Armadura de Tração em Seções Retangulares Submetidas à Flexão Pura – Simplificação de Cálculo para Armadura Simples

Rocha, J.C.F. [1]
Graduando, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil

Chaer, A.V. [2]
Professor Me., Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil

[1] jonathancfr@gmail.com; [2] chaer@pucgoais.edu.br;

RESUMO: O presente trabalho faz uma revisão bibliográfica do cálculo de armadura de tração na flexão. Dando continuidade aos aprendizados nas disciplinas de Estruturas de Concreto Armado, o estudo elabora uma tabela, com o auxílio do *software* Microsoft Excel® apresentando a variação do trinômio $x - M_d - A_s$ nos Domínios de Deformação na Flexão (2, 3 e 4). Ao usuário é permitido acompanhar a variação dos valores de todos os parâmetros que envolvem o cálculo de armadura de tração na flexão para uma definida seção transversal retangular e os materiais concreto e aço. Com a entrada do momento fletor de cálculo, faz-se a interpolação em busca de valores inferior e superior na tabela, de forma bem objetiva e precisa, uma vez que várias deformadas são geradas entre as fronteiras dos Domínios de Deformação em tela. A avaliação da função $f(M_d) = A_s$ para diversos exemplos verificados sugeriu uma simplificação para o escopo de Armadura Simples: a linearização da função $f(M_d) = A_s$. Foram avaliados os erros para a simplificação proposta, erros sempre positivos (a favor da segurança) e pequenos em porcentagem com relação ao resultado da função $f(M_d) = A_s$ original. A proposta de linearização estudou vários intervalos notáveis a partir das fronteiras e concluiu-se para uma interpolação simples com a necessidade do usuário calcular apenas dois pares (M_d, A_s): na Fronteira 2a-2b (uma vez que o trabalho sugere uma subdivisão do Domínio 2) e na Fronteira do Momento Limite (para Armadura Simples). Outra planilha foi desenvolvida apresentando e calculando os passos para a simplificação proposta. Os resultados confirmam a pertinência da simplificação proposta.

Palavras-chaves: Concreto Armado, Flexão Pura, Armadura Simples, Linearização da função $f(M_d) = A_s$.

Área de Concentração: 02 – Estruturas

1 INTRODUÇÃO

A determinação de armadura longitudinal para peças de seção retangular de concreto submetidas à solicitação de Momento Fletor tem como base teórico-experimental os Ensaios de Stuttgart (SÜSSEKIND, 1985), um marco para compreensão do funcionamento do modelo de treliça idealizado por Morsch, que resultou nas primeiras expressões que encontra-se nas referências bibliográficas para a determinação da quantidade de armadura longitudinal devido à flexão pura e flexão simples.

O cálculo da armadura, respeitando as condições dos Estados Limites Últimos (ELU), deve ser realizado com a introdução de princípios estatísticos que recomendam a minoração da resistência dos materiais, concreto e aço, bem como a majoração do carregamento, para que o dimensionamento seja realizado no Estádio III, em que a seção transversal atinge um nível de fissuração em que os materiais, concreto e/ou aço, passam para o regime plástico, caminhando-se para a ruptura.

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os Estados Limites Últimos (ELU) na flexão pura estão relacionados aos Domínios de Deformação 2, 3 e 4, em que o cálculo de armadura de flexão apresenta situações de ruptura em que pelo menos um dos materiais está em "ruptura de projeto" (a fibra mais comprimida de concreto em deformação última e/ou a fibra correspondente ao CG da armadura tracionada está com sua deformação de tração no limite do escoamento de projeto), uma premissa para o processo de determinação da armadura necessária. No domínio 2, o material que está em ruptura é o aço em tração, após ter desenvolvido todo o escoamento. Já nos domínios 3 e 4, é o concreto que está em ruptura por compressão. De imediato, vê-se que somente tem- se uma deformada em que ambos os materiais estão em ruptura simultânea: a

fronteira 2-3. Também, tem-se outra fronteira importante que é a fronteira 3-4. Nesta situação, o aço apresenta deformação em início de escoamento e é o concreto que está em ruptura. Tanto no domínio 2, quanto no domínio 3, tem-se um tipo de ruptura classificado como Ruptura Dúctil, acompanhada de intensa deformação plástica, no caso o escoamento do aço. Ao se passar desta fronteira, com a solicitação sendo caracterizada no domínio 4, com a deformação do aço inferior à deformação de início de escoamento, a tensão no aço deve ser calculada obedecendo à Lei de Hooke e, portanto, não se utiliza a tensão máxima do aço, neste domínio de deformação, sendo que o resultado é um crescimento da quantidade de armadura final. Outra desvantagem de se calcular a armadura de flexão no domínio 4, além de ser antieconômico, é que o padrão de ruptura se dará sem aviso prévio: o concreto entra em esmagamento por compressão, sem que haja o escoamento do aço tracionado, ou seja, ruptura brusca, classificada como Ruptura Frágil.

Todas as recomendações normativas sugerem que se evite o cálculo de armadura de flexão em ruptura brusca. Para isto, a norma NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda um limite para a curvatura do elemento, limite este que, na década de 80 era a fronteira 3-4 e que, recentemente a partir de 2003, passou a ser uma deformada anterior à fronteira 3-4, chamada neste trabalho de Deformada Limite, que pertence ao domínio 3 para todas as combinações de concretos de classe I e II, bem como os aços normatizados CA-25, CA-50 e CA-60. Esta deformada caracteriza o que chamamos situação limite para o cálculo com Armadura Simples.

O termo Armadura Simples diz respeito ao cálculo de armadura longitudinal em que temos apenas exigência de armadura de tração. Na região comprimida introduzimos duas barras finas, chamadas de armadura de montagem ou porta-estribos, como o próprio nome diz, para a fixação dos estribos na região comprimida. Caso se tenha uma solicitação inicial que conduza a uma deformada posterior à deformada limite, pode-se tomar duas decisões de projeto: a) alterar os parâmetros de geometria e material, buscando uma nova situação de deformada anterior à limite e, portanto, mantendo o cálculo por Armadura Simples; b) optar pelo arranjo de armadura conhecido por Armadura Dupla.

O cálculo de armadura de flexão por Armadura Dupla fixa a posição da deformada na situação limite e o resultado é um arranjo de armação composta por armadura de tração e armadura de compressão calculadas. Há, portanto, presença de armadura longitudinal de compressão, que cumpre o papel do porta-estribo.

