PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES - EFPH
PUC-GO

GUILHERME TAVARES PACHECO

UM ESTUDO SOBRE A EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

Licenciatura em Matemática

Goiânia
2023

GUILHERME TAVARES PACHECO

UM ESTUDO SOBRE A EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

BANCA EXAMINADORA

____

Professor Orientador Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz – Pontifícia Universidade Católica de Goiás-PUC-GO

____

Componente da Banca Examinadora – Me. Gean Henrique de Godoi - Instituto Federal de Goiás-IFG

____

Componente da Banca Examinadora – Me. Anna Carollyna Torquato Ferreira- Instituto Federal de Goiás-IFG

____

Componente da Banca Examinadora – Me. Jordana de Oliveira do Amaral- Instituto Federal de Goiás-IFG

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura, pelo Curso Matemática da Pontificia Universidade Católica. Orientador: Prof° Dr. Duelci Aparecido Freitas Vaz .

Goiânia

2023

A minha família e amigos, a todos meus professores que participaram direta ou indiretamente da minha formação, minha gratidão. e ao meu pai José Eustáquio Pacheco (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela saúde, pela vida e pela incrível oportunidade de me dedicar a essa tão amada e bela ciência que é a matemática. Expresso minha gratidão à minha família e amigos, que, mesmo diante das limitações de minha presença habitual, sempre me apoiaram e não permitiram que eu desanimasse. Um agradecimento especial à minha amada mãe Maria Tavares, pelo qual possuo carinho especial.

Quero expressar minha sincera gratidão ao professor e orientador deste trabalho, Dr. Duelci Vaz, pela compreensão e estímulo na elaboração deste TCC, bem como pelas valiosas aulas e pelo conhecimento compartilhado. Agradeço também aos professores do curso de matemática da PUC, cuja influência foi fundamental para minha formação social, humana e profissional.

À minha turma de matemática, meus queridos companheiros e amigos, agradeço por tornarem este processo mais feliz e único. A todos que contribuíram direta ou indiretamente para essa jornada, meu sincero obrigado.

RESUMO

O presente trabalho tem como tema a equação geral das cônicas e justifica-se como um texto voltado a fornecer *insights* importantes a professores que irão ensinar acerca desse tema e também para outros interessados, é feita uma abordagem das tecnologias como aliada ao processo de ensino aprendizagem. O objetivo geral é discutir todos os casos da equação geral das cônicas, tais como, Elipse, Hipérbole, Parábola e alguns casos particulares. Os objetivos específicos incluem uma proposta de ensino baseada na Teoria Historico-Cultural de Vygostky e na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, utilizando o *software* GeoGebra como uma ferramenta tecnologica que auxilia no processo de ensino-aprendizagem.Metodologicamente é uma pesquisa teórica exploratória embasada por pesquisa bibliográfica e de natureza qualitativa. O texto se constituí em uma contextualização histórica, capítulos especificos para tratar de cada caso com demonstrações e exemplos, um capítulo apresentando o GeoGebra e algumas de suas funcionalidades e por fim um proposta de ensino das cônicas. Os resultados demonstram a apropriação teórica metodologica das teorias abordadas. Conclui-se a partir desse estudo que o conhecimento específico deve ser alinhado às didádicas e metodologias de ensino. O texto encerra-se com a indicação dos procedimentos para ensino das cônicas e organização do plano de ensino.

Palavras-chave: Cônicas, GeoGebra, Teoria Histórico-Cultural, Ensino Desenvolvimental.

ABSTRACT

The present work has as its theme the general equation of conics and is justified as a text aimed at providing important insights for teachers who will teach about this topic and also for other interested parties, an approach to technologies is taken as combined with the teaching-learning process . The general objective is to discuss all cases of the general equation of conics, such as Ellipse, Hyperbola, Parabola and some particular cases. The specific objectives include a teaching proposal based on Vygostky Historical-Cultural Theory and Davydov Theory of Developmental Teaching, using the GeoGebra software as a technological tool that assists in the teaching-learning process. Methodologically it is an exploratory theoretical research based on bibliographical and qualitative research. The text consists of a historical contextualization, specific chapters to deal with each case with demonstrations and examples, a chapter presenting GeoGebra and some of its features and finally a proposal for teaching conics. The results demonstrate the theoretical and methodological appropriation of the theories covered. It is concluded from this study that specific knowledge must be aligned with didactic and teaching methodologies. The text ends with an indication of the procedures for teaching conics and organization of the teaching plan.
.

Keywords: Conics, GeoGebra, Historic-Cultural Theory, Developmental Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE AS CÔNICAS 11

3 DEFINIÇÕES E TEOREMAS 13

3.1 ELIPSE 13

3.2 HIPÉRBOLE 25

3.3 PARÁBOLA 37

3.4 CASOS PARTICULARES E DISCRIMINANTE 48

4 PROPOSTA DE ENSINO 50

4.1 O GEOGEBRA 50

4.2 A TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E A TEORIA DO ENSINO-DESENVOLVIMENTAL APLICADA AO ENSINO. 55

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:Intersecções gerando as Cônicas 12

Figura 2:Estacas a e b ligadas pela corda 13

Figura 3: Corda ligada à estaca C 13

Figura 4:rastro feito pela estaca C 14

Figura 5: Elipse ao longo do eixo X 14

Figura 6: Elipse com eixo maior ao longo do eixo y 17

Figura 7: Eixo transladado 18

Figura 8:Elipse com eixos transladados 19

Figura 9:Rotação de eixos 21

Figura 10:Elipse com eixo rotacionado 23

Figura 11:Elipse onde aplicamos a rotação de eixos 24

Figura 12: Elipse centrada no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. 25

Figura 13:Reta focal da hipérbole 26

Figura 14: Construção do vértice A_1 da hipérbole 26

Figura 15:Construção do vértice A_2 da hipérbole 26

Figura 16:Posição dos vértices da hipérbole 26

Figura 17:Centro da hipérbole C 27

Figura 18:Pontos do eixo não focal 27

Figura 19:Relação dos comprimentos a, b e c 28

Figura 20:Retângulo de base e Assíntotas da hipérbole 28

Figura 21:Simetria da hipérbole em relação a reta focal 29

Figura 22:Simetria em relação ao centro da hipérbole 30

Figura 23:Simetria da hipérbole em relação a reta não focal 30

Figura 24:Hipérbole ao longo do eixo X 32

Figura 25:Hipérbole ao longo do eixo Y 33

Figura 26:Hipérbole com reta focal paralela ao eixo X 34

Figura 27:Hipérbole com reta focal paralela ao eixo Y 34

Figura 28:Hipérbole com eixo rotacionado. 35

Figura 29:Ângulo θ procurado para a rotação de eixos 35

Figura 30:Hipérbole com equação simplificada 37

Figura 31:Posição do vértice em relação ao foco e à diretriz da parábola 38
Figura 32:Parábola $x^2 = 4py$ 39
Figura 33:Parábola $x^2 = -4py$ 39
Figura 34:Parábola $y^2=4px$ 40
Figura 35:Parábola $y^2=-4px$ 41
Figura 36:Parábola $x^2 = 4py$ 42
Figura 37:Parábola $x^2 = 4py$ 42
Figura 38:Parábola $y^2 = 4px$. 43
Figura 39:Parábola $y^2 = -4px$. 44
Figura 40: Parábola com eixo rotacionado 45
Figura 41:Ângulo θ ideal para a rotação de eixos 45
Figura 42:Parábola $2x^2 + 2y + 1 = 0$ 48
Figura 43:Interface Inicial 51
Figura 44:Ferramentas do GeoGebra 52
Figura 45: Ferramenta/Cônicas 52
Figura 46: Construção da elipse 53
Figura 47:Mensagem de instrução 53
Figura 48: Elipse 54
Figura 49: Janela de álgebra 54

1 INTRODUÇÃO

O estudo das cônicas é uma parte essencial da geometria analítica e da matemática em geral. Essas curvas, que incluem características específicas são denominadas, elipses, hipérboles e parábolas, desempenham um papel fundamental em diversas áreas, desde a física e a engenharia até a astronomia e a biologia. Compreender a equação geral das cônicas e suas propriedades é um marco importante na formação matemática de estudantes e profissionais. No entanto, ensinar esse conteúdo de forma eficaz e envolvente pode ser um desafio.

O problema central que este trabalho busca abordar é: "Como ensinar as cônicas com uma abordagem metodológica, para além do ensino formal de aprendizagem? " É sabido que as abordagens tradicionais de ensino muitas vezes resultam em desinteresse dos alunos e dificuldade em compreender conceitos complexos. Portanto, é fundamental explorar alternativas pedagógicas que tornem o processo de aprendizagem das cônicas mais dinâmico, participativo e eficaz. Neste contexto, o presente trabalho adota uma abordagem investigativa, fazendo uso do software educacional GeoGebra.

O GeoGebra é uma ferramenta poderosa que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos e cálculos, permitindo uma exploração interativa de conceitos matemáticos. A escolha desse software como parte integrante da metodologia de ensino visa criar um ambiente de aprendizagem ativo, no qual os alunos podem visualizar, manipular e experimentar com as cônicas de forma prática e intuitiva.

O objetivo geral deste estudo é a apropriação teórica a respeito do tema das cônicas e a criação de um método de ensino baseado na teoria histórico cultural de Vasily Davydov e Lev Vygostky, onde o GeoGebra atua como elemento potencializador no processo de mediação, na relação aluno-professor, visando a potencialização da zona de desenvolvimento proximal dos alunos, e que promova o entendimento profundo dessas curvas e sua aplicação em contextos diversos.

É notório que vivemos em tempos de grandes avanços tecnológicos, mas ao voltarmos o olhar para a educação dentro das escolas há predominância ainda de uma metodologia tradicional de ensino. Durante muitos anos vivenciamos os modelos de aulas expositivas com o professor sendo o transmissor de conteúdo dentro sala de aula e o aluno atuando apenas como receptor de conhecimento sem um papel ativo.

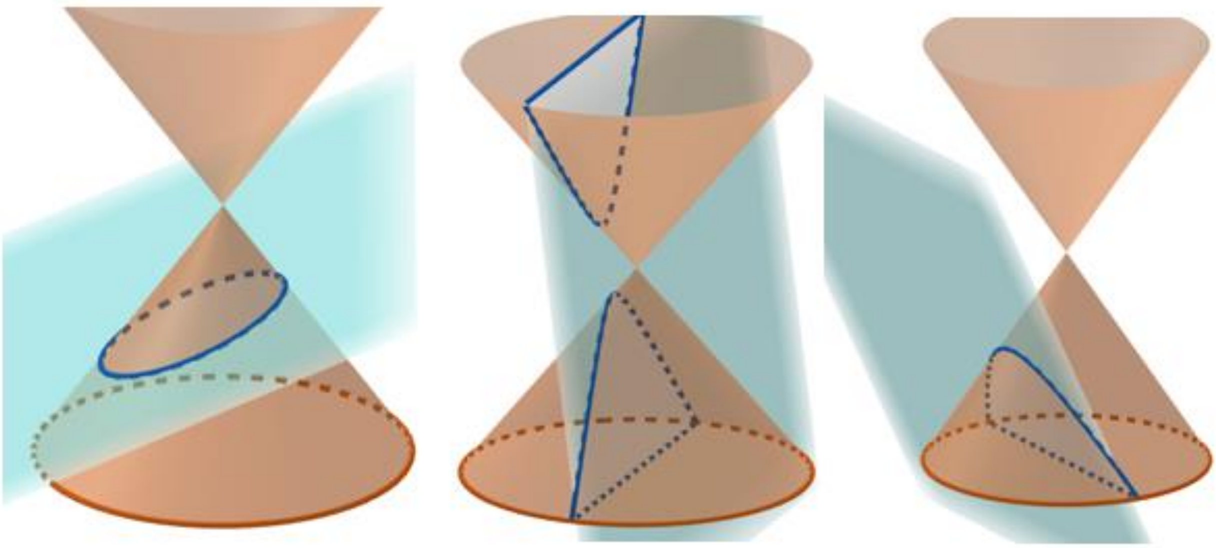
Este trabalho irá após um capítulo teórico sobre as cônicas propor um método de ensino-aprendizagem deste conteúdo onde o aluno é um sujeito ativo e também produtor do conhecimento, fornecendo apoio para um futuro experimento didático formativo.

2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE AS CÔNICAS

Ao consultar os livros de história da matemática como Introdução à História da Matemática de Howard Eves (2011), ou ainda. História da Matemática Carl Boyer, vemos que os estudos sobre as cônicas começaram com Menaecmo (a.C. 380-320 a.C.), amigo de Platão e discípulo de Eudoxo, que segundo Eves (2011) inventou as secções cônicas, motivado pelo problema da duplicação do cubo, isso por volta de 340 anos a.C. A obra de nível mais avançado foi precisamente a feita por Apolônio de Perga (a.C.262-190a.C) que substituiu qualquer estudo anterior.

O tratado sobre as Cônicas certamente foi a obra-prima de Apolônio e teve grande influência no desenvolvimento da matemática. Devido fundamentalmente a este estudo sobre as cônicas ele era conhecido como o Grande geômetra. Secções cônicas é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto. Para Eves (2011) apenas os primeiros sete dos oito livros chegaram até nós, os quatro primeiros em grego e os outros três numa tradução árabe do século IX. Os quatro primeiros livros, dos quais I, II e III, supostamente se baseiam em trabalhos anteriores de Euclides, tratam da teoria elementar genérica das cônicas. Foi Apolônio quem pela primeira vez mostrou que a partir de um único cone é possível obter as três espécies de secções cônicas, apenas variando a inclinação do plano de secção. Também provou que o cone não precisa ser reto. Finalmente substituiu o cone de uma só folha por um cone duplo, sendo assim o primeiro a reconhecer a existência dos dois ramos da hipérbole.

Figura 1:Intersecções gerando as Cônicas



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Após o período grego, O próximo geômetra de peso a debruçar-se sobre os problemas das cônicas foi Pappus (300 – 350), na maior parte dos seus trabalhos referindo-se aos trabalhos de autores anteriores. Suas compilações Coletânea e o Tesouro da Análise permitem o conhecimento indireto e possíveis reconstituições de diversos dos trabalhos perdidos de Euclides, como os Porismas e as Cônicas, além do oitavo livro das Cônicas de Apolônio. Nessas compilações aparece pela primeira vez a propriedade foco e diretriz das cônicas, atribuída por ele a Euclides, mas curiosamente não apresentada por Apolônio, a principal contribuição de Pappus, porém foi a discussão do problema do lugar geométrico de três e quatro linhas e seus estudos posteriores para mais linhas, tal problema foi trabalhado por Apolônio para 3 e quatros linhas. Os matemáticos árabes desempenharam um papel vital na preservação e transmissão do conhecimento sobre as cônicas. Nomes como Al-Khwarizmi (780-850) e Omar Khayyam (1048-1131) traduziram e comentaram as obras de Apolônio, garantindo que essas valiosas informações fossem transmitidas às futuras gerações.

