PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRANSFORMADA DE LAPLACE NO CÁLCULO DE SOLUÇÕES PARTICULARES EM EDO'S LINEARES

DANIEL FERNANDO MEDEIROS SOARES

GOIÂNIA
2020

DANIEL FERNANDO MEDEIROS SOARES

TRANSFORMADA DE LAPLACE NO CÁLCULO DE SOLUÇÕES PARTICULARES EM EDO'S LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ovídio Candido de Oliveira Filho

GOIÂNIA
2020

DANIEL FERNANDO MEDEIROS SOARES

TRANSFORMADA DE LAPLACE NO CÁLCULO DE SOLUÇÕES PARTICULARES EM EDO'S LINEARES

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em ___/___/_____.

Profa. Ma. Ludmilla Reis Pinheiro dos Santos
Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ovídio Candido de Oliveira Filho
PUC-GO

Prof. Dr. Adelino Candido Pimenta
PUC-GO/IFG

Prof. Dr. Cristian Patricio Novoa Bustos
PUC-GO

GOIÂNIA
2020

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em infinita sabedoria criou coisas tão belas como as estudadas neste trabalho, não apenas para uso prático, mas também para serem apreciadas por sua transcendental beleza.

À minha família que ao longo de toda a minha vida tem sido um suporte inestimável em todos os aspectos possíveis.

Ao Professor Ovídio Cândido, orientador acadêmico, que com boa atenção e cuidado me guiou na elaboração deste trabalho.

Aos professores que me acompanharam no trilhar da floresta do conhecimento ao longo de todos os meus anos de curso, em particular, os professores Adelino Pimenta, Antônio de Moura, Bianka Leandro, Cristian Patrício, Nelson Junior, Vanda Vieira e Waldir Guimarães, que me ensinaram não apenas o conteúdo da ementa de suas disciplinas, mas acima de tudo, me ensinaram através de seus exemplos o que é ser professor.

À Coordenação da Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, por toda a ajuda ao longo dos anos.

Aos meus incontáveis amigos e colegas de turma, que me ajudaram nos momentos de dificuldade e me que acompanharam em celebração nos momentos de alegria.

RESUMO

Apresenta-se um material referente à Transformada de Laplace, com o objetivo de ser utilizado na disciplina de Equações Diferenciais na Pontifícia Universidade Católica de Goiás como material de aula para o professor e como material de apoio para os alunos. Inicialmente é apresentada história de vida do físico, matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace assim como o contexto histórico no qual a Transformada de Laplace foi desenvolvida. Em sequência, é feita uma breve revisão de conteúdos importantes ao estudo da Transformada de Laplace, é apresentada a transformada em si, sua definição, as propriedades de linearidade, condições suficientes para existência da Transformada de Laplace, as Transformadas de Laplace de derivadas e integrais e a apresentação da Transformada de Laplace inversa. Por fim, apresenta-se duas aplicações da Transformada de Laplace em Equações Diferenciais: Os circuitos Resistor-Indutor-Capacitor e o sistema Massa-Mola. O conteúdo foi construído através de cuidadosa análise bibliográfica, buscando na medida do possível adaptar o material a uma linguagem mais acessível que outros materiais de mesmo tema.

Palavras chaves: Laplace. Transformada de Laplace. Equações Diferenciais Ordinárias.

ABSTRACT

A material is presented in regards of the Laplace Transform, with the objective of being used in Differential Equations classes at the Pontifical Catholic University of Goiás as class material for the professor, or as support material for the students. First, the life history of the french physicist, mathematician and astronomer Pierre-Simon Laplace is presented as well as the historical context of which the Laplace Transform was developed. In sequence, a brief review of a few topics important to the study of the Laplace Transform is made, the transform itself is presented, it's definition, linearity property, sufficient conditions to the existence of the Laplace Transform, the Laplace Transfom of derivatives and integrals and the inverse Laplace Transform. At last, it is presented two applications of the Laplace Transform in Differential Equations: The circuits Resistor-Inductor-Capacitor and the Mass-Spring system. The content was build throught careful bibliographical analysis, and trying to, in every opportunity, to adapt the material to a more accessible language in comparison to other materials in the same theme.

Keywords: Laplace. Laplace Transform. Ordinary Differential Equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Equações Diferenciais é uma das disciplinas que faz parte do currículo para os cursos de matemática, física e para as engenharias. Dentro desse contexto, a Transformada de Laplace é uma ferramenta importantíssima na solução de equações diferenciais lineares.

Já existe um forte material na literatura sobre este tema, com livros bem difundidos e respeitados, porém, no contexto de sala de aula da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, o material presente nos principais livros de Equações Diferencias, deixa o aluno geralmente perdido, especialmente se tratando da Transformada de Laplace, que é desenvolvida na disciplina em um curto período de tempo.

Muitas vezes, a literatura a respeito da Transformada de Laplace apresenta uma linguagem inacessível a alguns leitores, como por exemplo naquilo que diz respeito aos números complexos, uma vez que na graduação poucos cursos tem acesso à disciplina de Funções de Variáveis Complexas.

Diante de tais pontos, este trabalho apresenta um breve recorte do conteúdo referente à Transformada de Laplace, buscando na medida do possível apresentar de forma mais clara o conteúdo estudado, facilitando assim para o leitor. Esse recorte também se faz útil ao professor, que pode buscar neste trabalho uma nova ferramenta a ser usada em sala de aula, desenvolvida sob medida para este fim.

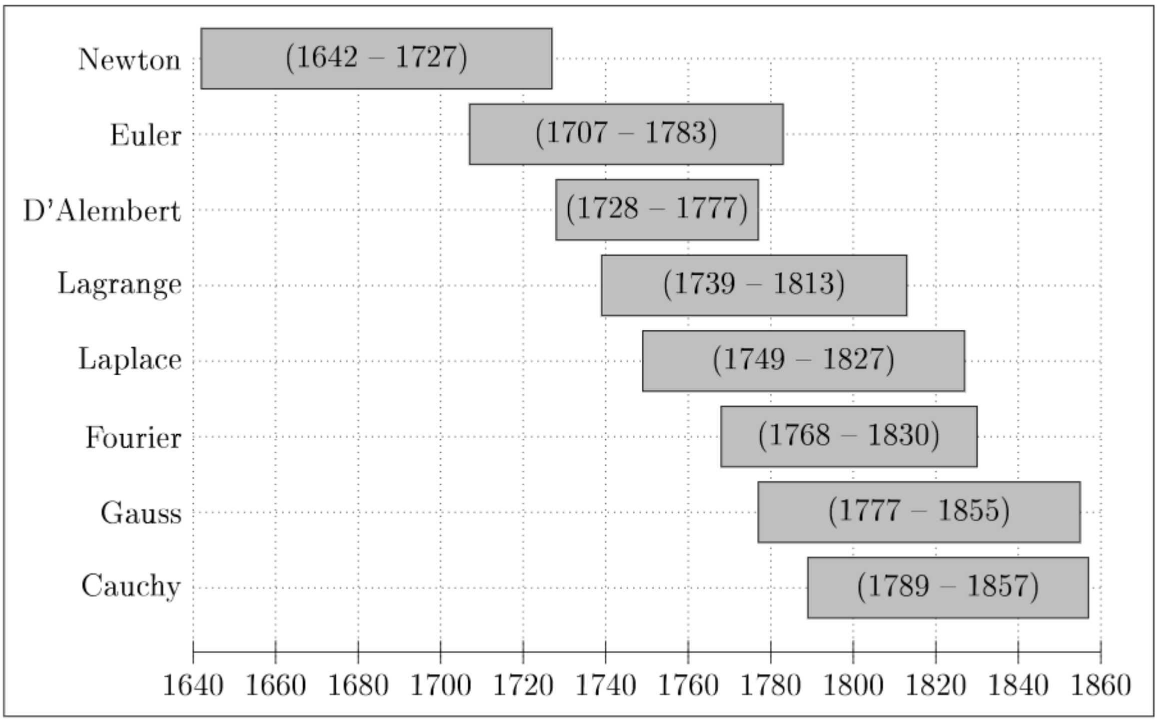
O trabalho possui três divisões, sendo a primeira referente à história de Pierre-Simon Laplace, com um breve comentário a respeito da história da Transformada de Laplace, a segunda referente à Transformada de Laplace em si com suas principais propriedades e por fim, a terceira divisão busca tratar duas das principais aplicações da Transformada de Laplace desenvolvidas na disciplina de Equações Diferencias, circuitos elétricos e sistema massa-mola. O objetivo proposto foi devidamente tratado.

O trabalho foi escrito utilizando a ferramenta Latex (nome normalmente estilizado como $\LaTeX$). Todas as figuras e gráficos, com exceção da figura 2.2, foram feitas utilizando a biblioteca TikZ. Toda a formatação explorou as ferramentas disponíveis no Latex, adaptando para a formatação ABNT.

2 PIERRE-SIMON LAPLACE

Nascido em 23 de março de 1749 em uma família de agricultores na cidade de Beaumont-en-Auge na região da Normandia, na França, filho de Pierre Laplace e Marie-Anne Sochon, Laplace foi um grande matemático, físico e astrônomo do século XVIII.

Figura 2.1: Contexto Histórico de Laplace



Fonte: Próprio autor.

Não se pode afirmar muito a respeito dos anos iniciais da vida de Laplace, entre outras razões se inclui o fato de que Laplace não tinha o hábito de colocar em alta estima as histórias de sua infância. Visível em características de sua personalidade, pode-se dizer que Laplace era egoísta, não dando muito crédito àqueles que lhe ajudaram ao longo de sua vida.

Durante sua infância e adolescência Laplace estudou na escola de priorado Beneditino em sua cidade natal. A escola onde Laplace estudou era usualmente um ponto de partida para aqueles que viriam a se tornar ministros da igreja ou funcionários do exército e seguindo o desejo de seu pai, Laplace iniciou os estudos em teologia, porém ao entrar em contato com a matemática na Universidade de Caen e com o incentivo de seus professores, Laplace percebeu uma mudança em sua vocação, deixando assim seus estudos em teologia.

Aos 19 anos, com uma carta de recomendação de seu professor Le Canu, Laplace mudou para Paris, onde conheceu d'Alembert. Com a ajuda de d'Alembert, Laplace começou a trabalhar na *École Militaire* (Escola Militar de Paris).

Figura 2.2: Pierre-Simon Laplace

Fonte: (O'CONNOR; ROBERTSON, 2020).

Laplace apresentou seu primeiro artigo em matemática à *Académie des Sciences* (Academia de Ciências) em Paris em 28 de março de 1770, com o título *Sur les maxima et minima des lignes courbes* (Nos máximo e mínimo de curvas), trabalhando baseado nos métodos de Lagrange. Em 18 de julho de 1770 Laplace apresentou seu segundo trabalho, desta vez em Equações Diferenciais.