O presente trabalho teve com objetivo produzir um material didático a respeito do assunto, acompanhado de aplicações em planilha de cálculo para o autoaprendizado. Outrossim, foram propostos modelos simplificados de determinação de armadura de flexão para situação de Armadura Simples.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 *Hipóteses Básicas*

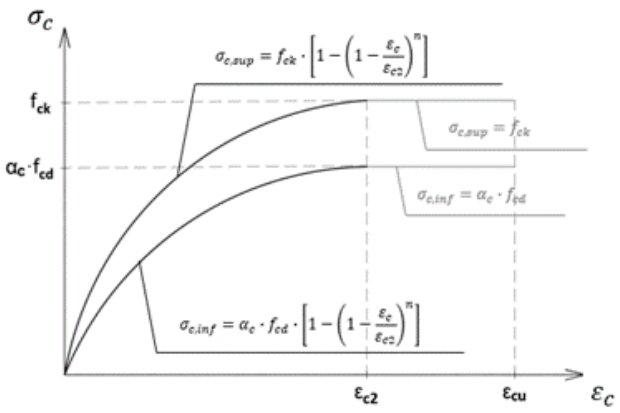
Para a análise dos esforços resistentes de uma viga submetida a força normal e momentos fletores, devem ser consideradas as seguintes hipóteses básicas (ABNT NBR 6118:2014, item 17.2):

a) As seções transversais permanecem planas até que haja a ruptura, ou seja, a distribuição das deformações é linear;
b) A deformação das barras de aço deve ser a mesma do concreto ao seu entorno, deste modo garantido a aderência entre concreto e barra de aço;
c) O alongamento máximo permitido para a armadura de tração será de 10‰, com o intuito de prevenir deformações excessivas;
d) No ELU, as tensões de tração no concreto são desprezadas;
e) A distribuição de tensões do concreto é feita de acordo com o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo, com tensão máxima σ_{cd}.

2.2 *Tensão-Deformação do Concreto na Compressão*

Em análises do ELU podem ser empregados o diagrama tensão-deformação, como mostrado na Figura 1, este diagrama, foi obtido por meio de ensaios à compressão centrada, representando a relação entre essas duas grandezas. Desta forma é possível notar uma região parabólica, definida no intervalo $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$ e outra linear em $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$.

Figura 1 – Diagrama Tensão-Deformação do Concreto.



Fonte: Praxedes, Jorge, Chaer (2015).

A relação tensão-deformação é dada pelas expressões abaixo, com as constantes aparecendo na Tabela 1:

$$\sigma_{c,sup} = f_{ck}.k_2 \quad (1)$$

$$\sigma_{c,inf} = \alpha_c.f_{cd}.k_2 \quad (2)$$

Onde:

$$\begin{cases} k_2 = 1 - \left(1 - \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n, & se\ 0 \le \varepsilon_c < \varepsilon_{c2} \\ k_2 = 1, & se\ \varepsilon_{c2} \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (3)$$

Tabela 1 – Valores para as constantes.

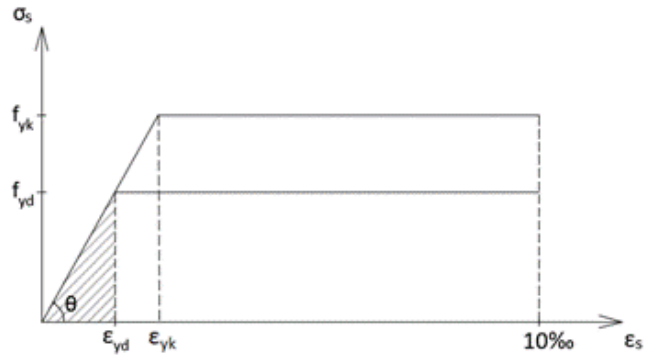
Classe de Concreto GRUPO I (C20 – C50)	Classe de Concreto GRUPO II (C55 – C90)
$\varepsilon_{c2} = 2\ ‰$	$\varepsilon_{c2} = 2\ ‰ + 0{,}085\ ‰ . (f_{ck} - 50)^{0,53}$
$\varepsilon_{cu} = 3{,}5\ ‰$	$\varepsilon_{cu} = 2{,}6\ ‰ + 35\ ‰ . \left(\dfrac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$
$n = 2$	$n = 1{,}4 + 23{,}4 . \left(\dfrac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$
$\alpha_c = 0{,}85$	$\alpha_c = 0{,}85 . \left(1 - \dfrac{f_{ck} - 50}{200}\right)$
$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}8 - \left(\dfrac{f_{ck} - 50}{400}\right)$

Fonte: Autores.

2.3 *Tensão-Deformação do Aço*

Os valores característicos da resistência de escoamento do aço, assim como, o diagrama tensão-deformação, devem ser obtidos por meio de ensaios de tração. Para os cálculos nos ELU e ELS, pode-se utilizar uma simplificação do diagrama, como mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama Tensão-Deformação do Aço.



Fonte: Praxedes, Jorge, Chaer (2015).

Onde:

$$\tan\theta = E_s = \frac{f_{yd}}{\varepsilon_{yd}} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (5)$$

2.4 *Domínios de Deformação*

No cálculo de armadura de flexão nos ELU, a deformada da seção transversal encontra-se pertencente aos domínios de deformações 2, 3 ou 4. A NBR 6118 (ABNT, 2014) (item 17.2.2) define os domínios de deformação da seguinte maneira e como mostrados na Figura 3.

Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:

a) Reta a: tração uniforme;
b) Domínio 1: tração não uniforme, sem compressão. O estado limite último é caracterizado pelo do aço;
c) Domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto. O estado limite último é caracterizado pelo escoamento do aço limitado a 10‰;

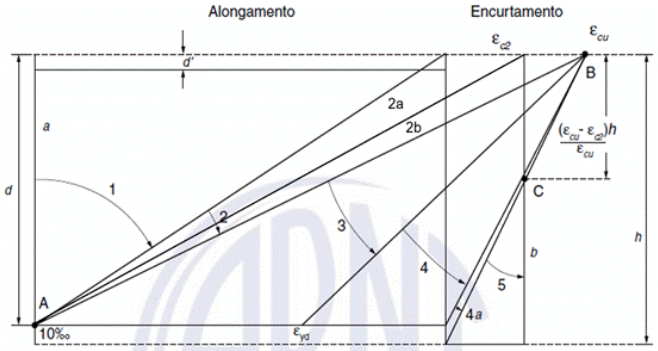
O trabalho propõe uma subdivisão do Domínio 2 em Subdomínio 2a e Subdomínio 2b, assim caracterizados:

d) Subdomínio 2a: deformada no concreto ($0 \le \varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$), cujo diagrama tensão-deformação se encontra na região parabólica, como mostra a Figura 1, com $k_2 < 1$, calculado através da Expressão 3.
e) Subdomínio 2b: deformada no concreto ($\varepsilon_{c2} \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu}$), cujo diagrama tensão-deformação atinge sua tensão máxima, com $k_2 = 1$ na Expressão 3.

Ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto:

f) Domínio 3: flexão simples (seção sub armada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço;
g) Domínio 4: flexão simples (seção super armada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$);
h) Domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
i) Domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
j) Reta b: compressão uniforme.

Figura 3 – Domínios de Deformação



Fonte: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014).

2.5 *Equações de Equilíbrio*

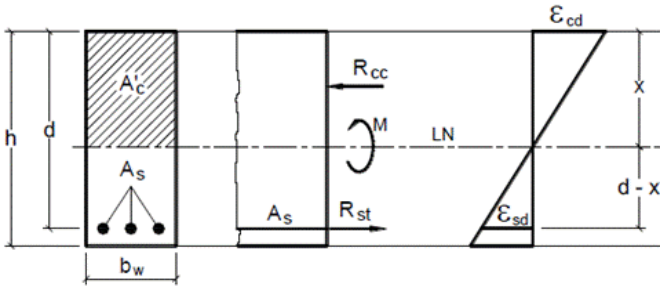
Vigas em concreto armado podem assumir diversas formas geométricas, porém, os casos usuais, a seção é retangular. Neste contexto, define-se seção retangular com armadura simples aquela que necessita apenas de armadura resistente na região de tração do concreto. Por questões construtivas de concretagem, utilizam-se barras longitudinais finas – a armadura de "porta-estribos" – na região comprimida para a amarração dos estribos, esta não sendo considerada no cálculo de flexão.

Seguindo as hipóteses básicas, pode-se estabelecer as equações de equilíbrio. De modo que, tem-se a formulação dos esforços internos resistentes como sendo:

$$\sum N = 0 \text{ e } \sum M = 0 \qquad (6)$$

Seja uma viga retangular, com largura b_w e altura h, sob flexão simples, sendo solicitada por um momento fletor positivo, contendo armadura de aço A_s e uma área de concreto comprimido A'_c. A Linha Neutra (LN) é demarcada pela distância x, medida a partir da fibra mais comprimida da seção transversal. A altura útil d é a distância da fibra mais comprimida ao centro de gravidade da armadura longitudinal tracionada, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Distribuição de tensões e deformações em viga de seção retangular



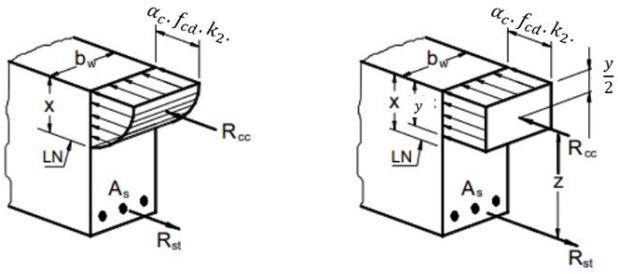
Fonte: Bastos (2019).

A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da LN no ELU, sendo definida como a relação $\frac{x}{d}$, denominado k_x, que por semelhança de triângulos, pode-se inferir:

$$k_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \qquad (7)$$

Para representar melhor como as tensões de compressão são distribuídas na seção, a Figura 5 mostra em perspectiva os diagramas parábola-retângulo e retangular simplificado para o equacionamento.

Figura 5 – Distribuição de tensões de compressão em perspectiva



Fonte: Adaptado de Bastos (2019).

Portanto, das equações de equilíbrio estático e a partir das Figuras 4 e 5, tem-se:

$$\sum N = 0 \ \therefore R_{cc} - R_{st} = 0 \ \rightarrow \ R_{cc} = R_{st} \qquad (8)$$

$$\sum M = 0 \ \therefore R_{st}.z = \ R_{cc}.z = M_d \qquad (9)$$

Onde:

$$M_d = R_{cc} \, . z \qquad (10)$$

$$M_d = R_{st} \, . z \qquad (11)$$

$$R_{st} = A_s \,.\, f_{sd} \quad (12)$$

$$R_{cc} = \sigma_{cd} \,.\, A'_c = \sigma_{cd} \,.\, b_w \,.\, y \quad (13)$$

$$z = d - \frac{y}{2} \quad (14)$$

$$y = \lambda . x \quad (15)$$

De (12) e (13), obtém-se:

$$M_d = A_s \,.\, f_{sd} \,.\, z \;\rightarrow\; A_s = \frac{M_d}{f_{sd} \,.\, z} \quad (16)$$

De (11), (14), (15) e (16), tem-se:

$$\begin{aligned} M_d &= \sigma_{cd} \,.\, A'_c \,.\, z \;= \sigma_{cd} \,.\, b_w \,.\, y.z \\ M_d &= \sigma_{cd} \,.\, b_w \,.\, \lambda . x . \left(d - \frac{\lambda . x}{2}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

O problema se resolve encontrando o valor da posição da LN (x), tal que desenvolvendo a Expressão (17) em função de x, tem-se:

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 . M_d}{\sigma_{cd} . b_w}}}{\lambda} \quad (18)$$

Multiplicando-se e dividindo-se os termos à direita da Expressão (17) por d^2, sem alterar seu resultado, obtém-se:

$$M_d = \sigma_{cd} \,.\, b_w \,.\, y.z \;=\; \sigma_{cd} \,.\, b_w \,.\, \lambda . \frac{x}{d} . \frac{z}{d} . d^2 \quad (19)$$

Definindo como $k_z = \frac{z}{d}$, tem-se:

$$M_d = \sigma_{cd} \,.\, \lambda . k_x . k_z . b_w . d^2 \quad (20)$$

2.6 *Momento Mínimo e Armadura Mínima*

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), para melhorar o desempenho e a ductilidade à flexão, assim como controlar a fissuração, são necessários valores mínimos de armadura passiva calculados com base no momento mínimo.