No século XVII, recuperando os textos de Pappus, Descartes debruça-se sobre o então chamado “Problema de Pappus” e, incapaz de resolvê-lo de forma puramente geométrica, desenvolve ideias da sua geometria analítica na solução e prova, na sua Geometria (1637) que o problema de 4 linhas era redutível à solução de uma equação de segundo grau, tendo como caso particular linear o problema de 3 linhas, enquanto para 5 linhas a solução era a de uma equação de terceiro grau, não podendo ser resolvida por régua e compasso, assim como os problemas para mais linhas correspondiam a equações de graus superiores. Nascia assim a correspondência entre as curvas e equações segundo o método cartesiano.

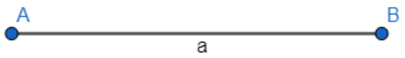
Ainda na idade média, durante o Renascimento Europeu, o estudo das cônicas experimentou um ressurgimento. Matemáticos como Johannes Kepler (1571-1630) que aplicou as cônicas à astronomia, estabelecendo as bases para as leis do movimento planetário, que descrevem com precisão as órbitas elípticas dos planetas, que até hoje são as mais precisas. O estudo das cônicas desempenhou um papel fundamental na evolução das geometrias ao longo da história da matemática, e o livro de história da matemática de Carl B. Boyer (1996) oferece uma perspectiva valiosa sobre essas contribuições, e que sem os estudos das cônicas o surgimento das geometrias não-euclidianas seria algo difícil, as cônicas deram embasamento teórico para o surgimento de várias vertentes como geometria projetiva, analítica e diferencial e as geometrias não euclidianas, como a hiperbólica.

3 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

3.1 Elipse

O método do jardineiro como aponta no livro de Jacir J. Venturi (2019) é uma maneira interessante de construir uma elipse, veja. Um jardineiro cansado da rotina de construir jardins comuns pretende construir um novo formato para um dos seus jardins, então para isso ele pega duas estacas (A e B) e uma corda, então ele fixa as duas estacas no chão a uma certa distância a.

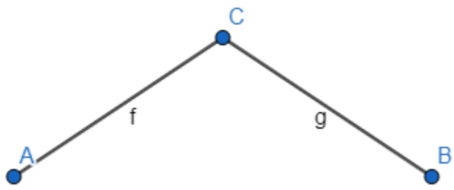
Figura 2:Estacas a e b ligadas pela corda



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Então ele amarra cada ponta da corda a uma estaca (C):

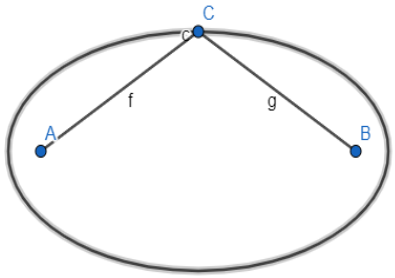
Figura 3: Corda ligada à estaca C



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Feito isso ele começa a girar a estaca (C) entorno das estacas (A, B) sempre mantendo a corda esticada, gerando o seguinte rastro:

Figura 4:rastro feito pela estaca C



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

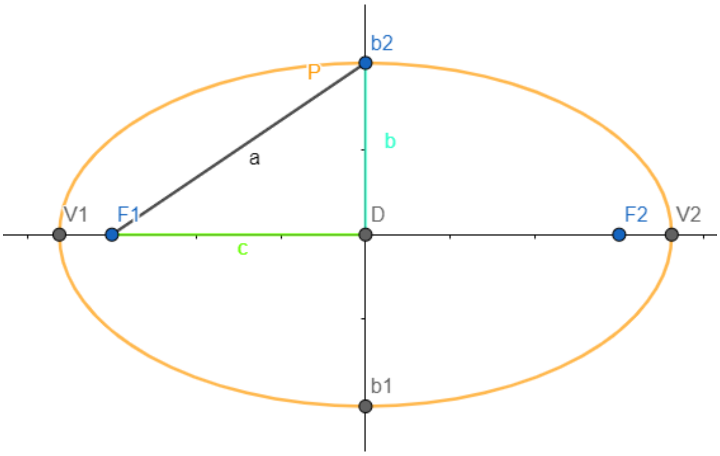
A figura gerada pelo traço da estaca no chão é uma cônica, conhecida como elipse, e tem como definição**:** o conjunto dos pontos P (x, y) do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2, situados no mesmo plano, é a constante 2a, (sendo $2a > 2c$). (IEZZI,2013).

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Elementos da Elipse

Analisando a elipse de forma analítica, a mesma possui elementos importantes e que precisam ser definidos, considere a Elipse a seguir:

Figura 5: Elipse ao longo do eixo X



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Onde:

- D é o centro da elipse

- F_1 e F_2 são os focos
- V_1V_2 é o eixo maior
- b_1b_2 é o eixo menor
- 2b é a distância entre b_1 e b_2
- 2c é a distância focal
- 2v é a distância entre V_1 e V_2

Teorema de Pitágoras

Ainda utilizando a figura (5), podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no triangulo retângulo formado entres os segmentos a b e c, onde teremos a seguinte formula:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Excentricidade

Dados esses elementos pertencentes a qualquer elipse ainda temos o conceito de excentricidade representada pela letra $e = \frac{c}{a}$ que nos diz a quão “achatada” é a elipse, quanto maior for o valor da excentricidade, mais próximo de uma circunferência estará a elipse. Como o eixo maior a é sempre maior que a distância focal c, então $c < a$, devido a isso o valor dessa divisão será sempre um número entre 0 e 1.

Equação de uma elipse

Toda elipse nesse padrão pode ser escrita na fórmula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, o eixo maior está sobre o eixo X. Para chegar a seguinte fórmula passamos por alguns processos algébricos, tomemos como premissa a definição de distância:

D (F_1, P) +D (F_2, P) =2a, quando temos a elipse com centro na origem, temos que

F_2(c, a), F_1(-c, a) e P (x, y)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

subtraindo $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ e elevando ambos os termos ao quadrado temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença de dois termos:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x - c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

anulando os termos em comuns:

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4(cx - a^2) = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

Pelo Teorema de Pitágoras podemos escrever $a^2 - c^2 = b^2$, resultando em:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

$$1 = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$

Finalmente temos a equação conhecida como forma canônica da elipse.

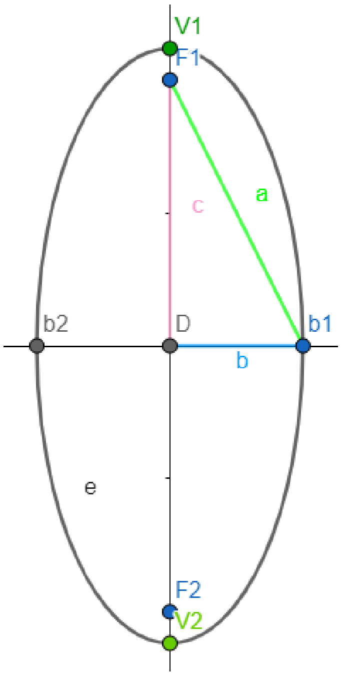
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação de uma elipse com o eixo maior ao longo do Eixo Y

Toda elipse que tem o eixo maior ao longo do eixo Y terá a equação representa por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Figura 6: Elipse com eixo maior ao longo do eixo y



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Essa fórmula possui uma demonstração análoga à primeira e contém os mesmos elementos.

Translação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e seja $\bar{O}$ = (x_0, y_0) um ponto no plano. Seja $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm, respectivamente, o mesmo sentido que estes eixos.

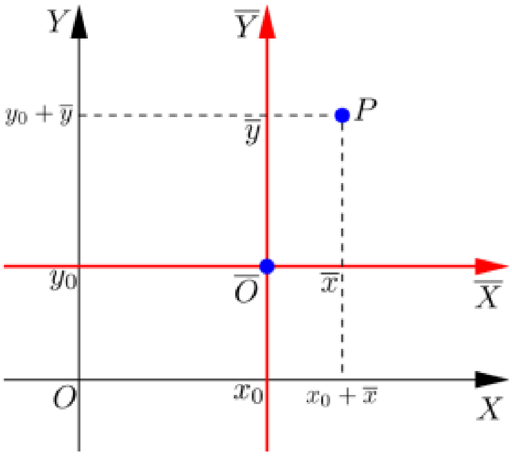
Sejam $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

Então, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ são relacionadas por:

$$x = \bar{x} + x_0$$

$$y = \bar{y} + y_0$$

Figura 7: Eixo transladado



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Elipse com reta focal paralela ao eixo OX

Como o centro $\bar{O}$ = (X_0, Y_0) pertence à reta focal, temos que $y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como d(F_1, $\bar{O}$) = d(F_2, $\bar{O}$) = c, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que

$F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja P = (x, y) = $(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ um ponto pertencente à elipse, onde x, y são suas coordenadas no sistema OXY e $\bar{x}$, $\bar{y}$ são suas coordenadas no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, sendo este obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à elipse se, e somente se, d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a .

Donde vem:

$$d\big((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)\big) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) \leftrightarrow 2a$$

$$d\big((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)\big) + d\big((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)\big) \leftrightarrow 2a$$

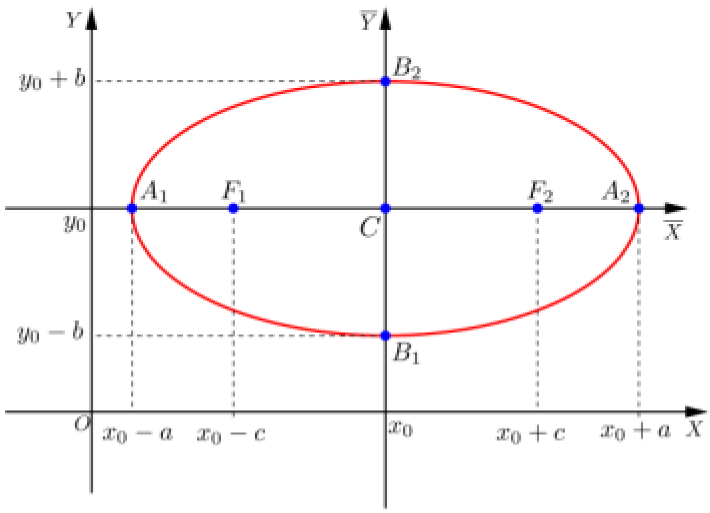
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \text{ indicando } \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

Logo a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (X_0, Y_0) e com eixo maior paralelo ao eixo OX é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad \text{onde } b^2 = a^2 - c^2$$

Os focos são $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$, a reta focal é $y = y_0$, os vértices sobre a reta focal são $A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2(x_0 + a, y_0)$, a reta não focal é $x = x_0$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 + b)$.

Figura 8:Elipse com eixos transladados



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

No caso da reta focal paralela ao eixo OY será análogo ao caso anterior.

Equação da elipse rotacionada

Uma elipse com eixo rotacionado apresenta os mesmos elementos de uma elipse comum, portanto vamos determinar a equação de uma elipse com os eixos rotacionados:

Seja os focos $F_1(1,2)$ e $F_2(-1,0)$, o eixo maior mede $6\sqrt{2}$.

Primeiro vamos determinar o centro da elipse, que no caso é o ponto médio de x e y.

$$C = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+0}{2}\right), C = (0,1)$$

Como sabemos que $2a=6\sqrt{2}$, $a=3\sqrt{2}$ e $2c = d(F_1, F_2)$ temos:

$$\sqrt{(1+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Portanto $c = \sqrt{2}$.

Utilizaremos o teorema Pitágoras para determinar o valor de b.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Substituindo os valores de a e c temos:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = b^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$18 = b^2 + 2$$

$$b^2 = 16, b = 4 \text{ e } 2b = 8$$

A partir dos valores encontrados conseguimos determinar a fórmula dessa elipse utilizando a definição de elipse. $D(P,F_1)+D(P,F_2)= 6\sqrt{2}$, vejamos:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=6\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(6\sqrt{2}-\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=72-12\sqrt{2}*\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)+(x+1)^2+y^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=72-12\sqrt{2}*\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x^2+2x+1+y^2$$

$$12\sqrt{2}*\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4x+4y+68,\text{ simplificando:}$$

$$\left(3\sqrt{2}*\sqrt{x^2+2x+1+y^2}\right)^2=(x+y+17)^2$$

$$18*(x^2+2x+1+y^2)=x^2+2xy+34x+y^2+34y+289$$

$$18x^2+36x+18+18y^2=x^2+2xy+34x+y^2+34y+289$$

$$17x^2-2xy+17y^2+2x-34y-271=0$$

Essa é a equação da elipse que estávamos procurando, e percebemos que ela não se parece com as que já estávamos trabalhando, principalmente pela presença do termo misto 2xy.

Rotação de eixos

Ao estudarmos os livros didáticos do ensino médio, serão poucos os casos em que conseguiremos encontrar um capítulo destinado ao estudo de rotação de eixos, reservando tal conteúdo para a graduação pois necessita de conceitos mais abstratos e técnicas um pouco mais refinadas, mas a fim de contribuir para o ensino de matemática trago aqui uma breve abordagem sobre a rotação de eixos.

Ao analisarmos a elipse com eixo maior ao longo do eixo X, obtivemos uma equação da forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

E com eixo maior ao longo do eixo y, obtivemos uma equação da forma:

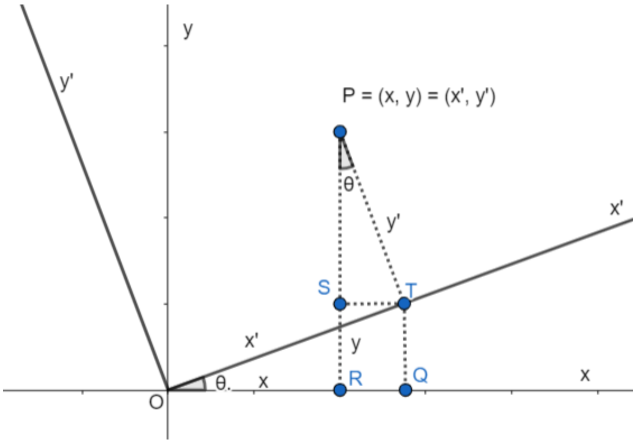
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Repare que as duas equações são bastante parecidas, mas ao analisar uma equação de uma elipse com eixo rotacionado obtemos uma equação totalmente diferente da equação costumeira de uma elipse, o que causa grande espanto entre os alunos, vejamos uma equação de uma elipse com eixo rotacionado:

$$4x^2+2xy+4y^2=15$$

O principal problema que enfrentamos é colocado pelo chamado termo “misto” 2xy no caso apresentado, pois quando esse termo está presente não temos ideia de como identificar o gráfico. Esse termo não aparece nos casos anteriores pois em todos os casos escolhemos cuidadosamente os eixos coordenados numa posição simples e natural, de modo que pelo menos um dos eixos fosse paralelo a um eixo de simetria da curva em consideração. Para resolver este tipo de problema precisaremos construir o instrumental necessário para efetuarmos uma rotação arbitrária de eixos, começamos com o sistema xy e giramos esses eixos no sentido anti-horário de um ângulo θ para obter o sistema $x'y'$, como na figura a seguir:

Figura 9:Rotação de eixos



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Um ponto P do plano terá então dois pares de coordenadas retangulares $(x, y)\ e\ (x', y')$. Para vermos como essas coordenadas estão relacionadas, observamos, a partir da figura, que:

$$x = OR = OQ - RQ = OQ - SQ$$

$$= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$

E

$$y = RP = RS + SP = QT + SP$$

$$= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

Escrevendo essas equações juntas para melhor compreensão.