Com suas publicações em 1771, temos também a primeira tentativa de Laplace de entrar na *Académie des Sciences*, mas as inteções de Laplace foram frustradas, uma vez que o posto foi preenchido com o matemático Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796). Laplace também não foi aceito em 1772, mas conseguiu em 1773.

Durante a década de 1770, Laplace cresceu muito na consideração de seus companheiros, produzindo diversos trabalhos. Na década de 1780 Laplace já era muito respeitado na academia francesa, tendo inclusive trabalhado com Antonie Lavoisier (1743 – 1794). Perceptivelmente sua modéstia era afetada por suas habilidades, sendo esta inversamente proporcional àquela.

Em 1782, com suas habilidades em probabilidade, temos um trabalho fora da academia em comparações de mortes em hospitais da França, nos comitês investigativos. Em 1784 Laplace passou a trabalhar na Corporação Real de Artilharia.

Laplace casou-se aos 39 anos em 15 de maio de 1788 com Marie-Charlotte de Courty de Romanges. Tiveram um casal de filhos, Charles-Émile e Sophie-Suzanne.

Em maio de 1790 Laplace passou a fazer parte do comitê responsável pela padronização de sistemas de pesos e medidas, trabalhando no sistema de medidas.

Em 1793, pelo contexto do Período do Terror, Laplace se mudou com sua família para fora de Paris, fugindo das tensões políticas que afetava também os cientistas (como Lavoisier, que foi guilhotinado em maio de 1794).

Em Julho de 1794 Laplace retornou para Paris e em 1795 Laplace voltou a fazer parte da reaberta *Académie des Sciences* (agora nomeada *Institut National des Sciences et* *des Arts* – Instituto Nacional de Artes e de Ciências). Laplace então começou a trabalhar no Observatório de Paris. Em 1796 temos o trabalho de Laplace referente ao surgimento do sistema solar, *Exposition du systeme du monde*, precedendo sua obra *Traité de Mécanique Céleste* (Tratado da Mecânica Celeste), onde temos o surgimento dos trabalhos de Laplace em sua transformada.

Em seus cargos políticos, Laplace atuou no senado durante o governo de Napoleão, foi Conde do Império em 1806 e Marquês em 1817 após o retorno dos Bourbons.

Em 1812 Laplace publicou *Théorie Analytique des Probabilités*. Ao longo de sua vida Laplace fez diversos trabalhos influentes na física, astronomia e estatística, tendo assim o seu nome imortalizado na ciência.

Pierre Simon Laplace veio a falecer na manhã de segunda-feira, 5 de março de 1827, poucos dias antes de seu aniversário de 78 anos, em Paris.

As transformadas integrais são estudadas desde Leonhard Euler (1707 – 1783), que já as utilizava para resolver equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. O próprio Laplace atribuía o desenvolvimento das transformadas integrais a Euler. Apesar do nome, Euler já trabalhava com a transformada que viria a ser chamada Transformada de Laplace, sendo Simon Spitzer (1826 – 1887) responsável por essa nomenclatura.

Ao longo dos anos grandes nomes da matemática e da física contribuíram para o desenvolvimento da Transformada Laplace, dois nomes de considerável destaque são Poincaré (1854 – 1912) e Abel (1802 – 1829).

Um grande contribuinte ao desenvolvimento da Transformada de Laplace foi Oliver Heaviside (1850 – 1925), que apesar de não desenvolver um trabalho matematicamente rigoroso, desenvolveu técnicas de grande importância à engenharia elétrica.

3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1 Revisando Conceitos

Em preparação para a Transformada de Laplace, faz-se necessário recordar alguns conceitos e definições importantes.

O conceito de linearidade é estudado na disciplina de Álgebra Linear, presente no contexto das transformações lineares, $T : V \to W$, onde V, W são k-espaços vetoriais (NOVOA, 2006).

Uma transformação linear tem como propriedades:

1. Aditividade. Ex: $T(v+u) = T(v) + T(u)$
2. Homogeneidade. Ex: $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Essas duas características podem ser denotadas de forma unificada:

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u) \tag{3.1}$$

De forma semelhante, é possível observar a linearidade de funções da seguinte forma:

Definição 3.1.

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

A propriedade da linearidade não se restringe à noção básica de função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo também aplicada, por exemplo na derivada e na integral (que são transformações lineares):

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x) \tag{3.2}$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \tag{3.3}$$

Nota-se também que 3.3 também é válida para integrais definidas:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \tag{3.4}$$

Uma integral imprópria é o limite de uma integral definida, para fins deste trabalho, a integral imprópria de maior destaque é a integral

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{3.5}$$

Esta integral é muitas vezes escrita como

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{3.6}$$

e este é o formato que será preferencialmente adotado ao longo deste trabalho.

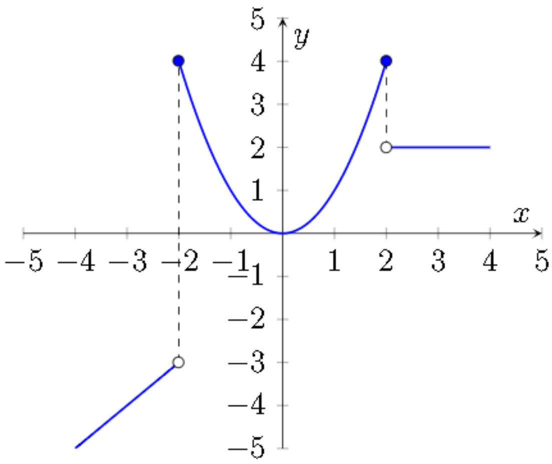
Mais uma definição importante é a de funções contínuas por partes.

Definição 3.2. *Uma função é contínua por partes se existe no intervalo* $0 \leq a \leq t \leq b$ *um número finito de descontinuidades e todas as descontinuidades possuem limites laterais.*

Um exemplo de função contínua por partes é a função

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases} \tag{3.7}$$

Figura 3.1: Exemplo de função contínua por partes



Fonte: Próprio autor.

Avaliemos agora a integração de 3.7 no intervalo $[-5, 5]$.

Exemplo 3.1 ($\int_{-5}^5 f(x)dx$)**.** *Como esta função possui um número finito de descontinuidades bem definidas e com limites laterais, podemos separá-la em três integrais, assim teremos:*

$$\int_{-5}^5 f(x)dx = \int_{-5}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^{-5} f(x)dx$$

Substituindo agora $f(x)$

$$\int_{-5}^5 f(x)dx = \int_{-5}^{-2} x - 1dx + \int_{-2}^2 x^2dx + \int_2^5 2dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{x=-5}^{x=-2} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-2}^{x=2} + [2x]_{x=2}^{x=5}$$

$$= \left[\frac{(-2)^2}{2} + (-2) - \frac{(-5)^2}{2} - (-5)\right] + \left[\frac{(2)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] + [2(5) - 2(2)]$$

$$= \left(\frac{4}{2} - 2 - \frac{25}{2} + 5\right) + \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) + (10 - 4) = \frac{26}{2} u.a.$$

3.2 Transformada de Laplace

As integrais do tipo

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)dt \tag{3.8}$$

onde $f(t)$ é definida para $t \geq 0$, são utilizadas em diferentes contextos na matemática e caracterizam as chamadas Transformadas Integrais. Para o caso $K(s,t) = e^{-st}$ (onde s é uma constante complexa) temos a chamada Transformada de Laplace. Denotamos a Transformada de Laplace de uma função $f(x)$ como $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$ (por convenção utiliza-se letra minúsculas para funções e letras maiúsculas para as transformadas).

Definição 3.3 (Transformada de Laplace).

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt$$

Herdando de sua definição por uma integral, a Transformada de Laplace possui a característica da linearidade

Teorema 3.1 (Linearidade da transformada de Laplace).

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f(x) + \beta g(x)\right\} = \alpha\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} + \beta\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}$$

Demonstração. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções que possuem transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f(x) + \beta g(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(x) + \beta g(x))dt$$

Fazendo a distributiva dentro da integral temos

$$\int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(x) + \beta g(x))dt = \int_0^\infty e^{-st}\alpha f(x) + e^{-st}\beta g(x)dt$$

Utilizando a linearidade da integral para soma e depois para o produto

$$\int_0^\infty \alpha e^{-st}f(x)+\beta e^{-st}g(x)dt = \int_0^\infty \alpha e^{-st}f(x)dt + \int_0^\infty \beta e^{-st}g(x)dt$$

$$= \alpha\int_0^\infty e^{-st}f(x)dt + \beta\int_0^\infty e^{-st}g(x)dt$$

Logo,

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f(x)+\beta g(x)\right\} = \alpha\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} + \beta\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}$$

$\square$

Observe o exemplo para a função constante $f(x) = 1$:

Exemplo 3.2 ($\mathcal{L}\left\{f(t)\right\},\ f(t) = 1$).

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

Avaliando:

$$\int e^{-st}dt$$

Por substituição, seja $u = -st \Rightarrow du = -sdt \Leftrightarrow \dfrac{-du}{s} = dt$

Logo,

$$\int e^{-st}dt = \int e^{u}\cdot\frac{-du}{s} = \frac{-1}{s}\int e^{u}du = \frac{-e^{u}}{s} = \frac{-e^{-st}}{s}$$

Assim,

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_{t-0}^{t-\tau}\right) = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{-e^{-s\tau}}{s}+\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

Portanto

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}$$

3.3 Condições Suficientes para a Existência da Transformada de Laplace

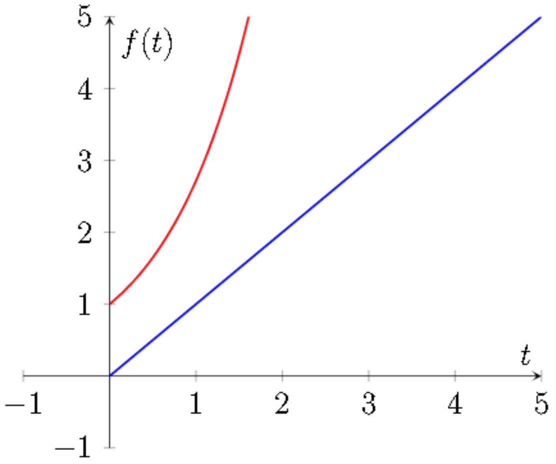
Como a Transformada de Laplace é definida é uma integral, a primeira condição para sua existência é a convergência dessa integral.

Primeiramente é necessária a função f seja contínua por partes (definição 3.2), outra condição para a suficiência da existência da Transformada de Laplace é que f seja de ordem exponencial para $t > T$.

Definição 3.4. *Uma função é de ordem exponencial se existem números* c, $M > 0$ *e* $T > 0$ *tais que* $\left|f(t)\right| \leq Me^{ct}$ *para todo* $t > T$.