Quando se formam as primeiras fissuras de tração na flexão, deve ser evitada uma ruptura frágil da sessão fissurada, prescrevendo-se uma armadura de tração calculada para o que a NBR 6118 (ABNT, 2014) define como Momento Mínimo.

Esta armadura mínima de tração, em elementos estruturais armados ou protendidos deve ser determinada em função de um momento fletor mínimo dado pela expressão a seguir, respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15 %:

$$M_{d,min} = 0{,}8 . W_0 . f_{ctk,sup} \quad (21)$$

Onde W_0 é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada, definido, para seção transversal retangular, como:

$$W_0 = \frac{b_w . h^2}{6} \quad (22)$$

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda que, na falta de ensaios para a obtenção da resistência à tração indireta e da resistência à tração na flexão, a resistência à tração direta do concreto pode ser avaliada por meio das seguintes expressões:

$$f_{ctk,inf} = 0{,}7 \,.\, f_{ct,m} \quad (23)$$

$$f_{ctk,sup} = 1{,}3 \,.\, f_{ct,m} \quad (24)$$

Sendo:

$$\begin{cases} f_{ct,m} = 0{,}3 \,.\, f_{ck}^{\frac{2}{3}} \\ para\ f_{ck} \leq 50\ MPa \\ \\ f_{ct,m} = 2{,}12 \,.\, \ln(1 + 0{,}11 \,.\, f_{ck}) \,, \\ para\ 55\ MPa \leq f_{ck} \leq 90\ MPa \end{cases} \quad (25)$$

2.7 *Momento na Fronteira 2a-2b ($M_{d,ab}$)*

A Fronteira 2a-2b é definida como sendo a região onde a deformada do concreto vale ε_{c2} e a deformada do aço vale 10‰, sendo esta representada na Figura 3, onde tem-se uma adaptação dos Domínios de Deformação provindos da NBR 6118 (ABNT, 2014). Desta forma é possível definir o par $(M_{d,ab}; A_{s,ab})$ substituindo os respectivos valores das deformadas conhecidas:

$$k_{x,ab} = \frac{x_{ab}}{d} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + 10‰} \quad (26)$$

$$k_{z,ab} = \frac{z_{ab}}{d} \quad (27)$$

$$z_{ab} \;=\; d - \frac{y_{ab}}{2} \quad (28)$$

$$y_{ab} \;=\; \lambda . x_{ab} \quad (29)$$

$$x_{ab} = k_{x,ab}.d \quad (30)$$

$$\frac{z_{ab}}{d} = \frac{d}{d} - \frac{y_{ab}}{d.2} \quad (31)$$

$$k_{z,ab} = 1 - \frac{\lambda}{2}.\frac{x_{ab}}{d} \quad (32)$$

$$k_{z,ab} = 1 - \frac{\lambda}{2}.k_{x,ab} \quad (33)$$

Logo, substituindo na Expressão (20):

$$M_{d,ab} = \sigma_{cd}\,.\lambda.k_{x,ab}.k_{z,ab}.b_w.d^2 \quad (34)$$

2.8 *Momento Limite para Armadura Simples ($M_{d,lim}$)*

Para proporcionar um comportamento dúctil adequado da peça, com relação ao valor da posição relativa da linha neutra, a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda:

$$\begin{cases} k_{x,lim} \leq 0{,}45\ para\ f_{ck} \leq 50\ MPa \\ k_{x,lim} \leq 0{,}35\ para\ 55\ MPa \leq f_{ck} \leq 90\ MPa \end{cases} \quad (35)$$

A partir da definição de uma posição limite para a linha neutra, estabelece a fronteira entre o cálculo de armadura classificado como Armadura Simples e Armadura Dupla.

A situação definida como Armadura Simples terá armadura de tração calculada e, na região comprimida, prescreve-se uma armadura de montagem, conhecida como porta-estribos. Para o caso de Armadura Dupla (que não faz parte do escopo deste trabalho), o resultado do cálculo da armação devido à flexão são dois conjuntos de armadura: armadura de tração e armadura de compressão, esta que faz o papel de porta-estribo.

Para a posição limite da linha neutra, o momento correspondente é conhecido como Momento Limite (para o cálculo com Armadura Simples).

O Momento Limite é facilmente definido a partir da Expressão (20), desde que se apresente a expressão de $k_{z,lim}$:

$$k_{z,lim} = \frac{z_{lim}}{d} \quad (36)$$

$$z_{lim} = d - \frac{y_{lim}}{2} \quad (37)$$

$$y_{lim} = \lambda.x_{lim} \quad (38)$$

$$x_{lim} = k_{x,lim}.d \quad (39)$$

$$\frac{z_{lim}}{d} = \frac{d}{d} - \frac{y_{lim}}{d.2} \quad (40)$$

$$k_{z,lim} = 1 - \frac{\lambda}{2}.\frac{x_{lim}}{d} \quad (41)$$

$$k_{z,lim} = 1 - \frac{\lambda}{2}.k_{x,lim} \quad (42)$$

E, portanto:

$$M_{d,lim} = \sigma_{cd}\,.\lambda.k_{x,lim}.k_{z,lim}.b_w.d^2 \quad (43)$$

Sendo que a posição limite da linha neutra está contida no Domínio 3, para a determinação de σ_{cd} o valor de k_2 será 1, portanto, a partir da Expressão 3:

$$\sigma_{cd,inf} = \alpha_c.f_{cd} \quad (44)$$

3 METODOLOGIA

3.1 *Planilhas desenvolvidas*

Inicialmente, dando continuidade aos estudos na disciplina Estruturas de Concreto Armado I, este trabalho produziu uma planilha para cálculo de armadura de flexão para seções retangulares de concreto armado, em que o usuário cadastra os dados geométricos da seção, os dados de material (classe de concreto e categoria de aço) e, com o valor do Momento Fletor de cálculo (M_d) tem-se uma interpolação em função das linhas da referida planilha, linhas estas que correspondem ao trinômio $x - M_d - A_s$ para deformadas possíveis segundo os Domínios de Deformação na Flexão (2, 3 e 4).

Entre cada fronteira dos referidos Domínios de Deformação a tabela tem 100 linhas, ou seja, uma variação que conduz a uma interpolação bastante eficiente, pela proximidade de valores entre linhas consecutivas.