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta,$$

$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

Elas recebem o nome de equações de rotação de eixos, vejamos um exemplo para quando tivermos um eixo com rotação de θ=30°, então Sen 30°=1/2 e Cos 30°=$\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$, assim:

$$x = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2},\ y = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$$

No exemplo acima partimos de um ângulo já definido, mas chegamos à questão de quando não sabemos qual o ângulo girar para que possamos remover o termo xy, como poderíamos ter certeza de que uma rotação conveniente sempre removerá o termo xy estando ele presente? E, se assim for, como determinar um ângulo de rotação conveniente?

Para isso retornaremos à equação geral de segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Onde aplicamos a equação de rotação de eixos, por um ângulo não especificado θ:

$$A(x'cos\theta - y'\text{sen}\theta)^2 + B(x'cos\theta - y'\text{sen}\theta)^2(x'sen\theta + y'cos\theta) + \text{C}(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta)^2$$
$$+ D(x'cos\theta - y'\text{sen}\theta) + \text{E}(x'sen\theta + y'cos\theta) + F = 0$$

Ao agruparmos os termos semelhantes nas novas variáveis, obtemos uma nova equação cuja forma é a mesma:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

Onde os novos coeficientes estão relacionados aos antigos por meio das seguintes fórmulas:

$$A' = A\,cos^2\theta + \text{B sen}\theta\cos\theta + \text{C sen}^2\theta,$$
$$B' = -2A\,sen\theta\cos\theta + \text{B}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + 2\text{C sen}\theta\cos\theta,$$
$$C' = A\,\text{sen}^2\theta - \text{B sen}\theta\cos\theta + \text{C}\cos^2\theta,$$
$$D' = D\,cos\theta + \text{E sen}\theta,$$
$$E' = -D\,sen\theta + \text{E}\cos\theta,$$
$$F' = F$$

Todas essas fórmulas são para determinar os coeficientes, mas de momento estamos interessados em B’. Se começarmos com uma equação geral do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

em que o termo misto (Bxy) está presente, isto é, B ≠ 0, então podemos determinar sempre um ângulo θ de rotação tal que o novo termo misto seja eliminado. Para determinar um ângulo conveniente θ, fazemos simplesmente B’=0 em:

$$B' = -2A\,sen\theta\cos\theta + \text{B}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + 2\text{C sen}\theta\cos\theta,$$

Obteremos os resultados com maior facilidade utilizando as fórmulas do ângulo duplo:

$$sen\,2\theta = 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$$
$$cos\,2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$

Para escrevermos *B’* como:

$$B' = B\,cos2\theta + (\text{C} - \text{A})\,\text{sen}2\theta.$$

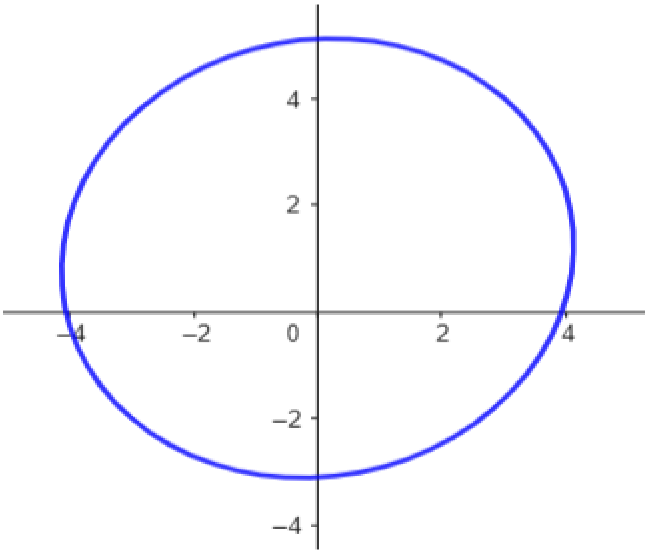
Então B’=0, se escolhermos θ de modo que

$$cotg\ 2\theta = \frac{A-C}{B}.$$

Como B≠0, é sempre possível encontrar tal θ, além disso, ele pode ser escolhido no primeiro quadrante, 0< θ< π/2.

Veja o exemplo abaixo onde temos uma elipse com eixos rotacionados onde encontraremos o ângulo ideal de rotação para eliminarmos o termo misto:

Figura 10:Elipse com eixo rotacionado



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Essa elipse tem como equação:

$$17x^2 - 2xy + 17y^2 + 2x - 34y - 271 = 0$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Pela fórmula: $cotg\ 2\theta = \frac{A-C}{B}$. Obtemos $cotg\ 2\theta = \frac{17-17}{-2} = 0$, ou seja, $\frac{cos2\theta}{sen2\theta} = 0$, donde vem $cos2\theta = 0$, então $2\theta = 90°$ e $\theta = 45°$, indicando o ângulo ideal de rotação para construção de um sistema de coordenadas no qual a equação da elipse se apresenta sem o termo misto.

Assim, a equação:

$A(x'cos\theta - \mathrm{y'sen\theta})^2 + B(x'cos\theta - \mathrm{y'sen\theta})^2(x'sen\theta + \mathrm{y'}cos\theta) + \mathrm{C(x'sen\theta + y'cos\theta)}^2 + D(x'cos\theta - \mathrm{y'sen\theta}) + \mathrm{E}(x'sen\theta + \mathrm{y'}cos\theta) + F = 0$, quando dado os novos coeficientes se apresenta da seguinte forma:

$$17(x'cos45° - y'sen45°)^2 + 2(x'cos45° - y'sen45°)^2(x'sen45° + y'cos45°) + 17(x'sen45° + y'cos45°)^2 + 2(x'cos45° - y'sen45°) - 34(x'sen45° + y'cos45°) - 271 = 0.$$

Onde Cos 45° e Sen 45° ambos valem $\frac{\sqrt{2}}{2}$, resultando em:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \;\; e \;\; y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Desenvolvendo termo a termo:

$$A' = 17\cos^2 45° - 2sen45°cos45° + 17sen^2 45°, A' = 16$$

$$C' = 17sen^2 45° + 2sen45°cos45° + 17\cos^2 45°\,, C' = 18$$

$$D' = 2cos45° - 34sen45°, D' = -16\sqrt{2}$$

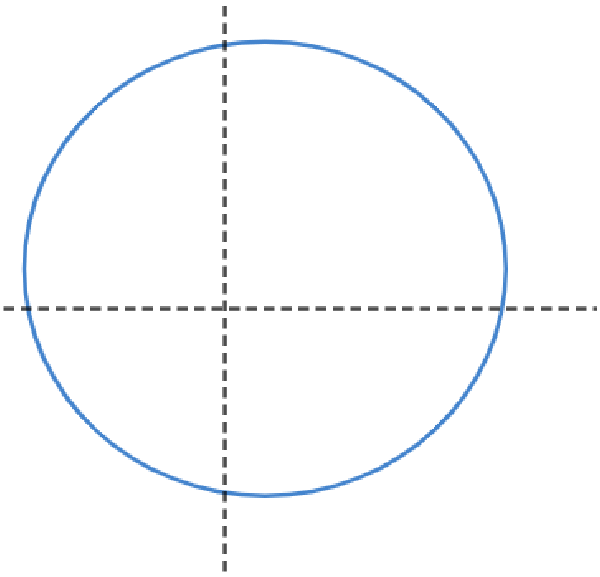
$$E' = -2sen45° - 34cos45°, E' = -18\sqrt{2}$$

$$F' = -271$$

Repare agora que conseguimos desenvolver uma nova equação em função dos coeficientes encontrados e sem presença do termo misto:

$$16\mathrm{x}'^2 + 18\mathrm{y}'^2 - 16\sqrt{2}\mathrm{x}' - 18\sqrt{2}\mathrm{y}' - 271 = 0$$

Figura 11:Elipse onde aplicamos a rotação de eixos



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Por uma translação de eixos, agora conseguimos "centraliza-la" na origem do nosso novo sistema cartesiano, inicialmente o centro da nossa elipse era o ponto (0,1), como fizemos uma rotação de eixos em 45º, nosso novo centro será o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, pela translação de eixos explicitada no capítulo anterior temos uma nova equação em função desse centro:

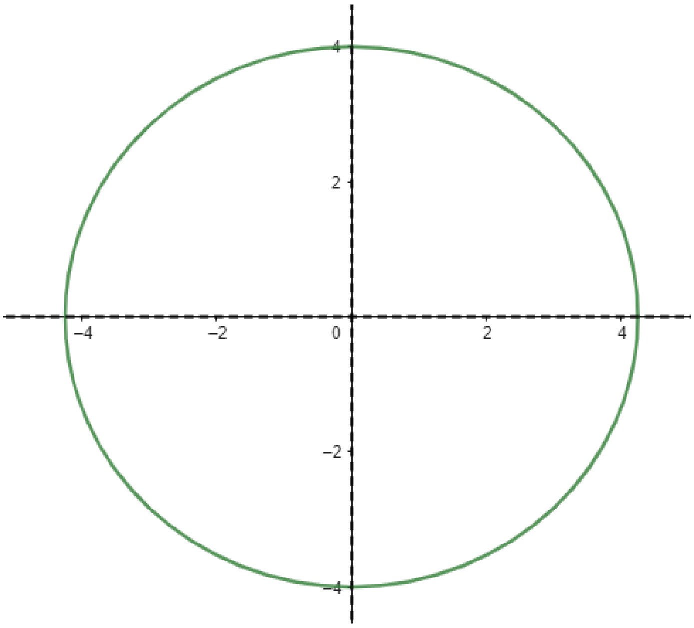
$$\frac{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4^2} = 1$$

ou em função dos novos eixos

$$\frac{\bar{x}^2}{18} + \frac{\bar{y}^2}{16} = 1$$

Resultando na seguinte imagem:

Figura 12: Elipse centrada no ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

3.2 Hipérbole

Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste em todos os pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante 2a > 0, onde 2a menor do que a distância entre os focos 2c > 0. (IEZZI,2013).

$$H = \{ P \ tal \ que \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a \}$$

$$0 < a < c \, ; \, d(F_1, F_2) = 2c$$

Elementos da hipérbole

- Os focos da hipérbole são F_1 e F_2
- A reta que contém os focos é nomeada de reta focal f:

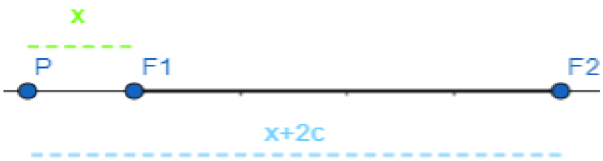
Figura 13:Reta focal da hipérbole

Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

- A intersecção da hipérbole com a reta focal f origina dois pontos A_1 e A_2, que são os vértices da hipérbole. Onde que dado um ponto $P \in f\text{-}F_1F_2$ então $P \notin H$, se P pertence à semirreta de origem F_1 que não contém F_2 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin H$, pois:

$$|d(P,\ F_1)\ -\ d(P, F_2)|\ =\ |x\ -\ (x\ +\ 2c)|\ =\ 2c\ >\ 2a.$$

Figura 14: Construção do vértice A1 da hipérbole

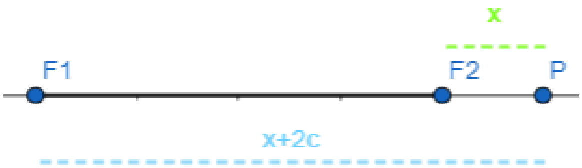


Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

E, se P pertence à semirreta de origem F_2 que não contém F_1 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin$ H, pois:

$$|d(P\ , F_1)\ -\ d(P, F_2)|\ =\ |(x\ +\ 2c)\ -\ x|\ =\ 2c\ >\ 2a.$$

Figura 15:Construção do vértice A2 da hipérbole



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Considere agora que $A_1 \in F_1F_2 \cap H$ tal que $d(A_1\ , F_1)\ =\ x$ e $0 < x < c$, temos a posição dos vértices da hipérbole em relação aos focos:

Figura 16:Posição dos vértices da hipérbole

Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos:

$$|d(A1, F_1) - d(A1, F_2)| = 2a \Leftrightarrow |x - (2c - x)| = 2a \Leftrightarrow |2x - 2c| = 2a \Leftrightarrow 2c - 2x = 2a \Leftrightarrow x = c - a\,.$$

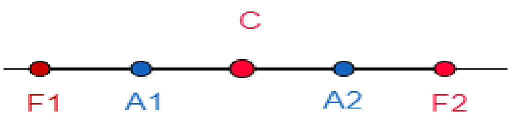
Logo, o ponto A_1 de F_1F_2, distante c − a de F_1, pertence à hipérbole. Da mesma forma, o ponto A_2 de F_1F_2, distante c − a de F_2, pertence à hipérbole H.

- O segmento A_1A_2 é denominado eixo focal da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.

- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o centro da hipérbole. Este ponto é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos:

$$C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

Figura 17:Centro da hipérbole C



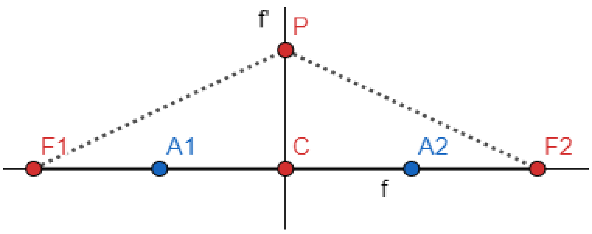
Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Em que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$

- A reta f', que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal f é a reta não focal da hipérbole. Como f' é a mediatriz do segmento F_1F_2, a hipérbole não intersecta a reta não focal f' , pois, se $P \in f'$, temos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a$$

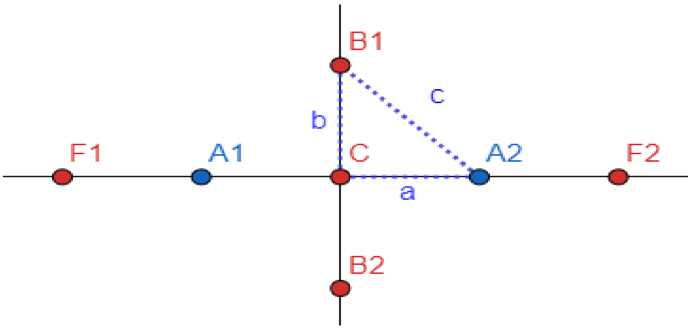
Figura 18:Pontos do eixo não focal



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

- O segmento B_1B_2 perpendicular ao eixo focal que tem C como ponto médio e comprimento 2b, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado eixo não focal da hipérbole, e

Figura 19:Relação dos comprimentos a, b e c

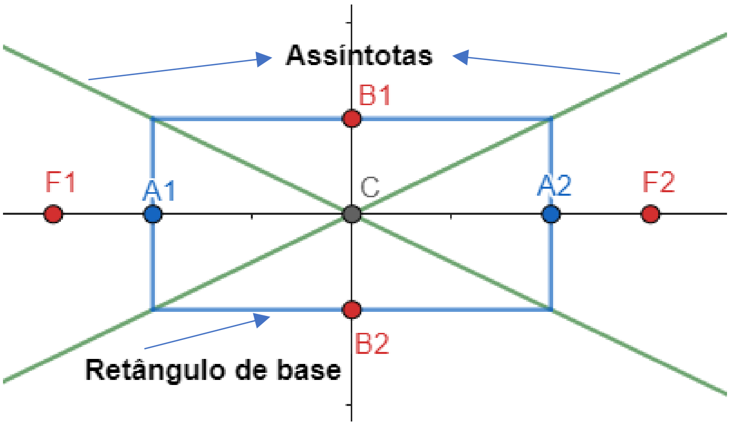


Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole.

- O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado excentricidade da hipérbole. Note que e > 1, pois c > a.
- O retângulo de base da hipérbole H é o retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados, e as retas que contêm as diagonais do retângulo de base da hipérbole H são as assíntotas de H.
- Assíntotas da hipérbole H são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal.

Figura 20:Retângulo de base e Assíntotas da hipérbole



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Pelo teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base da hipérbole H têm comprimento 2c, e a distância do centro de H a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c.

- Dizemos que uma hipérbole é equilátera, se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, a = b. O retângulo de base de uma hipérbole equilátera é, na realidade, um quadrado. Em particular, as retas que contêm as suas diagonais, ou seja, suas assíntotas, intersectam-se perpendicularmente.

- Duas hipérboles cujo eixo focal de cada uma é igual ao eixo não focal da outra são denominadas hipérboles conjugadas. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, mesmas assíntotas e os focos a uma mesma distância do centro.
- SIMETRIA: A hipérbole H é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro, vamos verificar usando congruência de triângulos:

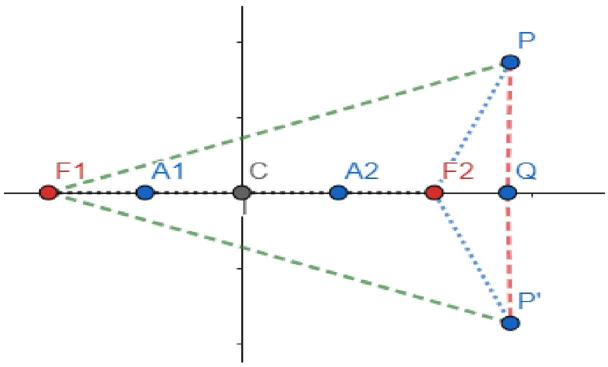
Em relação a reta focal observe que se P ∈ H e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\Delta F_2PQ \equiv \Delta F_2P'Q \; e \; \Delta F1PQ \equiv \Delta F_1P'Q \; .$$

Em distância, $|F_2P| = |F_2P'| \; e \; |F_1P| = |F_1P'|$. Logo,

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P',F_1) - d(P',F_2)| \Rightarrow P' \in H \, .$$

Figura 21:Simetria da hipérbole em relação a reta focal



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

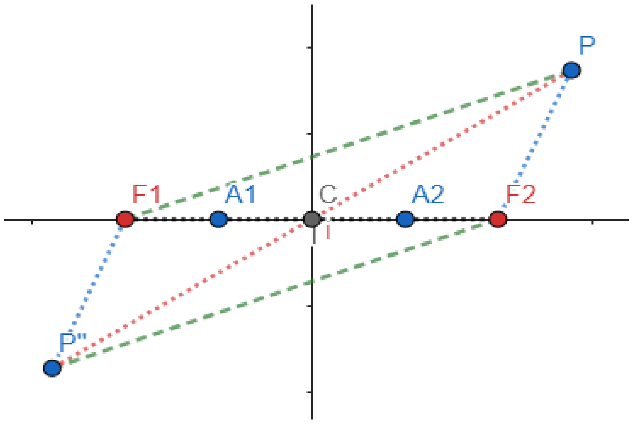
Vejamos agora a simetria em relação ao centro da hipérbole, se P ∈ H e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então:

$$\Delta PCF_2 \equiv \Delta P''C\,F_1 \; e \; \Delta\, F_1CP \equiv \Delta F_2CP'' \; .$$

De modo que, $|F_2P| = |F_1P''| \; e \; |F_1P| = |F_2P''|$. Então,

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P'',F_2) - d(P'',F_1)| \Rightarrow P'' \in \; H$$

Figura 22:Simetria em relação ao centro da hipérbole



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

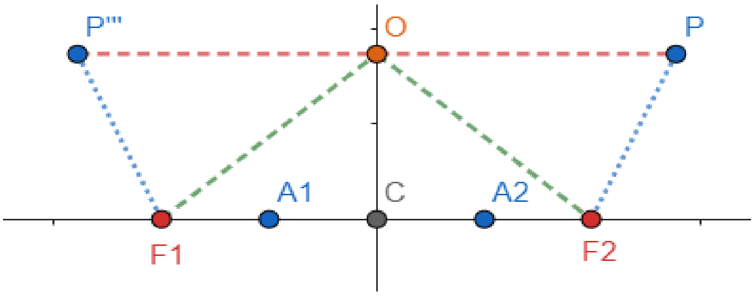
O último caso de simetria <u>em relação a reta não focal</u>, seja P ∈ H e P''' é o simétrico de P em relação a reta não focal, ou seja:

$$\Delta POF_2 \equiv \Delta P'''O\ F_1\ e\ \Delta\ F_1OC \equiv \Delta FOP'''\ .$$

Em módulo, $|F_2P| = |\ F_1P'''|\ e\ |F1P| = |F_2P'''|$, resultando em:

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P''',F_2) - d(P''',F_1)| \Rightarrow P''' \in\ H$$

Figura 23:Simetria da hipérbole em relação a reta não focal



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Equação da hipérbole

Primeiro vamos desenvolver com a reta focal sendo o eixo x e a reta não focal sendo o eixo y. Neste caso:

$$F_1(-c,0), F_2(c,0), A_1(-a,0), A_2\ (a,0), B_1(0,-b)\ e\ B_2(0,b).$$

$$P\ =\ (x,y)\ \in\ H\ \Leftrightarrow\ |d(P,F_1)\ -\ d(P,F_2)|\ =\ 2a$$

$$d(P,F_1)\ -\ d(P,F_2)\ =\ 2a \text{ (Ramo direito de H) ou}$$

$$d(P,F_1)\ -\ d(P,F_2)\ =\ -2a \text{ (Ramo esquerdo de H)}$$

$$\sqrt{(x\ +\ c)^2 +\ y^2} -\ \sqrt{(x\ -\ c)^2 + y^2}\ =\ 2a \text{ (Ramo direito de H) ou}$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -2a \text{ (Ramo esquerdo de H)}$$

Desenvolvendo para o ramo direito temos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2+y^2 = (2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{x-c^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4(cx-a^2) = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(cx-a^2)^2 = a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2+a^4 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2c^2-a^4 = (c^2-a^2)x^2-a^2y^2$$

$$a^2(c^2-a^2) = (c^2-a^2)x^2-a^2y^2$$

Pelo teorema de Pitágoras temos que $b^2 = c^2 - a^2$

$$a^2b^2 = b^2x^2-a^2y^2$$

Onde temos a forma canônica da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

As assíntotas dessa hipérbole são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação ao eixo−OX (reta focal). Logo as assíntotas são as retas $y = \pm \frac{b}{a} x$, ou seja, $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$. Partindo dessas equações podemos explicar o porquê do nome assíntotas, utilizando a noção de distância entre um ponto e uma reta, seja o ponto $P(x,y) \in a\ hipérbole\ H$ então vale a seguinte relação mostrado acima $a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$, agora seja a equação da assíntota A_+, $bx - ay = 0$, a distância entre o ponto P e a reta A_+ é dada por:

$$d(P, \mathrm{A}_+) = \frac{|bx-ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$= \frac{|bx-ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}\frac{|bx+ay|}{|bx+ay|}$$

$$= \frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{\sqrt{b^2+a^2}}\frac{1}{|bx+ay|}$$

$$= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2+a^2}} \frac{1}{\left|bx+ay\right|}$$

Logo podemos dizer que $d(P, \mathrm{A}_+) \to 0$, sempre quando $x \to \mp\infty\ e\ y \to \mp\infty$, essa mesma análise pode ser feita para a assíntota de equação $bx\ +\ ay =\ 0$ ou A-

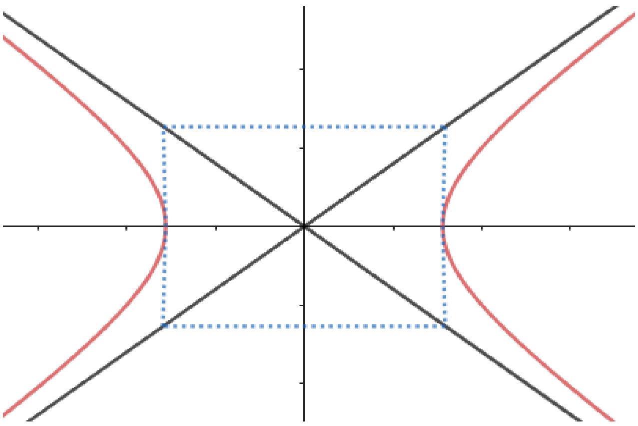
Representação da hipérbole:

Seja a hipérbole da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Seu eixo focal ou eixo maior é correspondente ao eixo X, e possui a seguinte imagem em vermelho:

Figura 24:Hipérbole ao longo do eixo X



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Para representarmos a equação de uma hipérbole com eixo focal ao longo do eixo OY, usamos os mesmos métodos da demonstração anterior, mas no caso o foco da hipérbole estará sobre o eixo OY da seguinte forma:

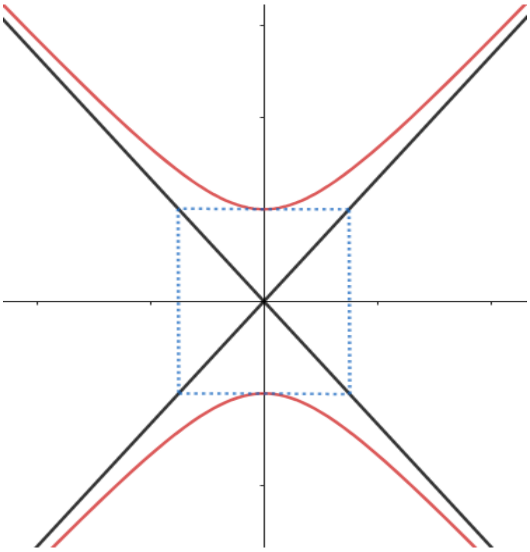
$$F_1\ (0,-c), F_2(0,c), A_1(0,-a), A_2\ (0,a), B_1(-b,0)\ e\ B_2(b,0).$$

Análogo a demonstração anterior chegamos a seguinte equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

e possuí a seguinte representação em vermelho:

Figura 25:Hipérbole ao longo do eixo Y



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Hipérbole com reta focal paralela aos eixos coordenados

Utilizaremos o mesmo caso de translação de eixos que foi utilizado para elipse. Seja $P\ (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde $x = \bar{x} + x_0\ e\ \ y = \bar{y} + y_0$ que são suas coordenadas no sistema OXY , e $\bar{x}$, $\bar{y}$ são suas coordenadas no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\bar{O} = (x0, y0)$. Onde P pertence à hipérbole se, e somente se:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \text{ , ou seja:}$$

$$|d((\bar{x} + x0, \bar{y} + y0), (x0 - c, y0)) - d((\bar{x} + x0, \bar{y} + y0), (x0 + c, y0))| \leftrightarrow 2a$$

$$|d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) - d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0))| \leftrightarrow 2a$$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

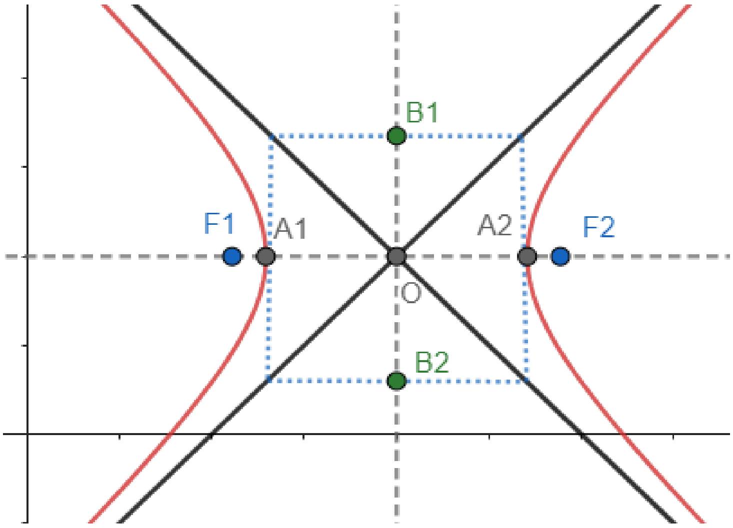
Então a forma canônica da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e a reta focal paralela ao eixo X é

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

- Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F2 = (x_0 + c, y_0)$
- A reta focal é $f : y = y_0$
- Os vértices são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A2 = (x_0 + a, y_0)$
- A reta não focal é $f': x = x_0$
- Os vértices imaginários são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$