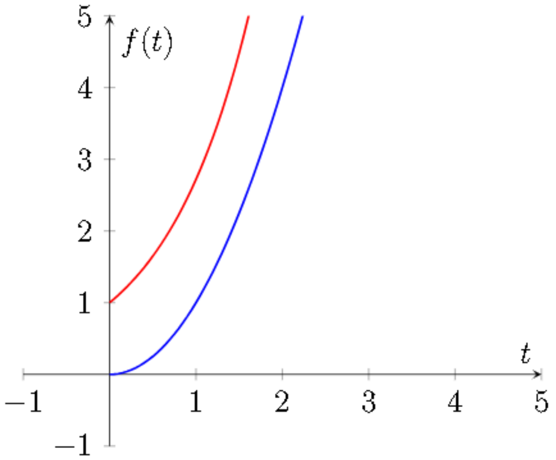
Em outras palavras, se por exemplo $f(t)$ for uma função crescente, então o gráfico de $f(t)$ no intervalo (T, ∞) não cresce mais rápido que a função exponencial Me^{ct}, onde c é uma constante positiva.

Figura 3.2: Exemplo de função de ordem exponencial.
$f(t) = e^t$ (em vermelho) e $f(t) = t$ (em azul).



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.3: Exemplo de função de ordem exponencial.
$f(t) = e^t$ (em vermelho) e $f(t) = t^2$ (em azul).



Fonte: Próprio autor.

Teorema 3.2. *Seja f(t) uma função contínua por partes num intervalo* $[0, \infty)$ *(definição 3.2) e de ordem exponencial para* $t > T$ *(definição 3.4), então sua transformada de Laplace existe para todos* $s > c$.

Demonstração.

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt = I_1 + I_2$$

Devemos agora determinar a existência de I_1 e I_2. Como I_1 pode ser escrita como a soma de integrais em intervalos onde $e^{-st}f(t)$ é contínua, sabemos que I_1 existe, resta portanto determinar a existência de I_2.

$$|I_2| = \left|\int_T^{\infty} e^{-st}f(t)dt\right| \leq \int_T^{\infty} \left|e^{-st}f(t)\right| dt$$

Conforme a definição 3.4,

$$\int_T^{\infty} \left|e^{-st}f(t)\right| dt \leq M \int_T^{\infty} e^{-st}e^{ct}dt$$

Reorganizando o lado direito da desigualdade e resolvendo a integral temos,

$$M \int_T^{\infty} e^{-st}e^{ct}dt = M \int_T^{\infty} e^{-st+ct}dt = M \int_T^{\infty} e^{-(s-c)t}dt \tag{3.9}$$

Avaliando a integral $\int e^{-(s-c)t}dt$, fazendo a substituição de $u = (s-c)t \Rightarrow \frac{du}{dt} = (s-c)$ (lembrando que s e c são constantes, logo $s-c$ também é constante), assim $dt = \dfrac{du}{(s-c)}$.

$$\int e^{-(s-c)t}dt \Rightarrow \int e^{-u}\frac{du}{s-c}$$

Como $s-c$ é uma constante podemos escrever

$$\frac{1}{s-c}\int e^{-u}dt = -\frac{e^{-u}}{s-c}$$

Substituindo de volta $u = (s-c)t$ temos,

$$\int e^{-(s-c)t}dt = -\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \tag{3.10}$$

Utilizando 3.10 em 3.9 temos

$$\int_T^{\infty} e^{-(s-c)t}dt = -M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\bigg|_{t-T}^{t-\infty} = -M\left[\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right) - \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}\right]$$

$$= -M\left[\cancelto{0}{\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right)} - \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}\right] = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}, \text{ para } s > c.$$

Assim, I_2 converge para todo $s > c$, portanto a transformada de Laplace existe para todo $s > c$. $\square$

Note que as condições do teorema 3.2, apesar de serem suficientes, não são necessárias para a existência da transformada de Laplace, isto é, toda função que está de acordo com o teorema 3.2 possui transformada, mas nem toda função que possui transformada está de acordo com o teorema 3.2.

Exemplo 3.3. *Verifique a existência da transformada de Laplace para a função* $f(t) = \operatorname{sen}(t)$.

Precisamos que $\operatorname{sen}(t)$ *satisfaça as condições do teorema 3.2. É fácil observar que a função seno é contínua, logo precisamos verificar se é de ordem exponencial, para isto, conforme a definição 3.4 precisamos que exista* c, $M > 0$ *e* $T > 0$ *tais que* $\left|\operatorname{sen}(t)\right| \leq Me^{ct}$ *para todo* $t > T$:

$$\left|\operatorname{sen}(t)\right| \leq Me^{ct} \Leftrightarrow \left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{e^{ct}}\right| \leq M, \text{ para } t > T$$

Pela existência de c *e* $M > 0$ *(em particular* $c = 0$ *e* $M = 1$ *satisfazem a condição) sabemos que* $f(t) = \operatorname{sen}(t)$ *possui transformada de Laplace.*

Exemplo 3.4. *Verifique a existência da transformada de Laplace para polinômios* t^n, $n \in \mathbb{N}$.

Conforme no exemplo anterior, como os polinômios satisfazem a condição de continuidade, resta verificar a condição de ordem exponencial:

$$|t^n| \leq Me^{ct} \Leftrightarrow \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leq M, \text{ para } t > T$$

Assim verificamos que t^n *possui transformada de Laplace para todo* $c > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5. *Verifique se a função* $f(t) = e^{t^2}$ *é de ordem exponencial*

Por contradição, assuma que e^{t^2} *é de ordem exponencial. Então, conforme a definição 3.4,*

$$e^{t^2} \leq Me^{ct}, \text{ para algum } M \text{ e } c \tag{3.11}$$

Como $e^{t^2} \geq 0$, *então* $Me^{ct} \geq 0$, *portanto* $M \geq 0$. *Tomando 3.11,*

$$e^{t^2} \leq Me^{ct} \Leftrightarrow \frac{e^{t^2}}{e^{ct}} \leq M \Leftrightarrow e^{t^2 - ct} \leq M$$

Aplicando o logaritmo natural,

$$\ln\left(e^{t^2-ct}\right) \leq \ln(M) \Leftrightarrow t^2 - ct \leq \ln(M)$$

Isso significa que $t^2 - ct$ *é limitado por uma constante, o que é um absurdo, portanto* e^{t^2} *não é de ordem exponencial.*

Seguem agora alguns exemplos de transformadas de Laplace.

Exemplo 3.6 ($\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \ f(t) = t$).

$$\mathcal{L}\left\{t\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt$$

Avaliando

$$\int e^{-st} t dt$$

Por partes, $\int udv = uv \int vdu$, $u = t$, $du = dt$, $dv = e^{-st}dt$, $v = \dfrac{-e^{-st}}{s}$ *(cf. exemplo 3.2)*

Substituindo na fórmula de integral por partes,

$$\int e^{-st} t dt = \frac{-te^{-st}}{s} + \int \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{-te^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\int e^{-st} dt = \frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$$

Logo,

$$\int_0^\infty e^{-st} t dt = \left[\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_{t-0}^{t-\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right) - \left(\frac{-0e^0}{s} + \frac{e^0}{s^2}\right) = \cancelto{0}{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)} - \left(\frac{-0e^0}{s} + \frac{e^0}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Exemplo 3.7 ($\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \ f(t) = t^2$).

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt$$

Avaliando

$$\int e^{-st} t^2 dt$$

Por partes, $\int udv = uv \int vdu$, $u = t^2$, $du = 2tdt$, $dv = e^{-st}dt$, $v = \dfrac{-e^{-st}}{s}$

Substituindo na fórmula de integral por partes,

$$\int e^{-st} t^2 dt = -\frac{t^2 e^{-st}}{s} + \int \frac{e^{-st}}{s} 2tdt = -\frac{t^2 e^{-st}}{s} + \frac{2}{s}\int e^{-st} tdt$$

Conforme o exemplo 3.6,

$$\int e^{-st} tdt = \frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$$

Assim,

$$\int e^{-st} t^2 dt = -\frac{t^2 e^{-st}}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)$$

Portanto,

$$\int_0^\infty e^{-st}t^2dt = \left[-\frac{t^2e^{-st}}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right]_{t-0}^{t-\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{t^2e^{-st}}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right] - \left[-\frac{0^2e^{-s0}}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{-0e^{-s0}}{s} - \frac{e^{-s0}}{s^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\cancelto{0}{\left[-\frac{t^2e^{-st}}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right]} - \left[-\frac{0^2e^{-s0}}{s} + \frac{2}{s}\left(\frac{-0e^{-s0}}{s} - \frac{e^{-s0}}{s^2}\right)\right] = \frac{2}{s^3}$$

Exemplo 3.8 ($\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \ f(t) = 2t^2 + 5t$)**.** *Pela linearidade da transformada da Laplace, sabemos que* $\mathcal{L}\left\{2t^2+5t\right\} = 2\mathcal{L}\left\{t^2\right\} + 5\mathcal{L}\left\{t\right\}$*, assim substituindo* $\mathcal{L}\left\{t^2\right\}$ *e* $\mathcal{L}\left\{t\right\}$ *conforme os exemplos 3.6 e 3.7, temos*

$$\mathcal{L}\left\{2t^2+5t\right\} = 2\mathcal{L}\left\{t^2\right\} + 5\mathcal{L}\left\{t\right\} = 2\left(\frac{2}{s^3}\right) + 5\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{4}{s^3} + \frac{5}{s^2}$$

Exemplo 3.9 ($\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \ f(t) = constante$)**.**

$$\mathcal{L}\left\{a\right\} = \int_0^\infty e^{-st}adt = a\int_0^\infty e^{-st}dt = a\mathcal{L}\left\{1\right\} \textit{ (cf. exemplo 3.2)}$$

$$= \frac{a}{s}$$

Observe que podemos chegar ao mesmo resultado utilizando a linearidade da transformada de Laplace.

Exemplo 3.10 ($f(t) = \operatorname{sen} 4t$)**.** *Conforme a tabela 3.1,*

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 4t\right\} = \frac{4}{s^2+4^2} = \frac{4}{s^2+16}$$

3.4 Transformada de Derivadas e Integrais

Com o intuito de utilizar a transformada de Laplace na solução de equações diferenciais, torna-se necessário o cálculo da transformada de Laplace de derivadas

Exemplo 3.11. *Seja* $f'(t)$ *contínua para* $t \geq 0$*, temos:*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt$$

Tabela 3.1: Algumas transformadas de Laplace

1) $\mathcal{L}\{a\}$	$\frac{a}{s}$
2) $\mathcal{L}\{t^n\}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3) $\mathcal{L}\{e^{at}\}$	$\frac{1}{s-a}$
4) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
5) $\mathcal{L}\{\cos kt\}$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
6) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} kt\}$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
7) $\mathcal{L}\{\cosh kt\}$	$\frac{s}{s^2-k^2}$

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001).