Posteriormente, as análises dos resultados conduziram a uma proposta de simplificação de cálculo para situação de Armadura Simples na Flexão Pura. Deste estudo, resulta uma segunda planilha implementada.

3.2 *Espelho das Planilhas*

Os espelhos das duas planilhas desenvolvidas estão anexados no Apêndice deste trabalho para melhor visualização.

3.3 *Determinação de x independente da tabela*

Como é possível notar na Figura 1, o diagrama tensão-deformação do concreto apresenta uma região parabólica no seu regime elástico, deste modo dificultando a determinação do valor de tensão aplicado para certa deformação neste intervalo ($0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$). Para o cálculo da tensão nesta situação utiliza-se um coeficiente, denominado k_2, o qual tem a função de definir o comportamento parabólico.

Se não estiver disponível a planilha apresentada anteriormente, há como calcular a armadura através da determinação da posição da LN (x), a partir da Expressão (18), apresentada novamente a seguir:

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2.M_d}{\sigma_{cd}.b_w}}}{\lambda} \quad (45)$$

Se a solicitação M_d for maior ou igual ao momento na Fronteira 2a-2b, $\varepsilon_c \geq \varepsilon_{c2}$ e $k_2 = 1$. Substituindo σ_{cd} com $k_2 = 1$ na Expressão (45), tem-se:

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2.M_d}{\alpha_c.f_{cd}.b_w}}}{\lambda} \quad (46)$$

cuja determinação é imediata. Com o qual se encontra a tensão de tração no aço (f_{sd}):

$$\begin{cases} f_{sd} = f_{yd}\,, & se \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_s < 10‰ \\ f_{sd} = E_s\,.\varepsilon_s\,, & se \quad 0 \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (47)$$

Por fim, da Expressão (16), encontra-se a área de aço da região tracionada de forma direta:

$$A_s = \frac{M_d}{f_{sd}\,.z} \quad (48)$$

Contudo, se a solicitação M_d for menor que o momento na Fronteira 2a-2b, $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ e $k_2 < 1$, sendo este calculado como:

$$k_2 = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n, \qquad se\ 0 \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{c2} \quad (49)$$

Substituindo σ_{cd} (Expressão (2)), k_2 (Expressão (45)) na Expressão 19 da LN, tem-se:

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2.M_d}{\alpha_c.f_{cd}.(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n).b_w}}}{\lambda} \quad (50)$$

Tal que, a LN pode ter representada por:

$$k_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \quad (51)$$

$$x = \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}\right).d \quad (52)$$

A solicitação está no Subdomínio 2b, onde a deformação do aço ε_s apresenta seu alongamento máximo de 10‰. Substituindo o valor da deformação do aço na Expressão (50) e igualando com a Expressão (52), tem-se:

$$\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}\right).d = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2.M_d}{\alpha_c.f_{cd}.(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n).b_w}}}{\lambda} \quad (53)$$

Segundo a Tabela 1, n tem valor constante igual a 2 para concretos do GRUPO I, enquanto, para concretos do GRUPO II, n assume valores fracionários menores do que 2. Algebricamente encontrar a solução ε_c não é um processo imediato.

Portanto, é recomendável uma solução numérica para o problema, por exemplo, o método de busca binária, que consiste em tentativas e erros "controlados" de modo a convergir para um valor tão próximo do desejado quanto possível, atribuindo-se valores no intervalo válido ($0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$).

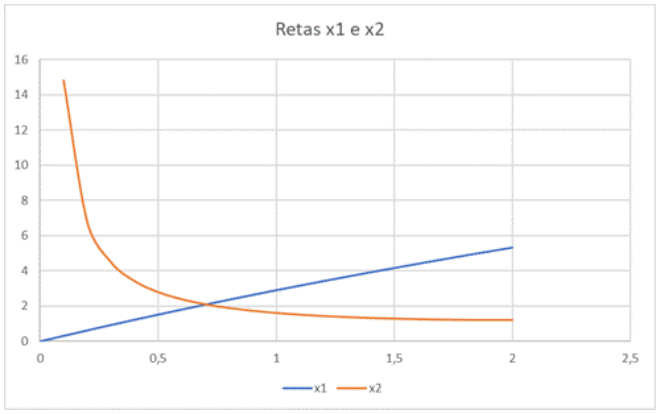
Outra maneira, a partir das Expressões (31) e (33), denomina-se como funções, de modo a variar de ε_c a ε_{c2}:

$$x_1 = \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}\right).d.\lambda \quad (54)$$

$$x_2 = d - \sqrt{d^2 - \frac{2.M_d}{\alpha_c.f_{cd}.(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n).b_w}} \quad (55)$$

Tal que, a solução do sistema de equações acima será correspondente a diferença nula entre x_1 e x_2 ($x_1 = x_2$). Graficamente essa solução teria o formato apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Retas x_1 e x_2 - Domínio 2, Subdomínio 2a, Concreto Grupo I



Fonte: Autores.

3.4 *Proposta de Simplificação do Processo para Cálculo de Armadura Simples ($k_x \leq k_{x,lim}$)*

O estudo propõe uma forma simplificada para o cálculo de x, buscando uma linearização do gráfico M_dxA_s. Esta proposta está embasada no estudo de erros ao comparar com a função M_dxA_s obtida a partir das planilhas de cálculo. A interpolação linear é apresentada na Expressão (56):

$$A_s = \frac{(A_{s,sup} - A_{s,inf}).(M_d - M_{d,inf})}{(M_{d,sup} - M_{d,inf})} + A_{s,inf} \quad (56)$$

Onde M_d é o valor do momento desejado e os pares $(A_{s,sup}; M_{d,sup})$ e $(A_{s,inf}; M_{d,inf})$ são valores conhecidos no intervalo de interpolação.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

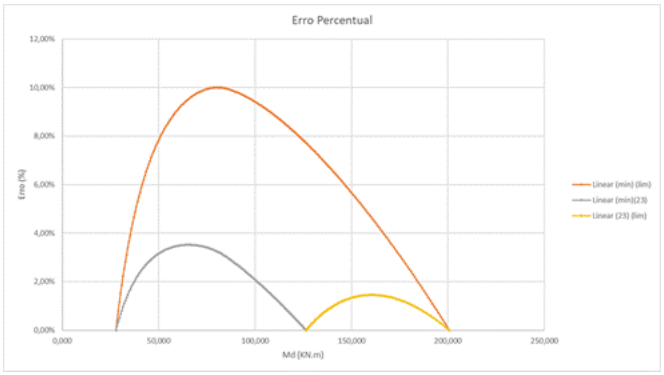
Para um exemplo assumindo os seguintes valores:

$$\begin{cases} bw = 20\ cm \\ h = 50\ cm \\ d = 40\ cm \\ f_{ck} = 35\ MPa \\ f_{yk} = 500\ MPa \end{cases}$$

Tem-se o seguinte comparativo de erros no que diz respeito ao cálculo de armadura longitudinal de tração, utilizando como limites inferiores e superiores para a interpolação:

a) Momento Mínimo e Momento Limite;
b) Momento Mínimo e Momento na Fronteira 23;
c) Momento na Fronteira 23 e Momento Limite.