- As assíntotas são as retas $(y - y_0) = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, ou seja, $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$ e $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$

Figura 26:Hipérbole com reta focal paralela ao eixo X

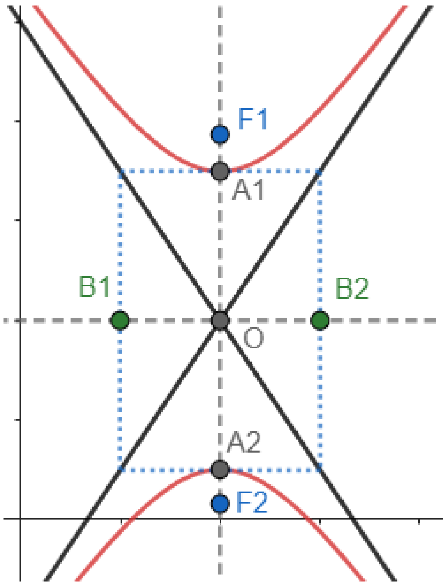


Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

De forma análoga teremos a hipérbole com a reta focal paralela ao eixo OY, representada pela equação:

$$\frac{(y-y0)^2}{a^2} - \frac{(x-x0)^2}{b^2} = 1.$$

Figura 27:Hipérbole com reta focal paralela ao eixo Y

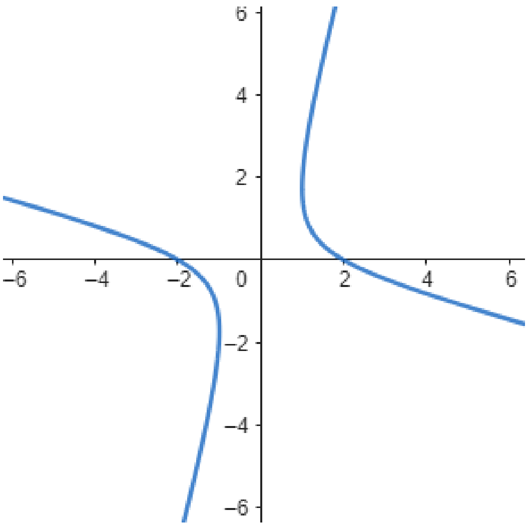


Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Aplicação de rotação de eixos para a Hipérbole

Como apresentamos anteriormente construímos um aparato onde conseguimos eliminar o termo misto de uma equação de uma cônica que está com eixo rotacionado, de modo análogo repetiremos o processo, só que agora para equação de uma hipérbole que está com eixo rotacionado, seja a hipérbole representada pela equação $2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^2 = 8$, cuja representação gráfica é a seguinte:

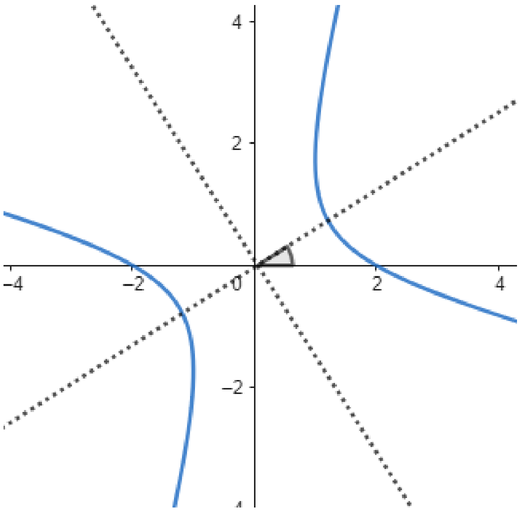
Figura 28:Hipérbole com eixo rotacionado.



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Repare que procuramos um ângulo ideal θ, para que façamos uma rotação de eixos, de modo com que a reta focal da hipérbole coincida com um dos eixos coordenados, conforme imagem a seguir:

Figura 29:Ângulo θ procurado para a rotação de eixos



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Para determinar qual deve ser o ângulo utilizado vamos relembrar a equação geral das cônicas e compara-la com a equação atual:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^2 = 8$$

Repare que os valores dos coeficientes são $A = 2, B = 4\sqrt{3}, C = -2 \ e \ F = -8$, os demais coeficientes não estão presentes nesse exemplo. O nosso interesse é fazer com que B seja 0, eliminando assim o termo misto, utilizando da fórmula:

$$cotg\ 2\theta = \frac{A-C}{B}.$$

Substituindo os valores temos:

$$cotg\ 2\theta = \frac{2+2}{4\sqrt{3}}$$

$$cotg\ 2\theta = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$cotg\ 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$cotg\ 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

O ângulo ideal θ é 30°.

Basta agora encontrarmos os novos coeficientes A' e C' em relação ao ângulo de 30°, para isso utilizaremos das seguintes equações já desenvolvidas anteriormente:

$$A' = A\ cos^2\theta + \mathrm{B\ sen\theta\ cos\theta} + \mathrm{C\ sen^2\theta}$$

$$C' = A\ \mathrm{sen^2\theta} - \mathrm{B\ sen\theta\ cos\theta} + \mathrm{C\ cos^2\theta}$$

$$F' = F$$

Vamos desenvolver primeiro para o A’, substituindo os valores temos:

$$A' = 2\ cos^2 30° + 4\sqrt{3}\ \mathrm{sen}30°\ \cos 30° - 2\ \mathrm{sen}^2 30°$$

$$A' = 2\ \frac{3}{4} + 4\sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{4}\ - \frac{1}{2}$$

$$A' = \frac{6}{4} + \frac{12}{4} - \frac{1}{2}$$

$$A' = \frac{6+12-2}{4}$$

$$A' = 4$$

Vamos desenvolver agora o coeficiente C':

$$C' = 2\mathrm{sen}^2 30° - \ 4\sqrt{3}\mathrm{sen}30°\cos 30° - 2\ \cos^2 30°$$

$$C' = \frac{1}{2} - \ 4\sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{6}{4}$$

$$C' = \frac{1}{2} - \ \frac{12}{4} - \frac{6}{4}$$

$$C' = \frac{2 - 12 - 6}{4}$$

$$C' = -4$$

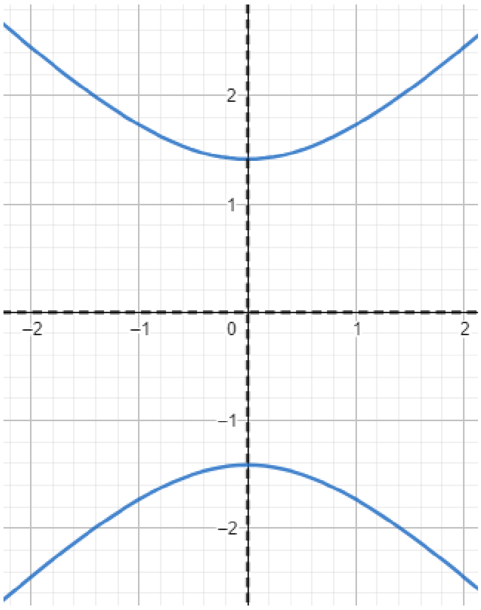
Já possuímos agora todos os coeficientes necessários para determinar a nova equação da hipérbole com eixos rotacionados são eles $A' = 4\,, C' = -4 \ e \ F' = 8$, a nova equação então terá o seguinte formato:

$4x^2 - 4y^2 + 8 = 0$, dividindo ambos os lados da equação por -8 temos,

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Está é uma equação familiar de uma hipérbole com eixo focal coincidente com o eixo x e possuí a seguinte representação gráfica:

Figura 30:Hipérbole com equação simplificada



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

3.3 Parábola

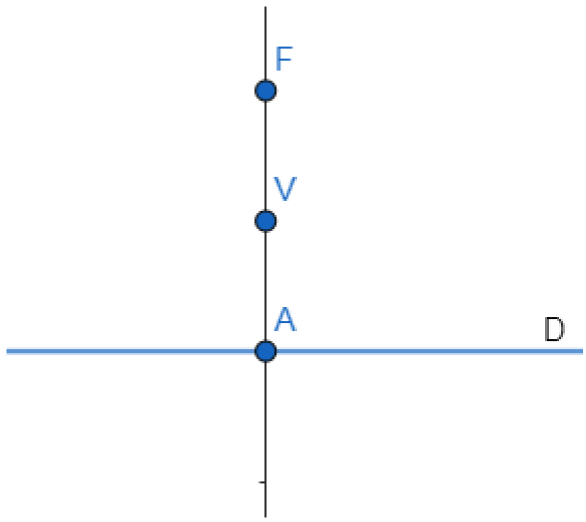
Sejam D uma reta no plano e F um ponto no plano não pertencente a D. A parábola P de diretriz D e foco F é o conjunto que consiste de todos os pontos P do plano, equidistantes do ponto F e da reta D, (IEZZI,2013).

$$P = \{P \mid d(P,F) = d(P,D)\}$$

Elementos da parábola

- O ponto F é o foco e a reta D é a diretriz da parábola.
- A reta L que contém o foco e é perpendicular à diretriz D é chamada reta focal da parábola.
- O vértice da parábola é o ponto V da reta focal, equidistante de F e de D. em que V ∈ P.
- Se A é o ponto onde D intersecta L, então V é o ponto médio do segmento AF, ou seja:
$$V = \frac{A+F}{2}$$
- O número $2p = d(F,D)$ é o parâmetro da parábola. Note que $d(V,F) = d(V,D) = p$.

Figura 31:Posição do vértice em relação ao foco e à diretriz da parábola



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Equação da Parábola

Vamos desenvolver primeiro com a reta focal coincidente com eixo y, isto é, o foco está sobre o eixo y, e a diretriz é paralela com eixo x, de modo que o vértice coincida com a origem do nosso sistema cartesiano, então os pontos são:

$$V = (0,0), F = (0,P), D\colon y = -P$$

Seja P um ponto (x,y) arbitrário que pertença a parábola, pela definição temos que:

$$d(P,F) = d(P,D)$$

Calculando esta distância com as coordenadas dos pontos:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |\ y + p\ |$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

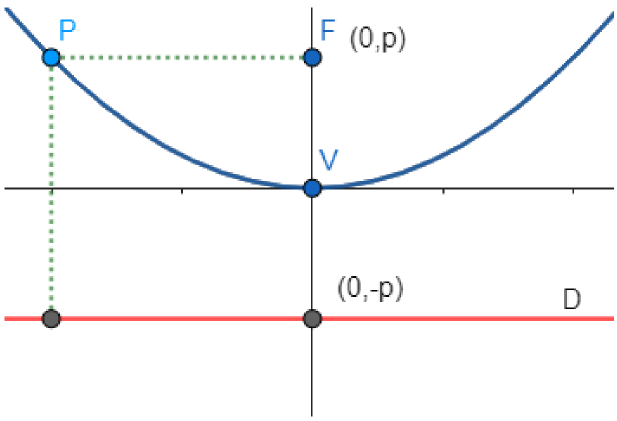
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Eliminando os termos semelhantes na igualdade temos:

$$x^2 = 4py$$

Esta é a forma canônica de uma parábola que tem, o foco sobre o eixo y e acima da diretriz paralela ao eixo x, dizemos costumeiramente que a concavidade está voltada para cima, sua imagem é:

Figura 32:Parábola x^2=4py



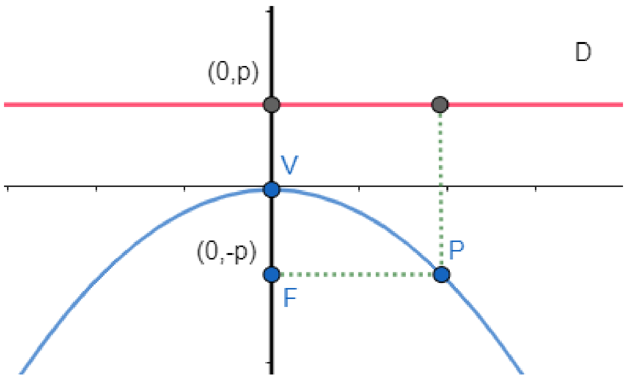
Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

A parábola em que o foco fica situado abaixo da reta diretriz, tem demonstração análoga a anterior e possui a seguinte equação:

$$x^2 = -4py$$

Sua imagem é:

Figura 33:Parábola x^2=-4py



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Vamos desenvolver agora a equação de uma parábola com eixo focal coincidente com eixo X, isto é o foco F está sobre o eixo X e a reta diretriz é paralela ao eixo Y, onde o vértice da parábola coincide com a origem do sistema cartesiano, os pontos agora são:

$$V = (0,0), F = (P,0), D = y = -P$$

Utilizando novamente da definição de parábola, seja P um ponto (x, y) arbitrário que pertença a parábola, temos que:

$$d(P,F) = d(P,D)$$

Calculando esta distância com as coordenadas dos pontos:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |\ x + p\ |$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

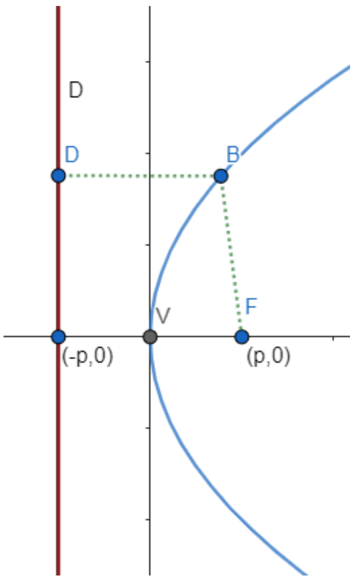
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Eliminando os termos semelhantes na igualdade temos:

$$y^2 = 4px$$

Esta é a forma canônica de uma parábola que tem, o foco F sobre o eixo x e a direita reta da diretriz paralela ao eixo x, dizemos costumeiramente que a concavidade está voltada para cima, sua imagem é:

Figura 34:Parábola y^2=4px

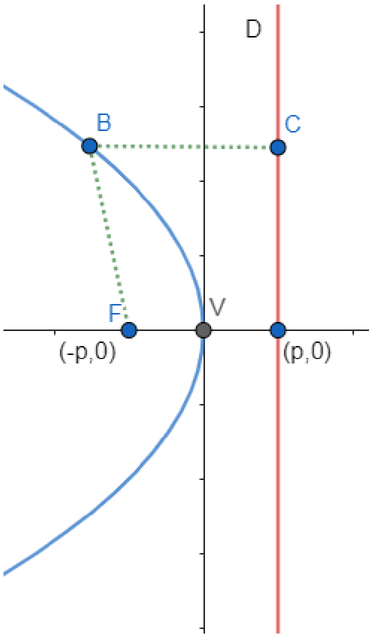


Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

A parábola em que o foco fica situado a esquerda da reta diretriz, tem demonstração análoga a anterior e possui a seguinte equação:

$$y^2 = -4px$$

Figura 35:Parábola y^2=-4px



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Parábola com vértice fora da origem V = (x0, y0) e reta focal paralela ao eixo−OY

Para obtermos a forma canônica da parábola de vértice no ponto V = (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY, considere um sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, com origem $\bar{O}$ = V = (x_0, y_0) e eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente. Uma ilustração é dada na Figura 6, na sessão sobre translação de eixos.

