. Assim, tem-se:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$$

$$V_{esfera} = \pi R^2 \times 2R - 2 \times (\frac{1}{3}\pi R^2 \times R)$$

$$V_{esfera} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$V_{esfera} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Dessa forma, conclui-se a dedução da fórmula do volume da esfera por meio da comparação com a anticlepsidra, utilizando o princípio de Cavalieri.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tratando-se da proposta didática apresentada neste trabalho, é possível perceber que cada etapa do processo buscou estabelecer um diálogo com os princípios da teoria do ensino desenvolvimental. Ao iniciar o conteúdo a partir de uma situação real, próxima da vivência dos alunos, e incentivá-los a pensar sobre como o conceito de volume pode ser compreendido naquele contexto, cria-se um ponto de partida que desperta o interesse e cria a necessidade de compreender. Nesse sentido, é possível retomar Leontiev, que afirma que toda atividade humana é orientada por uma necessidade e organizada em torno de um motivo. Assim, ao criar uma situação em que o aluno percebe um problema que precisa ser resolvido, mobiliza-se uma atividade de estudo que tem sentido para ele.

Por mais que não sejam apresentadas fórmulas de imediato, tratar o conteúdo valorizando a construção do conceito permite que os alunos compreendam o volume a partir de suas bases fundamentais. Ao focar no significado do que é medir e no que está sendo medido, ou seja, na quantidade de espaço ocupado, os estudantes têm a oportunidade de entender o conceito antes de associá-lo a qualquer expressão algébrica. Então mais do que ensinar uma fórmula, esta forma de apresentar o conteúdo permite que os alunos criem caminhos para a compreensão verdadeira do conceito em estudo. A maneira como as fórmulas foram construídas ao longo do trabalho mostrou como a dedução, o pensamento criativo e a lógica são importantes na matemática. Essa forma de raciocinar, baseada em relações dedutivas, foi fundamental em diversas descobertas matemáticas desde a Antiguidade e continua sendo essencial na matemática até hoje. Ensinar por meio desses vínculos lógicos e conceituais contribui não apenas para a compreensão dos conteúdos, mas também para o desenvolvimento da capacidade de pensar com fundamentação.

Ainda que o foco deste trabalho tenha sido mostrar como pode ocorrer a construção do conceito e sua generalização a partir do núcleo conceitual, fica como sugestão aprofundar a apresentação da importância desse conteúdo e seu papel ao longo da história da humanidade, considerando os diversos campos em que ele é aplicado. Compreender o conceito de volume vai além de saber aplicar fórmulas, é entender uma ideia que surgiu a partir da necessidade humana de medir e organizar o espaço ao seu redor. Historicamente, o volume passou a ser estudado para resolver problemas práticos, como armazenar alimentos, construir casas, medir líquidos, transportar mercadorias etc. Essa busca por soluções levou à criação de unidades de medida e ao desenvolvimento de fórmulas matemáticas que facilitam, até hoje, o cálculo do espaço ocupado por diferentes objetos. Recorrer à história nesse momento, relacionando o objeto de estudo ao contexto sociocultural em que foi desenvolvido, remete aos princípios da teoria histórico-cultural, que compreende o desenvolvimento do pensamento humano como vinculado às condições sociais, culturais e históricas em que os sujeitos vivem e aprendem.

Infelizmente, por conta do tempo reduzido disponível para aplicação, não foi possível implementar toda a proposta em uma turma regular. No entanto, algumas ideias foram levadas à prática durante o estágio supervisionado, em atividades práticas, como o uso de recipientes com água para relacionar medidas de volume e capacidade. Essas experiências apresentaram resultados iniciais positivos, como uma melhor assimilação dos conteúdos pelos alunos e a compreensão mais clara das relações entre volume, área e as unidades de medida.

Como forma de dar continuidade e aprofundar o trabalho, é interessante incluir de maneira mais clara e frequente o estudo das unidades de medida e das conversões entre elas, já que esse é um ponto importante para entender bem o conceito e saber aplicá-lo em diferentes situações. Com alguns ajustes, se forem necessários, essa proposta pode ser trabalhada em diferentes anos do ensino fundamental e médio, considerando o que é mais adequado para cada fase. O uso de materiais que os alunos possam manipular, situações do dia a dia e ferramentas digitais, como o GeoGebra, ajuda a tornar esse conteúdo mais próximo da realidade deles e se constituem como uma mediação no processo de ensino-aprendizagem.