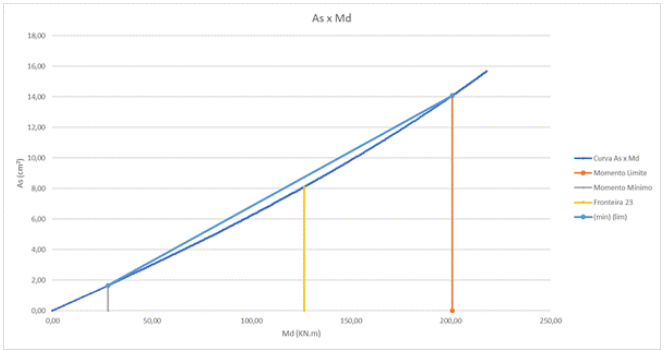
Figura 7 – Gráficos de Erros com Diferentes Interpolações



Fonte: Autores.

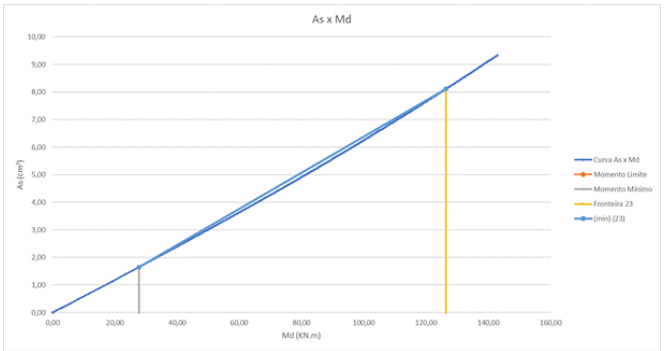
Analisando o gráfico M_dxA_s, nota-se que a curva tem sua concavidade voltada para cima, e que quando faz-se a interpolação linear, a reta entre os dois pontos passa acima da curva original, desta forma já podíamos assumir, antes mesmo de analisar o gráfica de erros, que todas as armaduras calculadas pela interpolação teria um valor acima do valor real, gerando um erro positivo.

Figura 8 – Gráficos M_dxA_s no Intervalo ($M_{d,min}$) ($M_{d,lim}$)



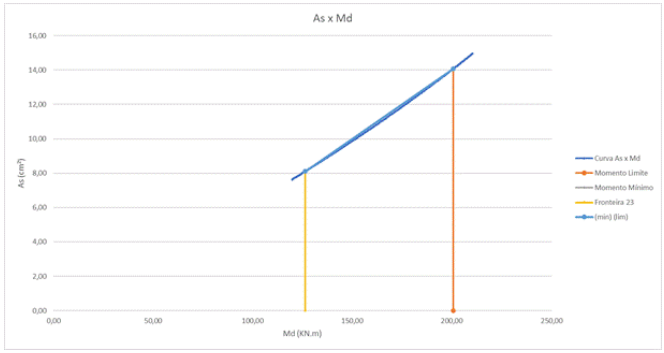
Fonte: Autores.

Figura 9 – Gráficos M_dxA_s no Intervalo ($M_{d,min}$) ($M_{d,23}$)



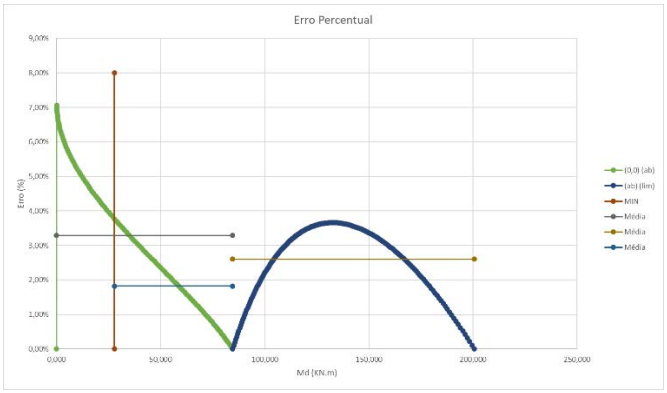
Fonte: Autores.

Figura 10 – Gráficos M_dxA_s no Intervalo ($M_{d,23}$) ($M_{d,lim}$)



Fonte: Autores.

Figura 11 – Gráfico de Erros Percentuais para Interpolações Propostas



Fonte: Autores.

Portanto, chega-se à conclusão de que o modelo proposto pode ser empregado sem perca de confiabilidade nos resultados, sabendo que existem pequenas diferenças, que estão a favor da segurança, sem comprometer a viabilidade econômica da peça em termos de taxa de armadura.

4.1 *Intervalos Propostos para a Interpolação*

Considerando que o menor momento fletor correspondente à tensão máxima do concreto ($\sigma_{cd,inf} = \alpha_c . f_{cd} . k_2$) com $k_2 = 1$ é o momento calculado na Fronteira 2a-2b ($M_{d,ab}$), este será um dos momentos de referência do processo para interpolação. O trabalho propõe uma simplificação para o cálculo de armadura simples, o que define o momento na fronteira limite (para armadura simples) ($M_{d,lim}$) como sendo outra referência do processo.

Portanto, foram usados três pares (M_d, A_s) bases para as interpolações escolhidas, sendo estes: (0, 0); ($M_{d,ab}$, $A_{s,ab}$); ($M_{d,lim}$, $A_{s,lim}$). Para um exemplo qualquer, sem perda de generalidade:

$$\begin{cases} bw = 20\ cm \\ h = 50\ cm \\ d = 40\ cm \\ f_{ck} = 35\ MPa \\ f_{yk} = 500\ MPa \end{cases}$$

Fazendo o estudo dos erros percentuais do método proposto em comparação com o cálculo preciso da armadura, é possível notar, mais uma vez, que os erros percentuais são todos positivos, pelo mesmo motivo discutido anteriormente, onde a curva da interpolação está acima da curva original do cálculo da armadura.