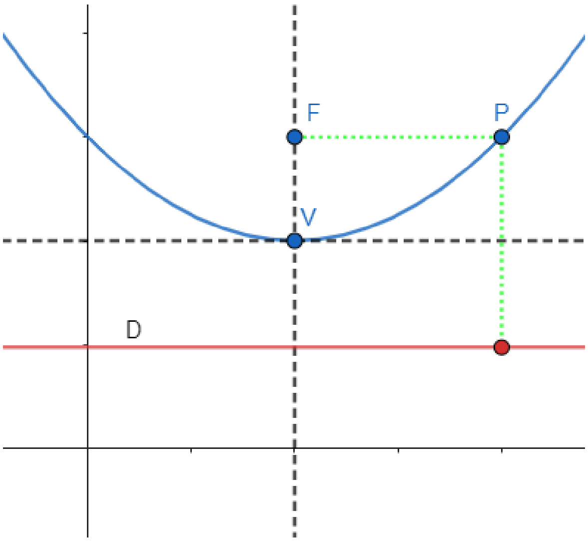
Sabemos que a equação da parábola no sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ é $\bar{x}^2 \ = \ 4p\bar{y}$. onde, neste sistema de coordenadas, o foco é $\bar{F} \ = \ (0, P)$, o vértice é $\bar{V} \ = \ (0, 0)$; a diretriz é $D \ : \ y \ = -p$ e a reta focal é $\bar{x} \ = \ 0$. Como:

$$x = \bar{x} + x_0$$

$$y = \bar{y} + y_0$$

temos que a equação da parábola no sistema OXY é: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.

Figura 36:Parábola $\bar{x}^2 = 4p\bar{y}$



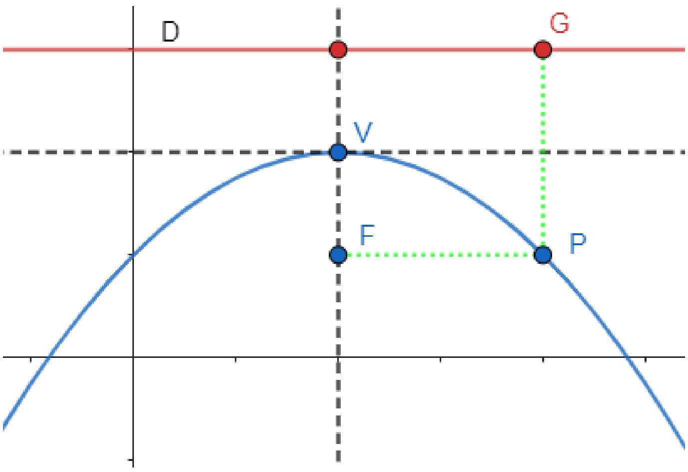
Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023

Já no sistema convencional OXY o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$; o vértice é V = (x_0, y_0); a diretriz é $D = y = y_0 + p$ e a reta focal é $x = x_0$.

A parábola no sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ em que o foco fica abaixo da reta diretriz tem a equação $\bar{x}^2 = -4p\bar{y}$. Além disso, neste sistema de coordenadas, o foco é $\bar{F} = (0, -P)$; *o* vértice é $\bar{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\bar{D}$: $\bar{y} = p$ e a reta focal é $\bar{x} = 0$, ou seja*:*

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0).$$

Figura 37:Parábola $\bar{x}^2 = 4p\bar{y}$



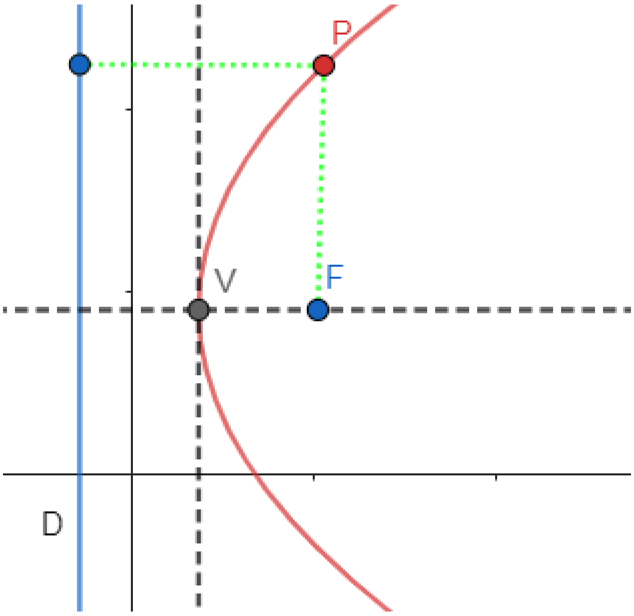
Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Além disso, no sistema de coordenadas OXY, o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$; o vértice é V = (x_0, y_0); a diretriz é $D = y = y_0 + p$ e a reta focal é $x = x_0$

Da mesma forma conseguimos fazer o desenvolvimento da equação de uma parábola que tem a reta diretriz paralela ao eixo y, onde no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ sua equação é $\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$. Neste sistema de coordenadas, o foco é $\bar{F} = (p, 0)$; o vértice é $\bar{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\bar{D} = \bar{x} = -p$ e a reta focal é $\bar{y} = 0$ .Em que a equação da parábola no sistema OXY é:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Figura 38:Parábola $\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$.



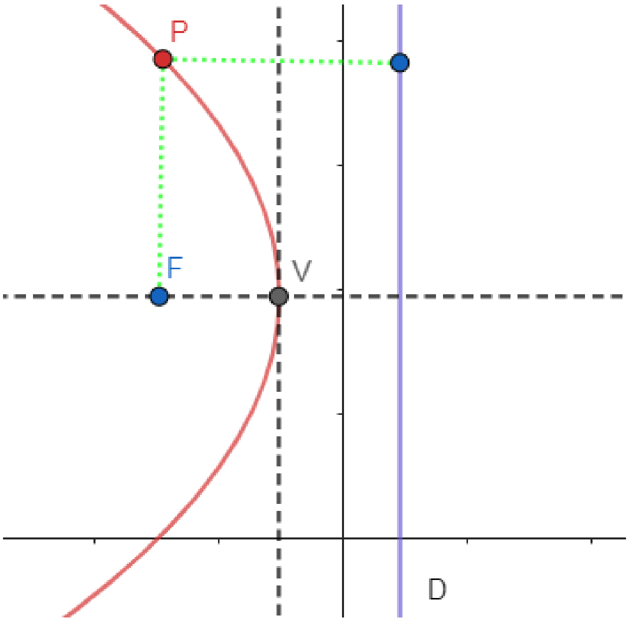
Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

no sistema de eixos OXY, a parábola tem foco $F = (x0 + p, y0)$, vértice $V = (x0, y0)$, diretriz D $x = x0 - p$ e reta focal $y = y0$.

Para a equação da parábola onde o foco fica situa a esquerda do eixo y, temos a equação como $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$. Onde o foco é $\bar{F} = (-p, 0)$; o vértice é $\bar{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\bar{D} = \bar{x} = p$ e a reta focal é $\bar{y} = 0$ .Em que a equação da parábola no sistema OXY. Tem como representação:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0).$$

Figura 39:Parábola $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$.



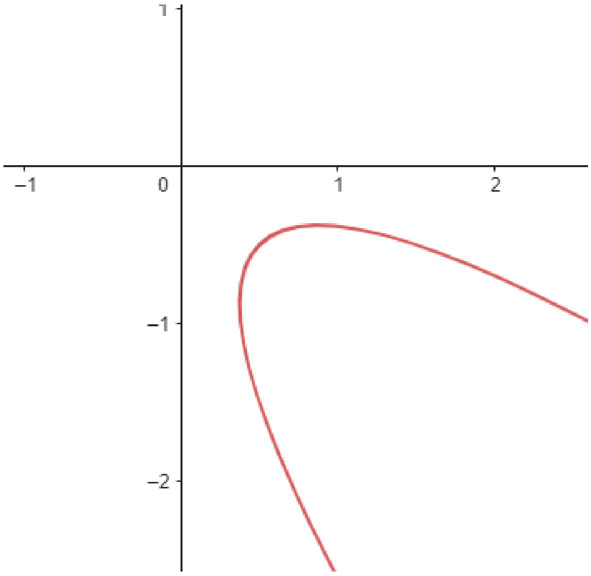
Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

no sistema de eixos OXY, a parábola tem foco $F = (x_0 - p, y_0)$, vértice $V = (x_0, y_0)$, diretriz D $x = x_0 + p$ e reta focal $y = y_0$.

Aplicação de rotação de eixos para a Parábola

Apropriando-se novamente da teoria explicitada em capítulos anteriores, onde construímos um aparato onde conseguimos eliminar o termo misto de uma equação de uma cônica que está com eixo rotacionado, de modo análogo repetiremos o processo, só que agora para equação de uma parábola que está com eixo rotacionado, seja a parábola representada pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$, cuja representação gráfica é a seguinte:

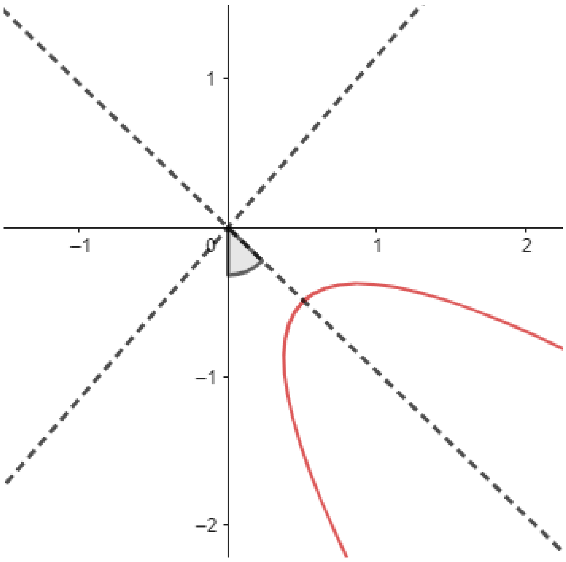
Figura 40: Parábola com eixo rotacionado



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Repare que procuramos um ângulo ideal θ, para que façamos uma rotação de eixos, de modo com que a reta focal da Parábola coincida com um dos eixos coordenados, conforme imagem a seguir:

Figura 41:Ângulo θ ideal para a rotação de eixos



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Vamos fazer uma comparação da equação dessa parábola com a equação geral das cônicas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$$

Os valores dos coeficientes são $A = 1, B = 2, C = 1, D = -1, E = 1$ e $F = 1$. O nosso interesse é fazer com que B seja 0, eliminando assim o termo misto, utilizando da fórmula:

$$cotg\ 2\theta = \frac{A-C}{B}.$$

Substituindo os valores temos:

$$cotg\ 2\theta = \frac{1-1}{2}$$

$$cotg\ 2\theta = \frac{0}{2}$$

$$cotg\ 2\theta = 0$$

O ângulo ideal θ é 45°. Pois:

$$cotg\ 2 * 45° = 0$$

$$cotg\ 90° = 0$$

Restando agora encontrarmos os novos coeficientes A', C', D', E' e F' em relação ao ângulo de 45°, para isso utilizaremos das seguintes equações já desenvolvidas anteriormente:

$$A' = A\,cos^2\theta + \text{B sen}\theta\cos\theta + \text{C sen}^2\theta$$

$$C' = A\,\text{sen}^2\theta - \text{B sen}\theta\cos\theta + \text{C}\cos^2\theta$$

$$D' = D\,cos\theta + \text{E sen}\theta,$$

$$E' = -D\,sen\theta + \text{E}\cos\theta,$$

$$F' = F$$

Desenvolvendo para A':

$$A' = 1cos^2 45° + 2\ \text{sen}45°\cos 45° + 1\text{sen}^2 45°$$

Como o Sen e Cos de 45° são iguais, $Sen45° = Cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$A' = \frac{1}{2} + 2\ \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$A' = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}$$

$$A' = 2$$

Coeficiente C':

$$C' = 1\ \text{sen}^2 45° - 2\ \text{sen}45°\cos 45° + 1\cos^2 45°$$

$$C' = \frac{1}{2} - 2\ \frac{\sqrt{2}}{2} * \ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$C' = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

$$C' = 0$$

Coeficiente D':

$$D' = -1\ cos45° + 1\ \text{sen}45°$$

$$D' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D' = 0$$

Coeficiente E':

$$E' = -(-1)sen45° + 1\ \text{cos}45°$$

$$E' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E' = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$E' = \sqrt{2}$$

Coeficiente $F' = F$

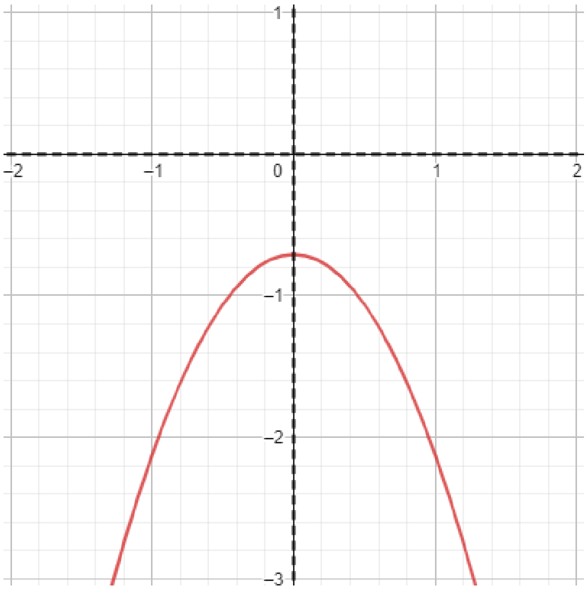
Portanto nossos novos coeficientes são $A' = 2, C' = 0, D' = 0\ E' = \sqrt{2}$

Nossa nova equação será do seguinte formato:

$$2x^2 + \sqrt{2}\,y + 1 = 0$$

Essa equação é representada no plano Oxy pela seguinte imagem:

Figura 42:Parábola $2x^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

É claramente uma Parábola com concavidade voltada para baixo, e o foco pertence ao eixo y, e a reta diretriz é paralela ao eixo x.