Por integral por partes temos, $u = e^{-st}$, $du = -se^{-st}dt$, $v = f(t)$ *e* $dv = f'(t)$, *assim,*

$$\left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - e^{-s(0)}f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Supondo que $e^{-st}f(t) \to 0$ *conforme* $t \to \infty$ *temos*

$$0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

De forma generalizada para outros graus de derivadas temos

Teorema 3.3 (Transformada de uma Derivada)**.** *Sejam* $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ *contínuas em* $[0,\infty)$ *e de ordem exponencial e* $f^{(n)}(t)$ *contínua por partes em* $[0,\infty)$, *temos que*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$.

Teorema 3.4 (Transformada de uma Integral)**.** *Seja a função* $f(t)$ *uma função contínua por partes e de ordem exponencial, assim,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Demonstração. Seja a integral

$$a(x) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Onde $f(\tau)$ é contínua por partes e de ordem exponencial.

Calculando $\mathcal{L}\left\{a(t)\right\}$:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) e^{-st}dt$$

Por integral por partes, vamos tomar $u = a(t)$ e $dv = e^{-st}dt$, assim $du = a'(t)dt = f(t)dt$ e $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$.

Logo,

$$\lim_{b\to\infty} [uv]_0^b - \lim_{b\to\infty} \int_0^b vdu \Rightarrow \left[\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_{t-0}^{t\to\infty} - \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} f(t)dt$$

Reorganizando

$$-\frac{1}{s}\left[\left(e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\right]_{t-0}^{t\to\infty} + \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt = -\frac{1}{s}\left[\left(e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\right]_{t-0}^{t\to\infty} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\lim_{t\to\infty}\left(e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\right) - e^{-s0}\int_0^0 f(\tau)d\tau\right] + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \tag{3.12}$$

O limite

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = 0$$

caso $f(\tau)$ seja de ordem exponencial, o que é verdade por hipótese, assim, 3.12

$$= -\frac{1}{s}\cdot 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

□

3.5 Transformada Inversa

Conforme anteriormente definido, a transformada de Laplace de uma função $f(x)$ nada mais é que $\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = F(x)$, assim, para uma função $f(x)$, podemos encontrar a transformada, sendo esta $F(x)$. Surge então a questão de como encontrar $f(x)$ quando se tem $F(x)$, para isso fazemos uso da transformada de inversa.[1]

A transformada inversa de Laplace é definida por uma integral complexa, porém, como esta ferramenta foge do escopo da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (e de muitas graduações), o uso de tal definição será deixado de lado, explorando o uso das transformadas inversas conforme a tabela 3.2:

Tabela 3.2: Algumas transformadas inversas

1) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s}\right\}$	a
2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}$	t^n
3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}$	e^{at}
4) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\}$	$\operatorname{sen} kt$
5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\}$	$\cos kt$
6) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2-k^2}\right\}$	$\operatorname{senh} kt$
7) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\}$	$\cosh kt$

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001).

Assim como a transformada de Laplace, a transformada inversa também possui a propriedade da linearidade.

Teorema 3.5 (Linearidade da Transformada Inversa).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\alpha F(x) + \beta G(x)\right\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\left\{F(x)\right\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\left\{G(x)\right\}$$

Exemplo 3.12 ($\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s-3}\right\}$).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 2e^{3t}$$

Exemplo 3.13 ($\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s+21}{s^2+9}\right\}$). *Podemos escrever a função como a soma de duas fra-*

[1] Questões referentes à unicidade da transformada inversa são tratadas em (SCHIFF, 1999).

ções:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s+21}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+9}+\frac{21}{s^2+9}\right\}$$

Fazendo uso da linearidade da transformada inversa temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+9}+\frac{21}{s^2+9}\right\} = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{21}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}+\frac{21}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = 8\cos 3t+\frac{21}{3}\operatorname{sen} 3t$$

Assim como nem todas as funções possuem transformada de Laplace, nem todas as funções possuem transformada inversa.[2]

Exemplo 3.14. *Seja* $F(s) = \dfrac{s}{s+1}$.

Esta função não possui transformada inversa, uma vez que

$$\lim_{\Re(s)\to\infty}\frac{s}{s+1} \neq 0$$

[2] Mais informações sobre a existência da transformada inversa podem ser vistas em (SCHIFF, 1999).

4 APLICAÇÕES

A Transformada de Laplace possui as mais diversas aplicações em diferentes campos física e da matemática. Porém, conforme a proposta deste trabalho, apresenta-se neste capítulo as aplicações da Transformada de Laplace em Equações Diferenciais.

Torna-se necessário o uso de ferramentas como a Transformada de Laplace quando se tenta resolver equações diferenciais cuja solução possui computação consideravelmente complexa, assim utiliza-se a transformada de Laplace para simplificar tais cálculos.

Figura 4.1: Transformada de Laplace em Equações Diferenciais Ordinárias

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Equação Diferencial}} \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, dashed] & \boxed{\text{Equação Transformada}} \arrow[d] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{Solução da}\\ \text{Equação Diferencial}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\text{Solução da}\\ \text{Equação Transformada}\end{array}} \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Fonte: Adaptado de (ZILL; CULLEN, 2009).

Seguindo as exigências da definição 3.3, a transformada de Laplace é aplicável em PVI de equações diferenciais lineares. A transformada de Laplace tem como papel transformar uma equação diferencial linear em uma equação algébrica.

Exemplo 4.1 $(4y' + 2y = \operatorname{sen} 3t,\ y(0) = 0)$. *Aplicando a transformada de Laplace dos dois lados da equação temos*

$$\mathcal{L}\left\{4y' + 2y\right\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 3t\right\}$$

Fazendo uso da linearidade temos

$$4\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 3t\right\}$$

Utilizando a definição 3.3 temos

$$4\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 3t\right\}$$

$$\Leftrightarrow 4\left[sY(s) - 0\right] + 2Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \Leftrightarrow 4sY(s) + 2Y(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Leftrightarrow Y(s)\left[4s+2\right] = \frac{3}{s^2+9} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{3}{(4s+2)(s^2+9)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{3}{2(2s+1)(s^2+9)}$$

Assim temos a solução da equação diferencial transformada. Para solucionar a equação diferencial é necessário agora aplicar a transformada inversa em $Y(s)$, para isso é necessário aplicar o método das frações parciais em $Y(s)$

Por frações parciais temos

$$\frac{3}{(4s+2)(s^2+9)} = \frac{3}{2(2s+1)(s^2+9)}$$
$$= \frac{A+Bs}{2(s^2+9)} + \frac{C}{2(2s+1)}$$

Multiplicando dos dois lados por $2(2s+1)(s^2+9)$ (em outras palavras "passando multiplicando")

$$3 = 2(2s+1)(s^2+9)\left[\frac{A+Bs}{2(s^2+9)} + \frac{C}{2(2s+1)}\right]$$

$$3 = (A+Bs)(2s+1) + C(s^2+9)$$

Distribuindo os termos

$$3 = 2As + A + 2Bs^2 + Bs + Cs^2 + 9C$$

Colocando em evidência as potências de s

$$3 = (2B+C)s^2 + (2A+B)s + (A+9C)$$

Assim,

$$\begin{cases} 2B+C=0 \\ 2A+B=0 \\ A+9C=3 \end{cases}$$

Isolando B na primeira equação: $B = \dfrac{-C}{2}$. *Substituindo B na segunda equação:* $2A - \dfrac{C}{2} = 0$ *e isolando C,* $C = 4A$. *Substituindo C na terceira equação,* $A + 9(4A) = 3$, *logo,* $A = \dfrac{3}{37}$.

Substituindo A na segunda equação: $\dfrac{6}{37} + B = 0$, *assim* $B = -\dfrac{6}{37}$ *e substituindo B na primeira equação* $-\dfrac{12}{37} + C = 0$, *logo,* $C = \dfrac{12}{37}$

Portanto, como $Y(s) = \dfrac{3}{2(2s+1)(s^2+9)}$, *temos*

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{37} - \frac{6}{37}s}{2(s^2+9)} + \frac{\frac{12}{37}}{2(2s+1)}$$

Reorganizando os termos

$$Y(s) = \frac{3}{37}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{74}\left(\frac{-6s+3}{s^2+9}\right)$$

$$= \frac{3}{37}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{74}\left(\frac{-6s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9}\right)$$

Aplicando a transformada de Laplace dos dois lados:

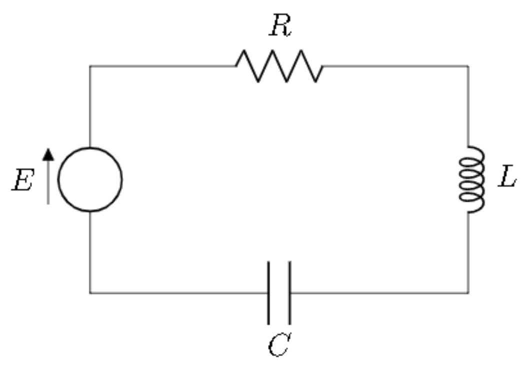
$$\mathcal{L}\left\{Y(s)\right\} = \frac{3}{37}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{74}\left[-6\mathcal{L}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}\right]$$

$$y = \frac{3}{37}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{74}\left(-6\cos 3t + \operatorname{sen} 3t\right)$$

4.1 Circuitos em Série

Uma das principais aplicações da transformada de Laplace nas disciplina de Equações Diferencias é na resolução de problemas ligados a circuitos RLC, isto é, circuitos que apresentam pelo menos um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C).

Figura 4.2: Circuito RLC



Fonte: Próprio autor.

A segunda lei de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão de um indutor $\left(L\frac{di}{dt}\right)$, resistor $(Ri(t))$ e capacidor $\left(\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau\right)$ é igual à voltagem impressa $E(t)$, onde $i(t)$ é a corrente, L, R e C são constantes (respectivamente constante de indutância, resistência e capacitância). $E(t)$ é muitas vezes chamada de força eletromotriz ou fem.

Assim temos a equação íntegro-diferencial

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t) \tag{4.1}$$

Note que a corrente ($i(t)$) é relacionada com a carga q por $i=\frac{dq}{dt}$, então 4.1 pode ser escrita como

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q = E(t) \tag{4.2}$$

É importante que não haja confusão entre a unidade imaginária i e a corrente num circuito representada também por i.