Analisando o gráfico, os erros para o exemplo proposto, mas sem grandes variações para outros valores, são relativamente pequenos, não ultrapassando 3% para o Momento Mínimo. Sendo que valores inferiores ao Momento Mínimo assumirão os valores para Armadura Mínima, portanto erros anteriores a este podem ser desprezados.

5 CONCLUSÕES

O trabalho produziu uma revisão bibliográfica bastante didática, o que auxiliará o aprendizado do tema.

Um dos produtos deste trabalho é uma planilha que calcula a armadura de tração na flexão (armadura simples), através da interpolação de valores em uma tabela que apresenta resultados do trinômio $x - M_d - A_s$, além de facilitar ao usuário acompanhar como se modificam os diversos parâmetros envolvidos no cálculo de armadura de tração na flexão, a partir da variação do momento fletor.

Os estudos apontaram um recorte para o escopo de cálculo de Armadura Simples, em que foram propostos segmentos de retas no lugar da função real (curva com formato exponencial) $f(M_d) = A_s$ como sugestões de simplificação do cálculo.

Estudaram-se os erros das linearizações da função $f(M_d) = A_s$ nos intervalos ($M_{d,min}$) ($M_{d,lim}$), ($M_{d,min}$) ($M_{d,23}$) e ($M_{d,23}$) ($M_{d,lim}$) e as avaliações

conduziram a erros positivos (a favor da segurança), porém pequenos em percentagem, o que possivelmente no detalhamento final, será o mesmo.

O estudo das propostas de simplificação dos cálculos evoluiu para dois intervalos: (0) ($M_{d,ab}$) e ($M_{d,ab}$) ($M_{d,lim}$). Verificou-se um erro razoável, no primeiro intervalo de interpolação, para momentos inferiores ao momento mínimo, contudo, como não se detalha armadura inferior à mínima recomendada, notou-se que a partir do momento mínimo, o erro é pequeno.

Uma segunda planilha foi produzida, a partir dos desdobramentos dos estudos dos limites para se definirem os intervalos de linearização da função $f(M_d) = A_s$, de modo que se concluiu para uma simplificação em que basta que o usuário determine dois pares (M_d, A_s), na Fronteira 2a-2b e na Fronteira Limite (para Armadura Simples) e, com o momento fletor de cálculo, uma interpolação simples é feita adotando-se os limites inferior e superior do intervalo, a saber: primeiro intervalo (entre 0 e $M_{d,ab}$); segundo intervalo (entre $M_{d,ab}$ e $M_{d,lim}$). Importante salientar que se o usuário entrar com um momento inferior ao momento mínimo, a interpolação é feita para o momento mínimo definido pelas recomendações normativas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J.M. **Curso de concreto armado.** v.2, . ed., Rio Grande: Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2014.

BASTOS, P.S.S. **Flexão Normal Simples – Vigas.** E-book acessado em **wwwp.feb.unesp.br/pbastos;** Bauru-SP, 2019

CARVALHO, R.C.; FILHO, J.R.F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2004.** 3. ed., São Carlos: EdUFSCar, 2014. 368 p.

PRAXEDES, C. C. V.; JORGE, G. E.; CHAER, A. V. **Dimensionamento de seções retangulares submetidas a flexão pura.** TCC-2. PUC Goiás. Escola de Engenharia. Engenharia Civil. Goiânia-GO, 2015.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Concreto. Vol. I**. Editora Globo, Rio de Janeiro, 1985.

7 APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Espelho Planilha de Cálculo de Armadura de Tração Submetidas a Flexão Pura

GEOMETRIA

bw	20	cm
h	50	cm
d	40	cm
αb	1	

CONCRETO

Classe	C35	
fck	35	M Pa
γc	1,400	
fcd	25,000	M Pa
εc2 (‰)	2,000	
εcu (‰)	3,500	
αc	0,850	
n	2,000	
λ	0,800	
ρ_ef	0,000	%
kx_lim	0,450	
εs_lim (‰)	4,278	

kx=[εc/(εc+εs)]
x=kx.d
σcd=αb*αc*fcd*k2
y=λ.x
z=d-(y/2)
Rcd=σcd.(bw.y)
Md=Rcd.z
As=Md/(fsd.z)

AÇO

Categoria	CA-50	
fyk	500	M Pa
γs	1,15	
fyd	434,78	M Pa
Es	210	G Pa
εyd(‰)	2,070	

fctm=	3,210	MPa
fctk,sup=	4,173	MPa
W0=	0,00833333	m³
Md,min'=	27,820	KN.m
As,min'=	1,61	cm²
ρ_cal %=	0,161%	
ρ_mín %=	0,150%	
ρ_ef %=	0,161%	
As,min_corr=	1,61	cm²

REFERÊNCIAS (Md)

Md_mín	27,820	kN.m
Md_lim	200,736	kN.m
Md_máx	284,277	kN.m
Md_F4	326,400	kN.m

As_mín	1,61	cm²
As_lim	14,08	cm²
As_máx	40,00	cm²

SOLICITAÇÃO (Md)

	Digite Md	
Md	40,060	kN.m
As_cal	2,40	cm²
As_e	2,40	cm²

linha	Def	εc (‰)	εs (‰)	kx	x (cm)	k2	σcd (kN/cm²)	y (cm)	z (cm)	Rcd (kN)	Md (kN.m)	fsd (kN/cm²)	As_cal (cm²)	As_e (cm²)	Def	linha
111	2a2b	2,000	10,000	0,167	6,667	1,000	2,125	5,333	37,333	226,67	84,622	43,478	5,21	5,21	2a2b	111
211	23	3,500	10,000	0,259	10,370	1,000	2,125	8,296	35,852	352,59	126,411	43,478	8,11	8,11	23	211
311	εs_lim	3,500	4,278	0,450	18,000	1,000	2,125	14,400	32,800	612,00	200,736	43,478	14,08	14,08	εs_lim	311
411	34	3,500	2,070	0,628	25,133	1,000	2,125	20,106	29,947	854,52	255,901	43,478	19,65	19,65	34	411
511	F4	3,500	0,000	1,000	40,000	1,000	2,125	32,000	24,000	1360,00	326,400	0,000	infinito	infinito	F4	511
-	33,33%	0,667	10,000	0,062	2,500	0,556	1,180	2,000	39,000	47,21	18,414	43,478	1,09	1,61	33,33%	-
	% εc2														% εc2	