3.4 Casos Particulares e Discriminante

Retornando a equação geral das cônicas e admitindo que por uma rotação de eixos eliminamos o termo misto B, o que não nos causa perca de generalidade. Portanto estamos com uma equação geral da seguinte forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A partir dessa equação conseguimos determinar quatro casos e ter certeza de que não há outros, são esses casos:

Uma Circunferência, se $A = C \neq 0$. Em casos particulares, pode ser um único ponto ou o conjunto vazio.

Uma Elipse, se A e C são ambos positivos ou ambos negativos, e $A \neq C$. Novamente, em casos particulares, o gráfico pode ser um único ponto ou o conjunto vazio.

Uma Hipérbole, se A e C têm sinais opostos. Em casos particulares o gráfico pode ser um par de retas concorrentes.

Uma Parábola se $A = 0$ ou $C = 0$, ambos não podem ser 0. Em casos particulares o gráfico pode ser uma reta, duas retas paralelas ou o conjunto vazio.

De outro modo podemos observar essas classificações pelo Discriminante:

$B^2 - 4AC < 0$, para circunferências e Elipses,

$B^2 - 4AC = 0$, no caso de Parábolas,

$B^2 - 4AC > 0$, para hipérboles.

Como evidenciado anteriormente estamos trabalhando com uma cônica que por uma rotação de eixos eliminamos o termo misto Bxy, seja ela representada por:

$$A'x^2 + C'y^2 = 1$$

Conforme os casos acima suponhamos que $A' \neq C'$, ambos positivos, $A' = 4 \; e \; C' = 1$, portanto $B^2 - 4ac < 0$, ficamos com a equação característica de uma elipse:

$$4x^2 + y^2 = 1$$

No caso de ambos os coeficientes serem negativos não ocorre, pois, dois números negativos se somados o resultado não será igual a 1.

Mas no caso quem os sinais são opostos, teremos como resultado uma hipérbole, como exemplo os coeficientes $A' = -4 \; e \; C' = 1$, resultando em:

$$-4x^2 + y^2 = 1 \; ,$$

ou $A' = 4 \; e \; C' = -1$

$$4x^2 - y^2 = 1 \; .$$

Examinando a agora a possibilidade de um desses coeficientes serem iguais a 0, teremos os seguintes casos em que, $A' = -4 \; e \; C' = 0$.

$$-4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{-4}$$

Onde isso não é possível, resultando no conjunto vazio. Onde $A' = 4 \; e \; C' = 0$, teremos:

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

O que resulta em um par de retas concorrentes.

4 PROPOSTA DE ENSINO

Para elaboração dessa proposta de ensino tivemos como orientação a teoria Histórico-Cultural de Lev Vygotsky e a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Vasily Davydov, ambas oferecem uma perspectiva única para analisar como o conhecimento matemático é adquirido e internalizado pelos indivíduos. Ela destaca a importância do ambiente sociocultural e das interações sociais na construção do conhecimento matemático.

Ao mesmo tempo, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) têm potencializado a forma como exploramos e comunicamos ideias matemáticas, tornando-as uma ferramenta poderosa no processo de aprendizado.

Na perspectiva da teoria histórico-cultural, as (TDIC) podem contribuir na aprendizagem de conceitos científico. Esta proposta de ensino investiga como a combinação da Teoria Histórico-Cultural e as TDIC - podem enriquecer nossa compreensão da construção do conceito das cônicas.

Ao explorar o desenvolvimento histórico das cônicas, desde as contribuições dos matemáticos gregos até as aplicações contemporâneas em ciência e tecnologia, analisamos como as interações culturais moldaram e continuam a moldar nosso entendimento dessas curvas. Ao realizar uma análise abrangente das abordagens teóricas e práticas envolvidas na construção do conceito das cônicas, pretendemos oferecer *insights* valiosos para educadores, estudantes e pesquisadores interessados na interseção entre educação matemática e tecnologia.

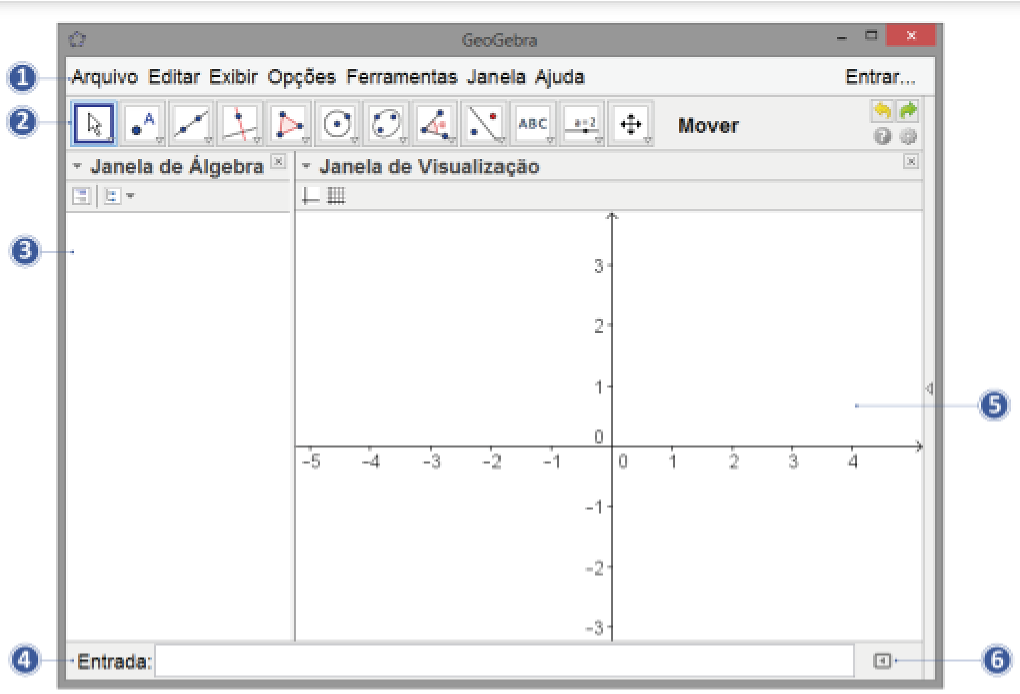
Ao final, esperamos contribuir para a ampliação do conhecimento matemático e aprimoramento das estratégias de ensino-aprendizado neste campo fundamental da matemática, apresentaremos na próxima seção, o *software* ao qual podemos utilizar para contribuir com o desenvolvimento das aulas e desenvolver nossa proposta de ensino, ao buscar os conceitos científicos.

4.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um *software* com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino-aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo foi quem idealizou o projeto do software GeoGebra e é um de seus principais desenvolvedores em conjunto com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo. Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores com sistemas operacionais diversos, é um *software* gratuito e muito dinâmico.

Ao inicializar o GeoGebra nos deparamos com a seguinte interface:

Figura 43:Interface Inicial



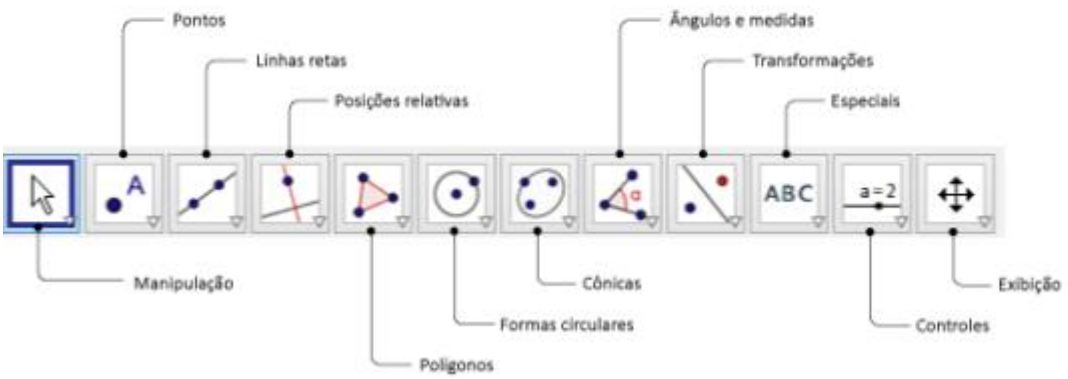
Fonte: Geogebra.org/2023

1. Barra de Menus: A Barra de Menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais
2. Barra de Ferramentas: A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.
3. Janela de Álgebra: Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

4. Entrada Campo: de entrada para digitação de comandos.
5. Janela de Visualização: Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.
6. Lista de Comandos: Listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.

No canto superior esquerdo temos algumas ferramentas nomeadas da seguinte forma:

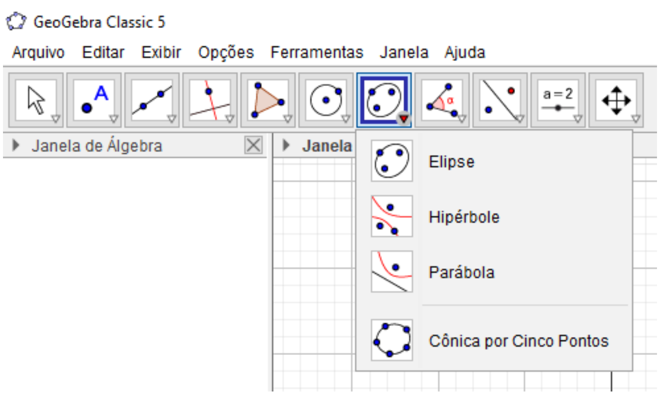
Figura 44:Ferramentas do GeoGebra



Fonte: GeoGebra.org/2023

Para cada uma dessa ferramentas, exceto a primeira que é o ícone de manipulação, temos uma série de ferramentas ocultas, bastando um clique para selecionar e abrir as demais ferramentas, vejamos para a ferramenta cônicas:

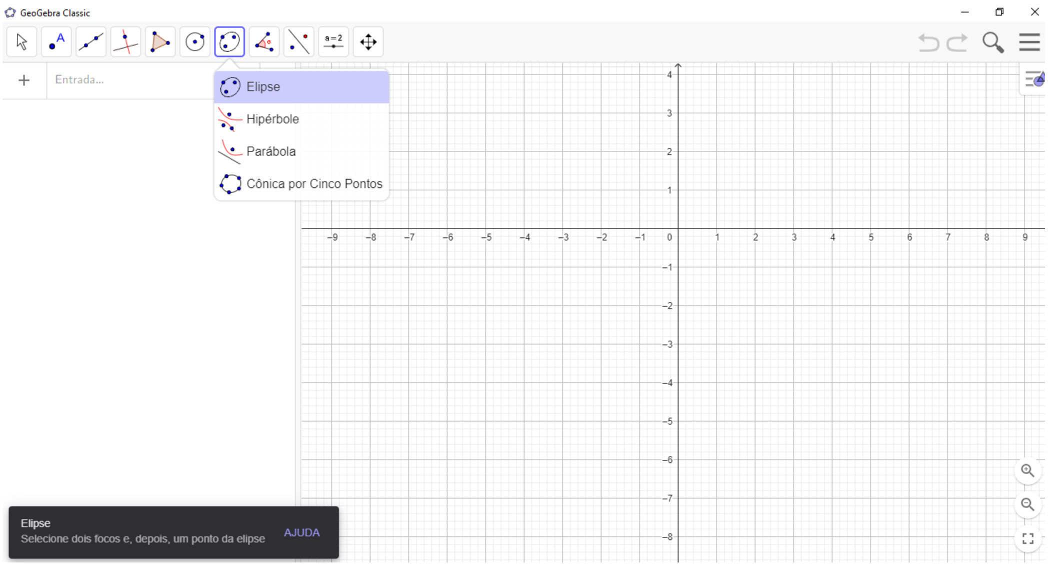
Figura 45: Ferramenta/Cônicas



Fonte: GeoGebra.org/2023

Para construirmos uma cônica no GeoGebra temos diversos caminhos, seja fornecendo no campo de entrada uma equação, ou selecionando no campo de ferramentas a cônica desejada, esse modelo de construção serve para qualquer forma geométrica. Vejamos a construção de uma elipse pelo campo de ferramentas, primeiro vamos até a seção de ferramentas cônicas e depois selecionamos elipse, conforme imagem abaixo:

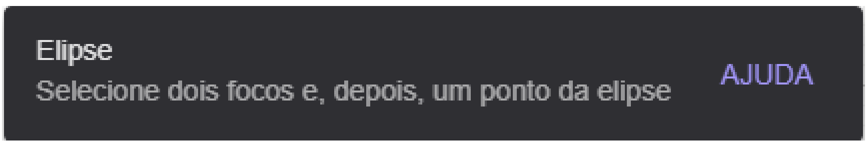
Figura 46: Construção da elipse



Fonte: GeoGebra.org/2023

Ao clicarmos no ícone de elipse, aparecerá uma mensagem no canto inferior esquerdo com as instruções de como proceder para a construção da elipse:

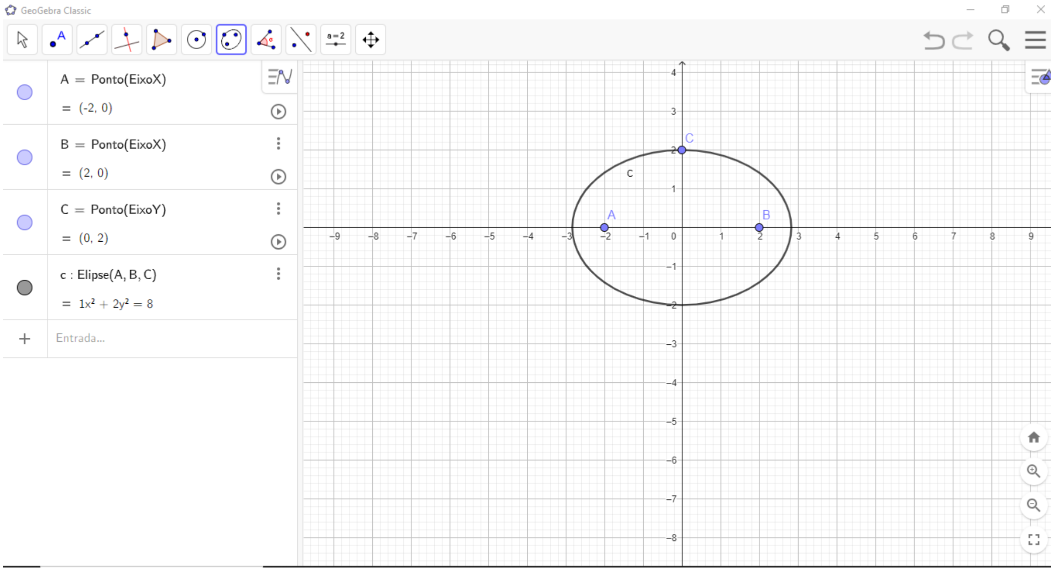
Figura 47:Mensagem de instrução



Fonte: GeoGebra.org/2023

Após selecionarmos os pontos na janela de visualização, temos o surgimento da elipse, irá depender da distância dos pontos que selecionou como foco e também do ponto pertencente a elipse:

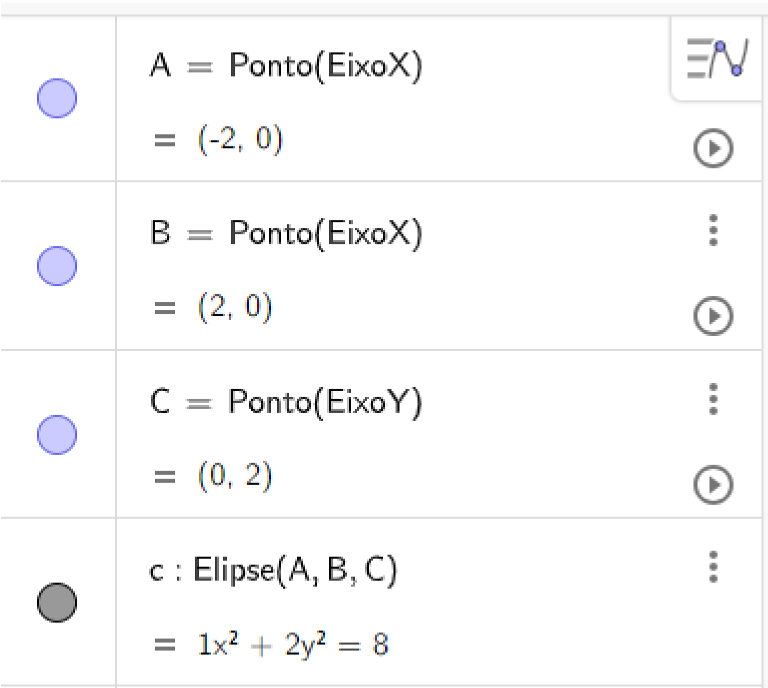
Figura 48: Elipse



Fonte: GeoGebra.org/2023

Repare que no canto esquerdo do software na janela de álgebra já temos a coordenadas dos pontos selecionados e também a equação que representa nossa elipse.

Figura 49: Janela de álgebra



Fonte: GeoGebra.org/2023

Agora que o GeoGebra foi devidamente apresentado, conseguimos avançar na nossa proposta de ensino.

4.2 A Teoria Histórico-Cultural e a Teoria do Ensino Desenvolvimental aplicada ao ensino.

A questão fundamental gira em torno de como podemos ensinar as cônicas com base na teoria do ensino Desenvolvimental de Davydov. Evidenciamos quais são os núcleos conceituais que podemos usar como chave no processo de ensino-aprendizagem.

Durante nossos estudos sobre as cônicas, ficou evidente que os conceitos centrais a serem desenvolvidos são a noção de distância, ponto, reta e álgebra. Esses conceitos nucleares fornecem a base para a criação e desenvolvimento de procedimentos lógicos e investigativos que foram utilizados durante o surgimento dessa ciência. A partir desses conceitos, podemos chegar às definições das três cônicas: Elipse, Parábola e Hipérbole. Após a compreensão desses conceitos, podemos introduzir generalizações e propriedades.

Ao propormos a utilização do GeoGebra como parte do processo de ensino-aprendizagem buscamos que os alunos possam se tornar sujeitos ativos e participativos em sala de aula, em contraste com a passividade frequentemente associada ao ensino tradicional.

A partir dessa dinâmica o conceito do objeto é revelado ou compreendido, a partir de uma orientação ou mediação do professor ou orientador. O conceito do objeto se constitui a partir de suas características externas como forma, vértices, eixos, focos, entre outros, mas sobretudo pela sua essência, aquilo que determina objeto totalmente que é a sua definição, a partir da qual se determina todo o objeto.

Amparados por Vygotsky, entendemos que o investigador deve intentar compreender as relações intrínsecas entre as tarefas externas e a dinâmica do desenvolvimento e considerar a gênese dos conceitos como função do crescimento cultural e social global do indivíduo, que não afeta apenas o conteúdo, mas também o seu modo de pensar. A nova utilização significativa, e o seu emprego como meio para a formação dos conceitos é a causa psicológica imediata da transformação radical no processo intelectual e na construção do conhecimento. (VYGOTSKY, 2002, p. 44).

No entanto, é fundamental manter a perspectiva de que o aluno deve ser um sujeito ativo na construção do conhecimento. Nesse contexto, o GeoGebra desempenha um papel crucial, pois permite que os alunos experimentem a construção de diversas cônicas com diversas funcionalidades, facilitando o processo de generalização do conhecimento. O professor, a partir da mediação, pode atuar na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, ajudando-os a atingir seu potencial e as tecnologias podem ser instrumentos importantes na realização dessa tarefa. Ainda sobre a mediação, buscamos abordá-la na sua essência dialética como nos explica Joana Peixoto:

> A mediação acontece com professor e aluno no seio da relação pedagógica. Professor e alunos medeiam juntos, cada um representando um polo dessa relação que visa ao desenvolvimento das funções mentais superiores dos alunos -movimento interna e externamente contraditório. Isso porque o desenvolvimento das formas psíquicas superiores não é genético, trata-se da apropriação de um psiquismo historicamente acumulado sob forma de relações sociais entre os humanos. Como se efetua a partir de relações sociais, essa apropriação não provém simplesmente de fora: é um processo de desenvolvimento interno de essência externa. As funções psíquicas e as relações sociais são duas faces (interna e externa) de uma mesma realidade. (PEIXOTO, 2016, p. 374.

A partir disso, o objetivo da nossa proposta é que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas específicas relacionadas ao conteúdo, bem como habilidades cognitivas gerais. Em primeiro lugar devemos identificar quem são nossos alunos, quais os objetivos de ensinar cônicas, como apresentar as cônicas de forma que os alunos percebam sua utilização na sociedade.

Pois ao trazermos o objeto de conhecimento que está sendo trabalhado para a realidade em que eles vivem, faz com que sintam interesse e queiram descobrir os processos de construção desse conhecimento.

Segundo Libâneo (2016), ao planejar o ensino de um conteúdo, devemos seguir os seguintes procedimentos:

> a) analisar o conteúdo e fazer à elaboração do núcleo conceitual da matéria, que contém a generalização esperada para que o aluno interiorize e utilize para deduzir relações particulares da relação básica identificada. Para isso, busca-se a gênese de desenvolvimento do conteúdo, ou seja, o processo histórico de sua constituição, recorrendo a métodos e procedimentos de investigação próprios desta ciência.
>
> b) identificar as ações mentais e habilidades cognitivas gerais e específicas apresentadas no conteúdo e que devem ser adquiridas pelos alunos ao longo do estudo da matéria.
>
> c) construir uma rede de conceitos básicos que dão suporte a esse núcleo conceitual, com as vidas, relações e articulações.
>
> d) formular tarefas de estudo com base em situações-problema, que exijam os alunos assimilem o modo de pensamento apresentado na matéria, possibilitando a formação de capacidades e habilidades cognitivas gerais e específicas em relação à matéria.
>
> e) prever formas de avaliação para verificar se o aluno desenvolveu ou está desenvolvendo a capacidade de utilizar os conceitos como ferramentas mentais. (Libâneo, 2016, p. 378)

Ademais com esse estudo pretendemos mostrar que o conhecimento pedagógico e didático deve ser aliado ao conhecimento específico/disciplinar, pois se tratando de formação de professores devemos ter em mente que estudamos diversos conteúdos para termos domínio pleno do mesmo a fim de facilitar o processo de ensino-aprendizagem, tornando esse processo algo prazeroso e significativo para ambos os lados, para quem ensina e também para quem aprende.

O GeoGebra como elemento mediador ajuda os alunos principalmente na visualização das cônicas, pois auxilia na recuperação do tempo nas aulas, uma vez que gastávamos muito dele, para realizar os desenhos e, conta com a facilidade de acesso diária nas aulas de matemática, por se tratar de um software livre. Os alunos podem fazer o download nos celulares e sempre que necessário utilizá-lo, onde pelo processo de experimentação os alunos conseguirão desenvolver as habilidades e funções mentais que o conteúdo abordado traz.

O que causa um rompimento com a tradicional didática abordada em sala de aula, o aluno agora possuí uma ferramenta que pode ser utilizada durante os estudos, na resolução de exercícios entre outros, fazendo com que o aluno seja sujeito ativo no processo de ensino aprendizagem, tornando o celular aliado nesse processo.

O professor deverá previamente estabelecer exercícios e problemas que façam parte do cotidiano dos alunos ou que gere curiosidade e também leve motivos para aprendizagem do conteúdo, os alunos desse modo são orientados a captar uma relação geral, um princípio lógico que forma um “núcleo” do objeto estudado, formando uma representação mental desse objeto. Essa captação se dá por meio de uma tarefa escolar, um problema, utilizando-se de procedimentos particulares até dominarem o procedimento geral de solução dessa tarefa, momento em que os alunos podem internalizar o conceito, ou seja, dominar o procedimento geral de solução de problemas particulares e casos do mesmo tipo. (LIBÂNEO, 2009, p. 5).

Nessa linha concluímos que tanto professor, quanto aluno, ambos fazem parte da construção do conhecimento. Compreender o aluno como um ser histórico e participante de uma cultura é de suma importância para que consigamos trazer motivos para o mesmo se interessar pelo conteúdo e também relacionarmos com o desenvolvimento da humanidade e como ele está presente no nosso cotidiano. As TDIC fazem parte da realidade dos nossos alunos e da sociedade, devemos ter em mente que podemos utiliza-las como aliadas ao processo de ensino-aprendizagem como explicitado nesse trabalho, para que os alunos possam através delas serem participantes ativos. *Softwares* como o GeoGebra são aliados as práticas educativas do professor de matemática e representa uma possibilidade interessante no modo de ensinar matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho é investigar a equação geral das cônicas, sua construção, elementos, casos comuns e casos particulares. E como parte secundária como podemos aborda-lo em um perspectiva histórico-cultural, voltado principalmente na participação ativa do aluno no processo de construção dos conceitos e da aprendizagem deste conceito, tendo como elemento mediador o *software* GeoGebra.

No desenvolver do trabalho conseguimos abordar os conceitos de Elipse, Hipérbole e Parábola e também alguns casos particulares, a partir das definições conseguimos fazer a construção do elemento estudado e sua estrutura, o GeoGebra foi ferramenta fundamental na construção dos gráficos, facilitando ainda mais a construção dos conceitos e sua visualização.

A problemática que nos motivou consiste em "Como ensinar as cônicas com uma metodologia para além do ensino formal de aprendizagem?", partindo é claro da insatisfação de como é abordada no método tradicional de ensino.

Com os estudos aqui apresentados, conseguimos chegar à conclusão que a abordagem do GeoGebra como uma ferramenta ativa no processo de ensino aprendizagem é fundamental para que consigamos chegar nos objetivos traçados, pois ele é de fato aliado no ensino de matemática e claro no ensino das cônicas. Mas toda via defendemos que as tecnologias não devem ser imperativas nesse processo de aprendizagem, cabendo ao professor identificar os momentos que de fato a introdução de um *software* no processo de ensino será relevante.

O planejamento de ensino é fator fundamental, é a partir dele que o professor irá nortear sua prática em sala de aula, seus objetivos ao se ensinar aquele conteúdo devem ser definidos previamente, no plano de ensino reconhecemos quais são os alunos, qual a realidade deles e a partir disso podemos criar relações do conteúdo com a realidade. Devemos apresentar o conteúdo e mostrar para os alunos como foi o desenvolvimento dessa ciência específica ao longo do tempo, criando assim sentido e significado no seu estudo, criando nos alunos motivos para estudar e aprender o conteúdo trabalhado.

A Teoria Histórico-Cultural e a Teoria do Ensino desenvolvimental foi fator crucial para entender as relações sociais que constituem o fenômeno de ensino, partindo de uma teoria ampla conseguimos entender o processo de ensinar e aprender, que é amplo. Essa teoria irá nortear como um todo a prática pedagógica em sala de aula, não só no ensino das cônicas, mas também com todos os outros conteúdos. Essa teoria foi fundamental para entender as relações da construção de conceitos e de interiorização desses conceitos, que a partir daí conseguimos nortear toda a prática pedagógica.

O uso do GeoGebra foi essencial tanto como ferramenta para construções dos gráficos presentes no trabalho, quanto para trazer uma perspectiva tecnológica para o ensino de matemática. Com ele conseguimos visualizar com facilidade algumas propriedades, elementos, entre outras formas que constituem o conteúdo estudado. Ao empregar o GeoGebra como uma ferramenta que não pertence apenas ao professor, mas também aos alunos, pretendemos mostrar que o aluno pode ser ativo, tendo livre acesso para construir, manipular e descobrir ferramentas que lhe auxiliam no aprendizado, formando então um aluno mais autônomo e investigativo.

Para que este trabalho alcance mais êxito na sua proposta é necessária uma intervenção em alguma escola, para que se comprove o que aqui foi investigado. As dificuldades encontradas corriqueiramente nessa pesquisa é a pouca disponibilidade de teorias que se aprofundem no compreender das relações mentais que envolvem o desenvolvimento do pensamento matemático, que muitas vezes é tratada com superficialidade em alguns casos. Conclui-se, assim, que a continuidade da pesquisa nesse campo é fundamental para o avanço do conhecimento matemático, sobretudo no campo acadêmico, e para a ampliação de suas aplicações práticas em áreas correlatas.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª Edição -tradução: Elza F. Gomide, Editora: Edgar Blucher, 1996.

EVES, Howard W. et al. **Introdução à história da matemática**. 5ª Edição-tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

Iezzi, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**, v. 7,6ª Edição. São Paulo: Atual, 2013.

LIBÂNEO, José C. **A Teoria do Ensino Para o Desenvolvimento Humano e o Planejamento de Ensino. Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

__________, José Carlos**. Teoria histórico-cultural e metodologia de ensino: para aprender a pensar geograficamente. Texto apresentado na apresentação do XII Encontro De Geógrafos de América Latina**, Universidade de lá República, Montevideo, Uruguai, 2009.

Peixoto, Joana. C. **Tecnologias e relações pedagógicas: a questão da mediação**. R. Educação Pública., Cuiabá, v. 25, n. 59, p. 367-379, maio/ago. 2016.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. Curitiba: Livrarias Curitiba, 10.ª ed. 2019

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 4ª edição brasileira. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

__________. **Pensamento e linguagem**. Disponível em: http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf. Acesso em 25 de janeiro. 2023.