Exemplo 4.2. *Determinar a corrente $i(t)$ num circuito RLC em série quando $L = 0,8\mathrm{H}$, $R = 4\Omega$, $C = 0,3125\mathrm{F}$, onde em $t = 0$ é ligando ao circuito uma bateria tal que $E(t) = 3\mathrm{V}$, $i(0) = 0$.*

Substituindo então na equação 4.1 temos

$$0,8\frac{di}{dt}+4i+\frac{1}{0,3125}\int_0^t i(\tau)d\tau = 3$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{0,8\frac{di}{dt}+4i+\frac{1}{0,3125}\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{3\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{0,8\frac{di}{dt}\right\}+\mathcal{L}\left\{4i\right\}+\mathcal{L}\left\{\frac{1}{0,3125}\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{3\right\}$$

$$\Leftrightarrow 0,8\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\}+4\mathcal{L}\left\{i\right\}+\frac{1}{0,3125}\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{3\right\}$$

Conforme o teorema 3.4, $\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\}$ pode ser escrito como $\dfrac{I(s)}{s}$. $\mathcal{L}\left\{3\right\}=\dfrac{3}{s}$ e $\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\} = sI(s)-i(0)$. Assim,

$$\Leftrightarrow 0,8sI(s)-i(0)+4I(s)+\frac{1}{0,3125}\frac{I(s)}{s}=\frac{3}{s}$$

$$\Leftrightarrow 0,8sI(s)+4I(s)+\frac{1}{0,3125}\frac{I(s)}{s}=\frac{3}{s}$$

$$\Leftrightarrow I(s)\left(0,8s+4+\frac{1}{0,3125s}\right)=\frac{3}{s}$$

$$\Leftrightarrow I(s)=\frac{3}{s\left(0,8s+4+\dfrac{1}{0,3125s}\right)}=\frac{3}{0,8s^2+4s+\dfrac{1}{0,3125}}$$

$$= \frac{3}{0,8s^2 + 4s + 3,2}$$

Multiplicando por $\frac{5}{5} = 1$,

$$\frac{3}{0,8s^2 + 4s + 3,2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{15}{4s^2 + 20s + 16} = \frac{15}{4\left(s^2 + 5s + 4\right)}$$

Para fatorar $s^2 + 5s + 4$ *é necessário calcular suas raízes. Utilizando Bháskara:*

$$s = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$s_1 = -1$, $s_2 = -4$.

Assim,

$$\frac{15}{4\left(s^2 + 5s + 4\right)} = \frac{15}{4(s+1)(s+4)}$$

Realizando a expansão por frações parciais,

$$\frac{15}{4(s+1)(s+4)} = \frac{A}{4(s+1)} + \frac{B}{4(s+4)}$$

Multiplicando $4(s+1)(s+4)$ *dos dois lados,*

$$\frac{15(4[s+1][s+4])}{4(s+1)(s+4)} = \frac{A(4[s+1][s+4])}{4(s+1)} + \frac{B(4[s+1][s+4])}{4(s+4)}$$

Simplificando,

$$\frac{15\cancel{(4[s+1][s+4])}}{\cancel{4(s+1)(s+4)}} = \frac{A(\cancel{4[s+1]}[s+4])}{\cancel{4(s+1)}} + \frac{B(\cancel{4}[s+1]\cancel{[s+4]})}{\cancel{4(s+4)}}$$

$$\Leftrightarrow 15 = A(s+4) + B(s+1) = As + 4A + Bs + B$$

Organizando os termos temos $A + B = 0$ *e* $4A + B = 15$. *De* $A + B = 0$, $A = -B$. *Substituindo em* $4A + B = 15 \Rightarrow -4B + B = 15 \Leftrightarrow -3B = 15$, *assim,* $B = -5$. *Como* $A = -B$, $A = 5$, *portanto*

$$I(s) = \frac{15}{4(s+1)(s+4)} = \frac{5}{4(s+1)} + \frac{-5}{4(s+4)}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{4(s+1)} + \frac{-5}{4(s+4)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=\frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=\frac{5}{4}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-4)}\right\}\right)$$

$$i(t)=\frac{5}{4}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)$$

Exemplo 4.3. *Determinar a corrente* $i(t)$ *num circuito RLC em série quando* $L = 0,002\mathrm{H}$, $R = 2,4\Omega$, $C = 0,03\mathrm{F}$, *onde em* $t = 0$ *é ligando ao circuito a uma bateria tal que* $E(t) = 5\mathrm{V}$, $i(0) = 0$.

Substituindo então na equação 4.1 temos

$$2\cdot 10^{-3}\frac{di}{dt}+2,4i+\frac{1}{3\cdot 10^{-2}}\int_0^t i(\tau)d\tau=5$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{2\cdot 10^{-3}\frac{di}{dt}+2,4i+\frac{1}{3\cdot 10^{-2}}\int_0^t i(\tau)d\tau\right\}=\mathcal{L}\left\{5\right\}$$

Organizando e utilizando as propriedades da transformada:

$$=2\cdot 10^{-3}\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\}+2,4\mathcal{L}\left\{i\right\}+\frac{1}{3\cdot 10^{-2}}\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\}=\mathcal{L}\left\{5\right\}$$

Conforme o teorema 3.4, $\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\}$ *pode ser escrito como* $\frac{I(s)}{s}$. $\mathcal{L}\left\{5\right\}=\frac{5}{s}$ *e* $\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\}=sI(s)-i(0)$. *Assim,*

$$2\cdot 10^{-3}(sI(s)-0)+2,4I(s)+\frac{1}{3\cdot 10^{-2}}\frac{I(s)}{s}=\frac{5}{s}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 10^{-3}sI(s)+2,4I(s)+\frac{1}{3\cdot 10^{-2}}\frac{I(s)}{s}=\frac{5}{s}$$

Multiplicando os dois lados por 10^2s

$$10^2s\left(2\cdot 10^{-3}sI(s)+2,4I(s)+\frac{1}{3\cdot 10^{-2}}\frac{I(s)}{s}\right)=\frac{5\cdot 10^2s}{s}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 10^{-1}s^2I(s)+240sI(s)+\frac{I(s)}{3}=5\cdot 10^2$$

$$\Leftrightarrow I(s)\left(2\cdot 10^{-1}s^2+240s+\frac{1}{3}\right)=5\cdot 10^2$$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{5 \cdot 10^2}{0,2s^2 + 240s + \dfrac{1}{3}}$$

Para facilitar a decomposição em frações parciais, multiplica-se o lado direito da igualdade por 1, *em particular* $1 = \dfrac{5}{5}$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{5 \cdot 10^2}{0,2s^2 + 240s + \dfrac{1}{3}} \cdot \frac{5}{5}$$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{5^2 \cdot 10^2}{s^2 + 1200s + \dfrac{5}{3}} = \frac{2500}{s^2 + 1200s + \dfrac{5}{3}}$$

Avaliando (frações parciais) $\dfrac{2500}{s^2 + 1200s + \frac{5}{3}}$

$$s^2 + 1200s + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow s^2 + 1200s = -\frac{5}{3}$$

Soma-se 360000 *dos dois lados da igualdade e então se completa o quadrado:*

$$s^2 + 1200s + 360000 = 360000 - \frac{5}{3} \Leftrightarrow (s + 600)^2 = \frac{1079995}{3}$$

$$s + 600 = \pm\sqrt{\frac{1079995}{3}} \Leftrightarrow s = -600 \pm \sqrt{\frac{1079995}{3}}$$

Portanto,

$$\frac{1}{s^2 + 1200s + \dfrac{5}{3}} = \frac{1}{\left(s + 600 - \sqrt{\dfrac{1079995}{3}}\right) \cdot \left(s + 600 + \sqrt{\dfrac{1079995}{3}}\right)}$$

Seja $\alpha = \sqrt{\dfrac{1079995}{3}}$

Assim,

$$\frac{2500}{s^2 + 1200s + \frac{5}{3}} = \frac{A}{(s + 600 - \alpha)} + \frac{B}{(s + 600 + \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2500}{s^2 + 1200s + \frac{5}{3}} = \frac{A(s + 600 + \alpha) + B(s + 600 - \alpha)}{(s + 600 - \alpha) \cdot (s + 600 + \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 2500 = A(s+600+\alpha)+B(s+600-\alpha) \Leftrightarrow 0s+2500 = As+A(600+\alpha)+Bs+B(600-\alpha)$$

Logo, $A+B=0$ *e* $A(600+\alpha)+B(600-\alpha)=2500$*. Conforme* $A+B=0$*,* $A=-B$*, assim*

$$-B(600+\alpha)+B(600-\alpha)=2500$$

$$\Leftrightarrow -600B-\alpha B+600B-\alpha B=2500 \Leftrightarrow -\alpha B-\alpha B=2500$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha B=2500 \Leftrightarrow B=-\frac{1250}{\alpha}$$

Portanto, como $A=-B$*,* $A=\dfrac{1250}{\alpha}$

Então,

$$I(s)=\frac{2500}{s^2+1200s+\frac{5}{3}}=\frac{\frac{1250}{\alpha}}{(s+600-\alpha)}+\frac{-\frac{1250}{\alpha}}{(s+600+\alpha)}$$

Aplicando a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1250}{\alpha}}{(s+600-\alpha)}+\frac{-\frac{1250}{\alpha}}{(s+600+\alpha)}\right\}$$

$$\Leftrightarrow i(t)=\frac{1250}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+600-\alpha)}\right\}-\frac{1250}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+600+\alpha)}\right\}$$

$$=\frac{1250}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s+(600-\alpha)]}\right\}-\frac{1250}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s+(600+\alpha)]}\right\}$$

$$=\frac{1250}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s-(-600+\alpha)]}\right\}-\frac{1250}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s-(-600-\alpha)]}\right\}$$

$$i(t)=\frac{1250}{\alpha}e^{(-600+\alpha)t}-\frac{1250}{\alpha}e^{(-600-\alpha)t},\quad \alpha=\sqrt{\frac{1079995}{3}}$$

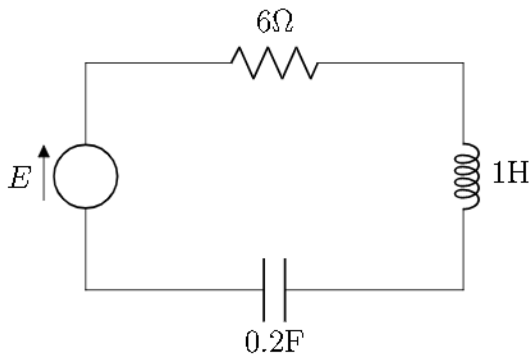
Exemplo 4.4. *Utilizando a segunda lei de Kirchhoff conforme a equação 4.2, tomando o circuito da figura 4.3, calcule a corrente em* $t=1$ *para o caso de uma fonte com* $E(t)=5$ *e para o caso* $E(t)=\operatorname{sen}(t)+1$*. As condições iniciais são* $q(0)=0$ *e* $q'(0)=0$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)\Leftrightarrow 2\frac{d^2q}{dt^2}+3,2\frac{dq}{dt}+\frac{1}{0,25}q=E(t)$$

a. $E(t)=5$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+6\frac{dq}{dt}+\frac{1}{0,2}q=5$$

Figura 4.3: Circuito de Exemplo



Fonte: Próprio autor.