4. CONCLUSÃO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar a construção do conceito de volume na perspectiva do ensino desenvolvimental proposto por Davydov, elaborando uma proposta didática voltada à formação do pensamento teórico por meio da atividade de estudo. Ao longo do trabalho, foi mostrado como o movimento lógico-histórico dos conceitos pode orientar a organização do ensino, permitindo que os estudantes construam os conhecimentos matemáticos de forma consciente, com base em generalizações e deduções lógicas, aspectos fundamentais para a matemática. Dessa forma, esta pesquisa apontou caminhos para que o ensino de volume vá além da memorização de fórmulas e propôs uma forma de trabalho que valoriza o raciocínio e o desenvolvimento do pensamento teórico.

Como sugestão para pesquisas futuras, é importante acompanhar a aplicação dessa proposta em contextos escolares, observando como os alunos respondem ao processo de construção do conceito de volume. Além disso, recomenda-se a inclusão de atividades práticas e experimentais, como o uso de recipientes para explorar a relação entre volume e capacidade, ou a construção de sólidos geométricos com materiais simples, que tornem o conceito mais concreto e próximo da realidade dos estudantes. Trabalhar a conexão entre as formas geométricas e as unidades de medida, especialmente nas conversões entre volume e capacidade, abre caminho para que os alunos compreendam melhor as situações do dia a dia que envolvem esses conceitos e consigam aplicar esse conhecimento dentro e fora da escola.

Por fim, este trabalho reforça a ideia de que teoria e prática não são opostas, mas complementares. A teoria oferece fundamentos para que a prática seja mais consciente, enquanto a prática dá vida e sentido ao que foi estudado teoricamente. Nesse movimento, os alunos são incentivados a buscar os porquês dos conceitos, a compreender suas raízes e relações. Assim, o processo de ensino-aprendizagem deixa de ser uma simples repetição de procedimentos e passa a consolidar a construção de conceitos científicos, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de analisar, generalizar e se apropriar dos conceitos para agirem sobre o mundo.

REFERÊNCIAS

LEONTIEV, Alexei Nikolaevich. Atividade. Consciência. Personalidade. Tradução de Marcelo José de Souza e Silva, 2014. Título original*: Деятельность. Сознание. Личность.*

LIBÂNEO, José Carlos. **A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino**. Educativa, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo, SP: Scipione, 1997. (Pensamento e Ação no Magistério).

REGO, Teresa Cristina. Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995. (Educação e conhecimento).

RIOS, Camila Fernanda Moro; ROSSLER, João Henrique. **Atividade principal e periodização do desenvolvimento psíquico: contribuições da psicologia histórico-cultural para os processos educacionais**. Perspectivas en Psicología, Uberlândia, MG, v. 14, n. 2, p. 30-41, dez. 2017.

SANTOS, Marília Alves dos; ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira. **A teoria da atividade de A. N. Leontiev: uma síntese a partir de suas principais obras**. Revista Brasileira da Pesquisa Sócio-histórico-Cultural e da Atividade, [cidade], v. 2, n. 2, 2020.

TEIXEIRA, Edival; PREUSS, André**. A atualidade estridente da psicologia histórico-cultural: revisitando alguns fundamentos da obra de Vigotski**. In: DIAS, Maria Sara de Lima (Org.). Lev Vygotsky: teoria e prática da perspectiva histórico-cultural [recurso eletrônico]. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2021. Arquivo digital pessoal.

VIGOTSKI, L. S., 1896-1934. O essencial de Vigotski / L. S. Vigotski; orgs. Robert W. Rieber, David K. Robinson; tradução de Priscila Nascimento Marques e Caesar Souza. Petrópolis, RJ: Vozes, 2024

PUC GOIÁS

Termo de autorização de publicação de produção acadêmica

O(A) estudante Vitória Rodrigues Castro dos Santos do Curso de Matemática, matrícula 20212005400061, telefone:(77)981647910, e-mail vitoriarodriguescass@gmail.com, na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei nº 9.610/98 (Lei dos Direitos do autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado A construção do conceito de volume na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF); Imagem (GIF ou JEPG): Som (WAVE, MPEG, AIFF, SNS); Vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão pela internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 24 de junho de 2025.

Assinatura do(s): autor(es):

Vitória Rodrigues Castro dos Santos

Nome completo do autor:

Vitória Rodrigues Castro dos Santos

Assinatura do professor- orientador:

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Nome completo do professor-orientador:

Duelci Aparecido de Freitas Vaz