Momento de Cálculo

linha	Def	εc (‰)	εs (‰)	kx	x (cm)	k2	σcd (kN/cm²)	y (cm)	z (cm)	Rcd (kN)	Md (kN.m)	fsd (kN/cm²)	As (cm²)	Def	linha
60	2a	1,073	10,000	0,097	3,875	0,785	1,668	3,100	38,450	103,435	39,771	43,478	2,379	2a	60
		1,078	10,000	0,097	3,892	0,787	1,673	3,114	38,443	104,206	40,060	43,478	2,397		
61	2a	1,091	10,000	0,098	3,934	0,793	1,686	3,148	38,426	106,132	40,783	43,478	2,441	2a	61

APÊNDICE 2 – Espelho Planilha de Simplificada de Cálculo por Interpolação nos Intervalos (entre 0 e $M_{d,ab}$) e (entre $M_{d,ab}$ e $M_{d,lim}$)

	Concreto	f_{ck} [MPa]	f_{cd} [kN/cm²]	α_c	λ	εc2 ‰	k_{x_ab}	k_{z_ab}	c_{ab}	M_{d_ab} [kN.m]	A_{s_ab}	k_{x_lim}	k_{z_lim}	c_{lim}	M_{d_lim} [kN.m]	A_{s_lim}
GRUPO I	C20	20	1,429	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,151 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,358 . b_w . d^2 /100	1,220
	C25	25	1,786	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,189 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,448 . b_w . d^2 /100	1,220
	C30	30	2,143	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,227 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,538 . b_w . d^2 /100	1,220
	C35	35	2,500	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,264 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,627 . b_w . d^2 /100	1,220
	C40	40	2,857	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,302 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,717 . b_w . d^2 /100	1,220
	C45	45	3,214	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,340 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,807 . b_w . d^2 /100	1,220
	C50	50	3,571	0,85	0,80	2,00	0,167	0,933	0,106	0,378 . b_w . d^2 /100	1,071	0,45	0,820	0,251	0,896 . b_w . d^2 /100	1,220
GRUPO II	C55	55	3,929	0,83	0,79	2,20	0,180	0,929	0,109	0,429 . b_w . d^2 /100	1,076	0,35	0,862	0,197	0,774 . b_w . d^2 /100	1,160
	C60	60	4,286	0,81	0,78	2,29	0,186	0,928	0,108	0,463 . b_w . d^2 /100	1,078	0,35	0,864	0,189	0,811 . b_w . d^2 /100	1,157
	C65	65	4,643	0,79	0,76	2,36	0,191	0,927	0,106	0,492 . b_w . d^2 /100	1,078	0,35	0,867	0,182	0,844 . b_w . d^2 /100	1,154
	C70	70	5,000	0,77	0,75	2,42	0,195	0,927	0,103	0,517 . b_w . d^2 /100	1,079	0,35	0,869	0,174	0,872 . b_w . d^2 /100	1,151
	C75	75	5,357	0,74	0,74	2,47	0,198	0,927	0,101	0,539 . b_w . d^2 /100	1,079	0,35	0,871	0,167	0,896 . b_w . d^2 /100	1,148
	C80	80	5,714	0,72	0,73	2,52	0,201	0,927	0,098	0,558 . b_w . d^2 /100	1,079	0,35	0,873	0,160	0,915 . b_w . d^2 /100	1,145
	C85	85	6,071	0,70	0,71	2,56	0,204	0,927	0,094	0,573 . b_w . d^2 /100	1,078	0,35	0,875	0,153	0,929 . b_w . d^2 /100	1,142
	C90	90	6,429	0,68	0,70	2,60	0,206	0,928	0,091	0,586 . b_w . d^2 /100	1,078	0,35	0,878	0,146	0,940 . b_w . d^2 /100	1,140

$$\frac{100.M_{d_ab}}{f_{yd}.d} \qquad \frac{100.M_{d_lim}}{f_{yd}.d}$$

γ_c =	1,4				
bw =	20	cm			
h =	50	cm			
d =	40	cm			

Categoria	CA-50
fyk	500
γs	1,15
fyd	43,48

Md	100
Classe	C65
fck	65

$$A_s = \frac{(A_{s,sup} - A_{s,inf}).(M_d - M_{d,inf})}{(M_{d,sup} - M_{d,inf})} + A_{s,inf}$$

	Concreto	M_{d_min} [kN.m]	M_{d_ab} [kN.m]	A_{s_ab} [cm²]	M_{d_lim} [kN.m]	A_{s_lim} [cm²]	A_{s_cal} [cm²] (0,0) (ab)	A_{s_cal} [cm²] (ab) (lim)	A_{s_min} [cm²]	A_{s_e} [cm²]
GRUPO I	C20	19,157	48,356	2,98	114,706	8,04	-	6,92	1,50	6,92
	C25	22,230	60,444	3,72	143,383	10,05	-	6,74	1,50	6,74
	C30	25,103	72,533	4,47	172,059	12,07	-	6,57	1,55	6,57
	C35	27,820	84,622	5,21	200,736	14,08	-	6,39	1,71	6,39
	C40	30,410	96,711	5,96	229,413	16,09	-	6,21	1,87	6,21
	C45	32,894	108,800	6,70	258,089	18,10	6,16	-	2,03	6,16
	C50	35,287	120,889	7,45	286,766	20,11	6,16	-	2,17	6,16
GRUPO II	C55	35,884	137,422	8,51	247,587	16,51	6,19	-	2,22	6,19
	C60	37,264	148,276	9,19	259,650	17,27	6,20	-	2,31	6,20
	C65	38,548	157,544	9,77	270,149	17,93	6,20	-	2,39	6,20
	C70	39,747	165,590	10,27	279,129	18,47	6,20	-	2,47	6,20
	C75	40,874	172,550	10,70	286,634	18,92	6,20	-	2,54	6,20
	C80	41,935	178,492	11,07	292,706	19,28	6,20	-	2,60	6,20
	C85	42,938	183,461	11,37	297,392	19,54	6,20	-	2,66	6,20
	C90	43,890	187,490	11,62	300,737	19,71	6,20	-	2,72	6,20