Aplicando a transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2q}{dt^2}\right\} + 6\mathcal{L}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} + 5\mathcal{L}\{q\} = \mathcal{L}\{5\}$$

$$\Leftrightarrow s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 6\left[sQ(s) - q(0)\right] + 5Q(s) = \frac{5}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2Q(s) + 6sQ(s) + 5Q(s) = \frac{5}{s}$$

$$\Leftrightarrow Q(s)\left[s^2 + 6s + 5\right] = \frac{5}{s}$$

$$\Leftrightarrow Q(s) = \frac{5}{s\left[s^2 + 6s + 5\right]}$$

Utilizando a fórmula de Bháskara em $s^2 + 6s + 5$*:*

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$s_1 = -1,\ s_2 = -5$

$$Q(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+5)}$$

Utilizando frações parciais:

$$\frac{5}{s(s+1)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5} = \frac{A(s+1)(s+5) + B(s)(s+5) + C(s)(s+1)}{s(s+1)(s+5)}$$

Como denominadores são iguais, numeradores devem ser iguais,

$$5 = A(s+1)(s+5) + B(s)(s+5) + C(s)(s+1)$$

$$5 = As^2 + A6s + A5 + Bs^2 + B5s + Cs^2 + Cs$$

$$0s^2 + 0s + 5 = (A+B+C)s^2 + (A6+B5+C)s + (A5)$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A6+B5+C=0 \\ A5=5 \end{cases}$$

Disso tem-se $A=1$. *Substituindo* A *na primeira equação e isolando* C, $C=-B-1$. *Substituindo* A *e* C *na segunda equação,* $6+B5-B-1=0$, *isolando* B, $B=\frac{-5}{4}$. *Assim,* $C=\frac{1}{4}$.

Portanto,

$$Q(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{5}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{4}}{s+5}$$

Aplicando a transformada inversa,

$$\mathcal{L}\left\{Q(s)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{\frac{5}{4}}{s+1}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s+5}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{Q(s)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{5}{4}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

$$q(t) = 1 - \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-4t}$$

Como se quer calcular $i(1)$, *deve ser usada a definição* $i(t)=\frac{dq}{dt}$, *assim,*

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d1}{dt} - \frac{5}{4}\frac{d}{dt}e^{-t} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}e^{-4t}$$

$$i(t) = \frac{5}{4}e^{-t} - e^{-4t} \Rightarrow i(1) = \frac{5}{4}e^{-1} - e^{-4} \simeq 0,4415\text{A}$$

b. $E(t) = \text{sen}\,(t) + 1$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 6\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0,2}q = \text{sen}\,(t) + 1$$

Aplicando a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2q}{dt^2}\right\} + 6\mathcal{L}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{q\right\} = \mathcal{L}\left\{\text{sen}\,(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{1\right\}$$

$$\Leftrightarrow s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 6\left[sQ(s) - q(0)\right] + 5Q(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 6\left[sQ(s) - q(0)\right] + 5Q(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2Q(s) + 6sQ(s) + 5Q(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow Q(s) = \frac{s^2+s+1}{s\left(s^2+1\right)\left(s^2+6s+5\right)}$$

Aplicando Bháscara em s^2+6s+5*:*

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2}$$

$s_1 = -1$, $s_2 = -5$ *assim,*

$$\Leftrightarrow Q(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s+1)(s+5)(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow s^2+s+1 &= A(s+1)(s+5)(s^2+1) + B(s)(s+5)(s^2+1)\\ &\quad + C(s)(s+1)(s^2+1) + (Ds+E)(s)(s+1)(s+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= A(s^4+6s^3+6s^2+6s+5) + B(s^4+5s^3+s^2+5s) + C(s^4+s^3+s^2+s)\\ &\quad +(Ds+E)(s^3+6s^2+5s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= As^4+6As^3+6As^2+6As+5A+Bs^4+5Bs^3+Bs^2+5Bs+Cs^4+Cs^3+Cs^2\\ &\quad +Cs+Ds^4+6Ds^3+5Ds^2+Es^3+6Es^2+5Es\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= As^4+Bs^4+Cs^4+Ds^4+6As^3+5Bs^3+Cs^3+6Ds^3+Es^3+6As^2+Bs^2\\ &\quad +Cs^2+5Ds^2+6Es^2+6As+5Bs+Cs+5Es+5A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0s^4+0s^3+s^2+s+1 &= (A+B+C+D)\,s^4 + (6A+5B+C+6D+E)\,s^3\\ &\quad + (6A+B+C+5D+6E)\,s^2 + (6A+5B+C+5E)\,s + 5A\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C+D=0\\ 6A+5B+C+6D+E=0\\ 6A+B+C+5D+6E=1\\ 6A+5B+C+5E=1\\ 5A=1\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, a solução é $A=\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=\frac{21}{520}$, $D=-\frac{3}{26}$, $E=\frac{1}{13}$.

Assim,

$$Q(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s+1)(s+5)(s^2+1)} = \frac{\frac{1}{5}}{s} - \frac{\frac{1}{8}}{s+1} + \frac{\frac{21}{520}}{s+5} + \frac{\frac{-3s+2}{26}}{s^2+1}$$

Aplicando a transformada de inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Q(s)\right\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{21}{520}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} + \frac{1}{26}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s+2}{s^2+1}\right\}$$

$$\Leftrightarrow q(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{21}{520}e^{-5t} + \frac{1}{26}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s+2}{s^2+1}\right\}$$

$$\Leftrightarrow q(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{21}{520}e^{-5t} + \frac{1}{26}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}\right\}$$

$$\Leftrightarrow q(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{21}{520}e^{-5t} + \frac{1}{26}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\}\right]$$

$$\Leftrightarrow q(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{21}{520}e^{-5t} + \frac{1}{26}\left[-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right]$$

$$\Leftrightarrow q(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{21}{520}e^{-5t} + \frac{1}{26}\left(-3\cos t + 2\,\mathrm{sen}\, t\right)$$

Como se quer calcular $i(1)$, deve ser usada a definição $i(t) = \frac{dl}{dt}$, assim,

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\frac{d}{dt}e^{-t} + \frac{21}{520}\frac{d}{dt}e^{-5t} + \frac{1}{26}\left(-3\frac{d}{dt}\cos t + 2\frac{d}{dt}\,\mathrm{sen}\, t\right)$$

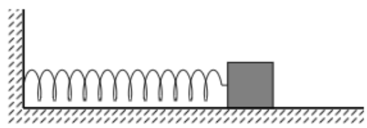
$$i(t) = \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{105}{520}e^{-5t} + \frac{1}{26}\left(3\,\mathrm{sen}\, t + 2\cos t\right)$$

$$\Rightarrow i(1) = \frac{1}{8}e^{-1} - \frac{21}{104}e^{-5} + \frac{1}{26}\left(3\,\mathrm{sen}\, 1 + 2\cos 1\right) \simeq 0,1833\text{A}$$

4.2 Sistema Massa-Mola

O movimento de um sistema com uma mola conectada a uma massa é um dos exemplos clássicos de equações diferenciais.

Figura 4.4: Exemplo de Sistema Massa-Mola



Fonte: Próprio autor.

Pela segunda Lei de Newton temos $F = ma$, lembrando que $a = x''$, conforme Lei de Hooke, a equação que descreve o movimento de um corpo preso a uma mola é dada por $\overrightarrow{F} = -kx$, assim temos

$$mx'' = -kx, \;\; k > 0$$

Se houver uma força de amortecimento ou resistência agindo contra o vomineto do corpo proporcional à velocidade, a equação se torna

$$mx'' = -kx - \gamma x', \;\; k, \gamma > 0$$

Caso haja a ação de uma força externa, a equação pode ser escrita como

$$mx'' = -kx - \gamma x' + F(t), \;\; k, \gamma > 0$$

Assim, a equação do movimento da massa é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$mx'' + \gamma x' + kx = F(t), \;\; m, k, \gamma > 0 \tag{4.3}$$

As oscilações do sistema massa-mola podem ser classificadas em quatro tipos:

1. Oscilações livres não-amortecidas

   Neste caso, $F(t) = 0$, assim como $\gamma = 0$, isto é, não há força amortecedora nem força externa atuando no sistema, neste caso, a equação do movimento se torna

$$mx'' + kx = 0, \;\; m, k > 0 \tag{4.4}$$

   Este é o caso do Movimento Harmônico Simples.

2. Oscilações livres amortecidas

   Neste caso, $F(t) = 0$ e $\gamma > 0$, isto é, não há força externa, mas há uma força amortecedora atuando no sistema.

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0, \;\; m, k, \gamma > 0 \tag{4.5}$$

3. Oscilações forçadas não-amortecidas

   Este é um caso em há força externa $(F(t) \neq 0)$ mas não há força amortecedora $\gamma = 0$

$$mx'' + kx = F(t), \;\; m, k > 0 \tag{4.6}$$

4. Oscilações forçadas amortecidas

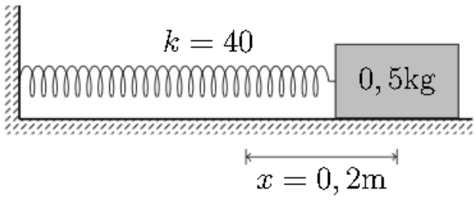
   Este é o caso mais completo para um sistema com uma massa e uma mola, é o caso da 4.3

$$mx'' + \gamma x' + kx = F(t), \;\; m, k, \gamma > 0 \tag{4.7}$$

Como se pode ver, os tipos de oscilação são definidos por $F(t)$ (força externa) e γ (coeficiente de amortecimento).

Exemplo 4.5. *Seja o sistema massa-mola de oscilação livre não-amortecida da figura 4.5*

Figura 4.5: Sistema Massa-Mola de Oscilação Livre Não-Amortecida



Fonte: Próprio autor.

Onde se solta a massa em $t = 0$, assim a posição da massa em $t = 0$ é $x = 0,2m$ e a velocidade $x' = 0$.

Conforme a equação 4.4,

$$0,5x'' + 40x = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace,

$$0,5\mathcal{L}\left\{x''\right\} + 40\mathcal{L}\left\{x\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\}$$

Utilizando a definição 3.3

$$0,5[s^2X(s) - sx(0) + x'(0)] + 40X(s) = 0$$

Substituindo $x(0) = 0,2$ e $x'(0) = 0$

$$0,5[s^2X(s) - 0,2s] + 40X(s) = 0$$

Organizando os termos,

$$0,5s^2X(s) + 40X(s) = 0,1s$$

Colocando $X(s)$ em evidência,

$$X(s)[0,5s^2+40]=0,1s$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{0,1s}{0,5s^2+40}\Leftrightarrow X(s)=\frac{\frac{s}{10}}{0,5s^2+40}\Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{10\,(0,5s^2+40)}$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{5s^2+400}\Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{5\,(s^2+80)}\Leftrightarrow X(s)=\frac{\frac{s}{5}}{s^2+80}$$

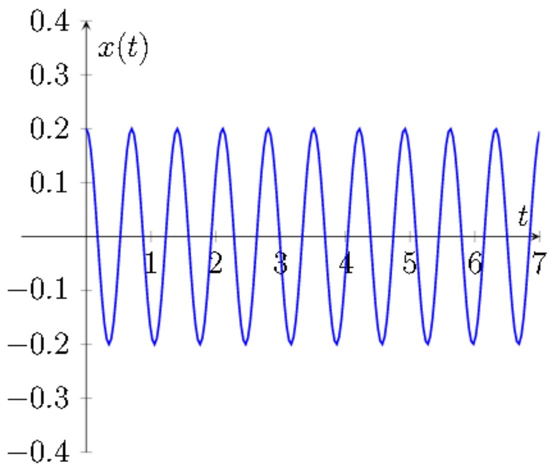
Aplicando a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{s}{5}}{s^2+80}\right\}\Leftrightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+80}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{5}\cos\left(\sqrt{80}t\right)=\frac{\cos\left(4\sqrt{5}t\right)}{5}$$

Conforme anteriormente citado, as oscilações livres não-amortecidas representam Movimento Harmônico Simples, o que é perceptível através do gráfico:

Figura 4.6: Gráfico de $x(t)=\frac{\cos\left(4\sqrt{5}t\right)}{5}$



Fonte: Próprio autor.

Exemplo 4.6. *Seja o sistema do exemplo 4.5, com amortecimento de coeficiente $\gamma=4$. Conforme a equação 4.5,*

$$0,5x''+4x'+40x=0,\quad f(0)=0,2,\quad f'(0)=0$$

Aplicando a transformada de Laplace,

$$0,5\mathcal{L}\left\{x''\right\}+4\mathcal{L}\left\{x'\right\}+40\mathcal{L}\left\{x\right\}=\mathcal{L}\left\{0\right\}$$

$$\Leftrightarrow 0,5\left[s^2X(s)-sf(0)-f'(0)\right]+4\left[sX(s)-f(0)\right]+40X(s)=0$$

$$\Leftrightarrow 0,5\left[s^2X(s)-0,2s-0\right]+4\left[sX(s)-0,2\right]+40X(s)=0$$

$$\Leftrightarrow 0,5s^2X(s)-0,1s+4sX(s)+0,8+40X(s)=0$$

Colocando $X(s)$ em evidência,

$$X(s)\left(0,5s^2+4s+40\right)+\frac{4}{5}-\frac{1}{10}s=0$$

$$\Leftrightarrow X(s)\left(0,5s^2+4s+40\right)+\frac{-s+8}{10}=0$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{s-8}{10\left(0,5s^2+4s+40\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{s-8}{5\left(s^2+8s+80\right)}\Leftrightarrow X(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{s-8}{s^2+8s+80}\right)$$

Para fazer a decomposição em frações parciais é necessário encontrar as raízes de $s^2+8s+80$. Utilizando a fórmula de Bháscara, tem-se $s_1=-4+8i$, $s_2=-4-8i$, assim,

$$X(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{s-8}{s^2+8s+80}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{A}{s-4+8i}+\frac{B}{s-4-8i}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{A(s-4-8i)+B(s-4+8i)}{(s-4+8i)(s-4-8i)}\right]$$

$$s+8=As+A(-4-8i)+Bs+B(-4+8i)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A(-4-8i)+B(-4+8i)=8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, $A=\dfrac{2-i}{4}$ e $B=\dfrac{2+i}{4}$, assim

$$X(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{\frac{2-i}{4}}{s-4+8i}+\frac{\frac{2+i}{4}}{s-4-8i}\right)$$

Aplicando a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\frac{1}{20}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-i}{s+4-8i}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2+i}{s+4+8i}\right\}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\frac{1}{20}\left[(2-i)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4-8i}\right\}+(2+i)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4+8i}\right\}\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{20}\left[(2-i)e^{(-4+8i)t}+(2+i)e^{(-4-8i)t}\right]$$

Utilizando a propriedade do exponencial ($e^{a+b} = e^a e^b$),

$$x(t) = \frac{1}{20}\left[(2-i)e^{-4t}e^{8it} + (2+i)e^{-4t}e^{-8it}\right]$$

Utilizando a identidade de Euler ($e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$),

$$x(t) = \frac{1}{20}\left\{(2-i)e^{-4t}\left[\cos(8t) + i\,\mathrm{sen}\,(8t)\right] + (2+i)e^{-4t}\left[\cos(-8t) + i\,\mathrm{sen}\,(-8t)\right]\right\}$$

Colocando e^{-4t} em evidência

$$x(t) = \frac{1}{20}e^{-4t}\left\{(2-i)\left[\cos(8t) + i\,\mathrm{sen}\,(8t)\right] + (2+i)\left[\cos(-8t) + i\,\mathrm{sen}\,(-8t)\right]\right\}$$

Fazendo a distributiva,

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{20}e^{-4t}[&2\cos(8t) + 2i\,\mathrm{sen}\,(8t) - i\cos(8t) + \mathrm{sen}\,(8t) \\ &+ 2\cos(-8t) + 2i\,\mathrm{sen}\,(-8t) + i\cos(-8t) - \mathrm{sen}\,(-8t)] \end{aligned}$$

Como $\mathrm{sen}\,(-x) = -\,\mathrm{sen}\,(x)$ *e* $\cos(-x) = \cos(x)$,

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{20}e^{-4t}[&2\cos(8t) + 2i\,\mathrm{sen}\,(8t) - i\cos(8t) + \mathrm{sen}\,(8t) \\ &+ 2\cos(8t) - 2i\,\mathrm{sen}\,(8t) + i\cos(8t) + \mathrm{sen}\,(8t)] \end{aligned}$$

Simplificando,

$$x(t) = \frac{1}{20}e^{-4t}\left[4\cos(8t) + 2\,\mathrm{sen}\,(8t)\right]$$

Assim,

$$x(t) = \frac{1}{10}\left(2e^{-4t}\cos(8t) + e^{-4t}\,\mathrm{sen}\,(8t)\right)$$

Analisando o gráfico na figura 4.7 é possível observar o movimento da massa.

Exemplo 4.7. *Agora, seja o exemplo 4.5 com uma força externa determinada pela função* $F(t) = \cos(9t)$. *Conforme a equação 4.4,*

$$0,5x'' + 40x = \cos(9t), \quad f(0) = 0,2, \quad f'(0) = 0$$

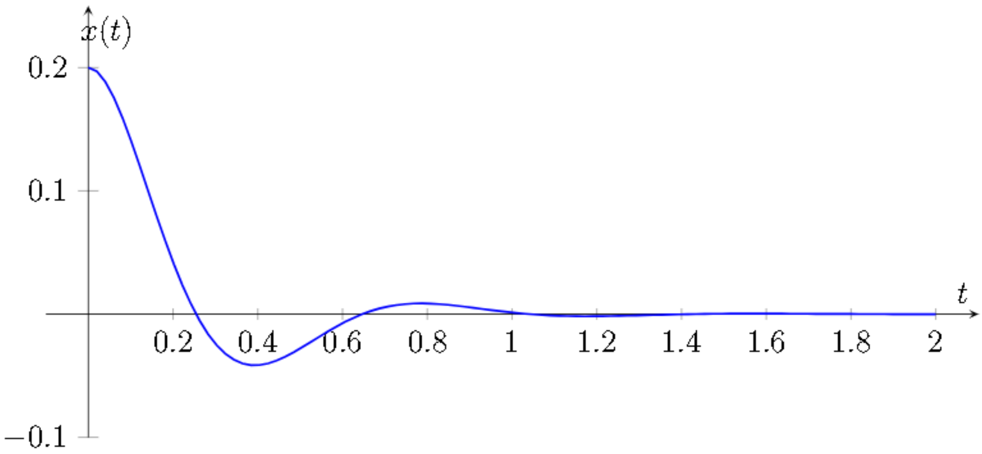
Aplicando a transformada de Laplace,

$$0,5\mathcal{L}\left\{x''\right\} + 40\mathcal{L}\left\{x\right\} = \mathcal{L}\left\{\cos(9t)\right\}$$

$$\Leftrightarrow 0,5\left[s^2X(s) - sf(0) - f'(0)\right] + 40X(s) = \frac{s}{s^2+9^2}$$

$$\Leftrightarrow 0,5s^2X(s) - 0,1s + 40sX(s) = \frac{s}{s^2+81}$$

Figura 4.7: Gráfico de $x(t) = \dfrac{1}{10}\left(2e^{-4t}\cos(8t) + e^{-4t}\,\text{sen}\,(8t)\right)$



Fonte: Próprio autor.

$$\Leftrightarrow X(s)\left(0,5s^2 + 40s\right) = \frac{s}{s^2+81} + 0,1s$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\dfrac{s}{s^2+81} + 0,1s}{(0,5s^2+40s)} = \frac{s^3+91s}{5s^4+805s^2+32400}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s^3+91s}{5(s^4+161s^2+6480)} = \frac{s^3+91s}{5[(s^2)^2+161s^2+6480]}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s^3+91s}{5[(s^2)^2+81s^2+80s^2+81\cdot 80]} = \frac{s^3+91s}{5(s^2+80)(s^2+81)}$$

Após aplicar frações parciais e organizar os termos,

$$X(s) = 11\frac{\frac{s}{5}}{(s^2+80)} - 2\frac{s}{s^2+81}$$

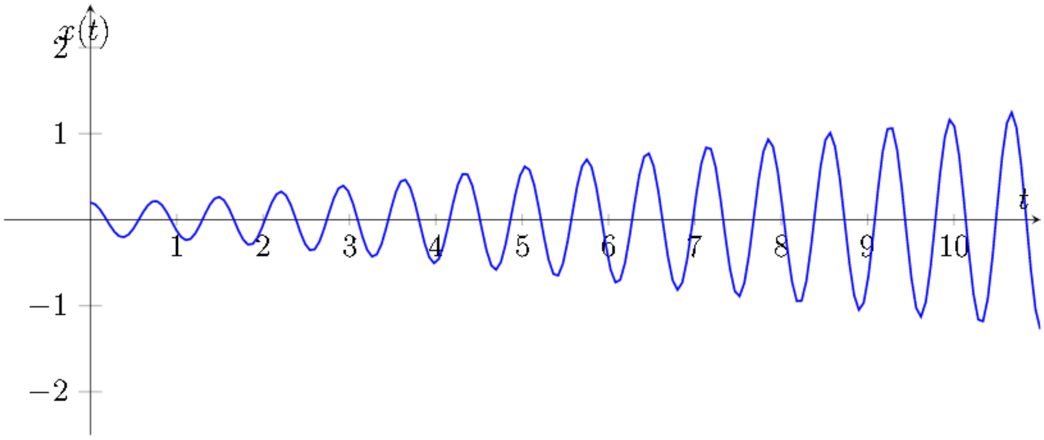
Aplicando a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{s}{5}}{(s^2+80)}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+81}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{11}{5}\cos(4\sqrt{5}t) - 2\cos(9t)$$

Como se pode observar no gráfico na figura 4.8, a força externa está amplificando o movimento da massa.

Figura 4.8: Gráfico de $x(t) = \dfrac{11}{5}\cos\left(4\sqrt{5}t\right) - 2\cos\left(9t\right)$



Fonte: Próprio autor.

Exemplo 4.8. *Combinando os exemplos anteriores,*

$$0,5x'' + 4x' + 40x = \cos\left(9t\right), \quad f(0) = 0,2, \quad f'(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,5x'' + 4x' + 40x = \cos\left(9t\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,5\mathcal{L}\left\{x''\right\} + 4\mathcal{L}\left\{x'\right\} + 40\mathcal{L}\left\{x\right\} = \mathcal{L}\left\{\cos\left(9t\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow 0,5\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + 4\left[sX(s) - x(0)\right] + 40X(s) = \frac{s}{s^2+81}$$

$$\Leftrightarrow 0,5\left[s^2X(s) - 0,2s\right] + 4\left[sX(s) - 0,2\right] + 40X(s) = \frac{s}{s^2+81}$$

$$\Leftrightarrow 0,5s^2X(s) - 0,1s + 4sX(s) - 0,8 + 40X(s) = \frac{s}{s^2+81}$$

$$\Leftrightarrow 0,5s^2X(s) + 4sX(s) + 40X(s) = \frac{s}{s^2+81} + 0,1s + 0,8$$

$$\Leftrightarrow X(s)\left[0,5s^2 + 4s + 40\right] = \frac{s}{s^2+81} + 0,1s + 0,8$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{s}{s^2+81} + 0,1s + 0,8}{0,5s^2 + 4s + 40} = \frac{\frac{s}{s^2+81} + \frac{1}{10}s + \frac{4}{5}}{\frac{1}{2}s^2 + 4s + 40} = \frac{\frac{s}{10} + \frac{s}{s^2+81} + \frac{4}{5}}{\frac{s^2+8s+80}{2}}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{-2s+1296}{5185}}{s^2+81} + \frac{\frac{1039s+7016}{5185}}{s^2+8s+80} = \frac{1}{5185}\left[\frac{-2s+1296}{s^2+81} + \frac{1039s+7016}{s^2+8s+80}\right]$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{5185}\left[\frac{-2s}{s^2+81} + \frac{1296}{s^2+81} + \frac{1039s+7016}{s^2+8s+80}\right]$$

Após aplicar frações parciais em $\dfrac{1039s+7016}{s^2+8s+80}$ *e organizar os termos,*

$$X(s)=\frac{1}{5185}\left[\frac{-2s}{s^2+81}+\frac{1296}{s^2+81}+\frac{\frac{1039}{2}-\frac{715i}{4}}{s+4-8i}+\frac{\frac{1039}{2}+\frac{715i}{4}}{s+4+8i}\right]$$

Aplicando a transformada inversa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\frac{1}{5185}&\left[-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+81}\right\}+144\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2+81}\right\}\right.\\&\left.+\left(\frac{1039}{2}-\frac{715i}{4}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4-8i}\right\}+\left(\frac{1039}{2}+\frac{715i}{4}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4+8i}\right\}\right]\end{aligned}$$

$$x(t)=\frac{1}{5185}\left[-2\cos(9t)+144\,\text{sen}\,(9t)+\left(\frac{1039}{2}-\frac{715i}{4}\right)e^{(-4+8i)t}+\left(\frac{1039}{2}+\frac{715i}{4}\right)e^{(-4-8i)t}\right]$$

Utilizando a propriedade do exponencial ($e^{a+b}=e^ae^b$),

$$x(t)=\frac{1}{5185}\left[-2\cos(9t)+144\,\text{sen}\,(9t)+\left(\frac{1039}{2}-\frac{715i}{4}\right)e^{-4t}e^{8it}+\left(\frac{1039}{2}+\frac{715i}{4}\right)e^{-4t}e^{-8it}\right]$$

Colocando e^{-4t} em evidência,

$$x(t)=\frac{1}{5185}\left\{-2\cos(9t)+144\,\text{sen}\,(9t)+e^{-4t}\left[\left(\frac{1039}{2}-\frac{715i}{4}\right)e^{8it}+\left(\frac{1039}{2}+\frac{715i}{4}\right)e^{-8it}\right]\right\}$$

Utilizando o fato de que $e^{8it}=\cos(8t)+i\,\text{sen}\,(8t)$ e $e^{-8it}=\cos(-8t)+i\,\text{sen}\,(-8t)$,

$$\begin{aligned}x(t)=\frac{1}{5185}&\left\{-2\cos(9t)+144\,\text{sen}\,(9t)+e^{-4t}\left[\left(\frac{1039}{2}-\frac{715i}{4}\right)\big(\cos(8it)+i\,\text{sen}\,(8it)\big)\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\frac{1039}{2}+\frac{715i}{4}\right)\big(\cos(-8it)+i\,\text{sen}\,(-8it)\big)\right]\right\}\end{aligned}$$

Fazendo a distributiva,

$$\begin{aligned}x(t)=\frac{1}{5185}&\left\{-2\cos(9t)+144\,\text{sen}\,(9t)\right.\\&+e^{-4t}\left[\frac{1039}{2}\cos(8t)+\frac{1039i}{2}\,\text{sen}\,(8t)-\frac{715i}{4}\cos(8t)+\frac{715}{4}\,\text{sen}\,(8t)\right.\\&\left.\left.+\frac{1039}{2}\cos(-8t)+\frac{1039i}{2}\,\text{sen}\,(-8t)+\frac{715i}{4}\cos(-8t)-\frac{715}{4}\,\text{sen}\,(-8t)\right]\right\}\end{aligned}$$

Utilizando das propriedades $\cos(-x) = \cos(x)$ *e* $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

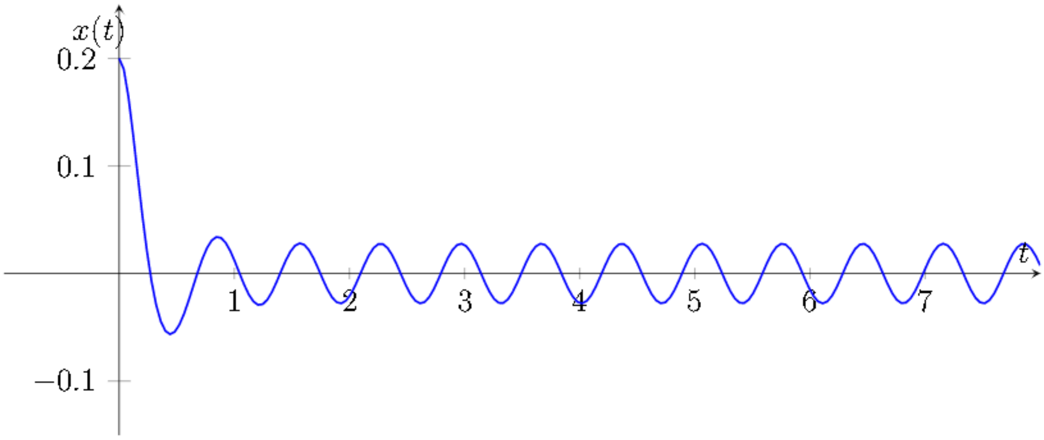
$$x(t) = \frac{1}{5185}\left\{-2\cos(9t) + 144\operatorname{sen}(9t) + e^{-4t}\left[\frac{1039}{2}\cos(8t) + \frac{1039i}{2}\operatorname{sen}(8t) - \frac{715i}{4}\cos(8t)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{715}{4}\operatorname{sen}(8t) + \frac{1039}{2}\cos(8t) - \frac{1039i}{2}\operatorname{sen}(8t) + \frac{715i}{4}\cos(8t) + \frac{715}{4}\operatorname{sen}(8t)\right]\right\}$$

Simplificando,

$$x(t) = \frac{1}{5185}\left\{-2\cos(9t) + 144\operatorname{sen}(9t) + e^{-4t}\left[1039\cos(8t) + \frac{715}{2}\operatorname{sen}(8t)\right]\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{5185}\left[-2\cos(9t) + 144\operatorname{sen}(9t) + 1039\cos(8t)e^{-4t} + \frac{715}{2}\operatorname{sen}(8t)e^{-4t}\right] \quad (4.8)$$

Figura 4.9: Gráfico de 4.8



Fonte: Próprio autor.

Como se pode ver nesse exemplo, a força externa supera o amortecimento, assim o movimento da mola tende a um Movimento Harmônico Simples. É fácil observar isso, uma vez que $\lim_{t\to\infty}\left[-2\cos(9t) + 144\operatorname{sen}(9t)\right]$ *é indeterminado e* $\lim_{t\to\infty}$ $\left[1039\cos(8t)e^{-4t} + \frac{715}{2}\operatorname{sen}(8t)e^{-4t}\right] = 0$

5 CONCLUSÃO

Conforme a sua proposta, este trabalho apresenta um breve recorte referente ao tema da Transformada de Laplace. Cumpre-se o objetivo de na medida do possível apresentar uma linguagem mais simples que a encontrada em outros materiais, assim como a busca de apresentar detalhes muitas vezes omitidos por diversos autores. É impossível apresentar o conteúdo referente à Transformada de Laplace de forma exaustiva, assim como os detalhes e aplicações, uma vez que mesmo dentro de um considerável recorte, existe uma vasta gama de informações a respeito da Transformada de Laplace. Apesar de suas limitações, este trabalho atinge sua proposta: apresentar um material prático para uso em sala de aula na disciplina de Equações Diferenciais, seja pelo professor como uma referência, seja pelos alunos como material de apoio.

REFERÊNCIAS

BALL, W. W. Rouse. **A Short Account of the History of Mathematics**. 4. ed. New York: Dover Publications, 1908.

NOVOA, Cristian P. **Introdução à álgebra linear**. Goiânia: UCG, 2006. v. 1.

O'CONNOR, J J; ROBERTSON, E F. **Pierre-Simon Laplace.** Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace/>. Acesso em: 23 set. 2020.

SCHIFF, Joel L. **The Laplace Transform**: Theory and Applications. New York: Springer, 1999.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 1.

________.________. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 2.

STIGLER, Stephen M. Laplace's Early Work: Chronology and Citations. **Isis**, [The University of Chicago Press, The History of Science Society], v. 69, n. 2, p. 234–254, 1978.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Differential equations with boundary-value problems**. 7. ed. Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009.

________. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Makron, 2001. v. 1.