

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS  
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES  
CURSO DE MATEMÁTICA

JOLMAR FERENS

**O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS  
INTEGRANDO ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

GOIÂNIA  
2023

JOLMAR FERENS

**O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS  
INTEGRANDO ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador:  
Professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

GOIÂNIA

2023

JOLMAR FERENS

**O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS  
INTEGRANDO ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

Este trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção de título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pela Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em 14 de dezembro de 2023.

Banca examinadora

Professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Professor Mestre Gean Henrique Godoi

Professor Mestre Maxwell Gonçalves Araújo

GOIÂNIA

2023

Os Fremen eram supremos naquela qualidade que os antigos denominavam *spannungsbogen*, que é a autoimposição de um adiamento entre o desejar uma coisa e o estender a mão para apanhá-la.

– Excerto de “A sabedoria de Muad’Dib”, da princesa Irulan

## RESUMO

O foco deste estudo é compreender o movimento lógico-histórico dos números complexos e as suas relações algébricas e geométricas, com o uso do *software* GeoGebra, no favorecimento do movimento de ensino-aprendizagem deste conteúdo. Visa estabelecer conexões conceituais entre álgebra, geometria e a trajetória lógico-histórica desses números, considerando a interação pedagógica entre tecnologia e educação matemática. O objetivo é contribuir com o desenvolvimento desse tópico, transcendendo as estratégias didáticas tradicionais que frequentemente negligenciam os aspectos históricos e geométricos. Busca-se fornecer uma compreensão mais abrangente e intuitiva desses números. A pesquisa se fundamenta em uma perspectiva histórico-cultural. Esta abordagem enfatiza a reconstrução do caminho científico dos conceitos matemáticos. Utilizando o GeoGebra, desenvolvemos atividades que ilustram operações e propriedades, proporcionando uma experiência de aprendizagem que integra os aspectos algébricos e geométricos. A investigação revelou a evolução dos números complexos, detalhando a solução de equações cúbicas e as contribuições de Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler, Wessel, Argand, Gauss, entre outros. As demonstrações das fórmulas de De Moivre e das raízes enésimas merecem destaque devido à sua importância e beleza. Esta pesquisa oferece uma abordagem pedagógica integrada e em consonância com os processos históricos e tecnológicos, em harmonia com o passado e com o presente, sem perder de vista o futuro. Percebe-se, com a pesquisa, potencial para aprimorar o ensino de tópicos científicos, beneficiando não apenas o aprendizado dos números complexos, mas também ampliando as possibilidades pedagógicas em outras áreas da matemática. O estudo enfatiza os benefícios desta metodologia para professores e estudantes, sugerindo caminhos para uma formação acadêmica mais rica e significativa.

**Palavras-chave:** Números Complexos; GeoGebra; Educação Matemática; Metodologia de Ensino.

## ABSTRACT

The focus of this study is to understand the logical-historical movement of complex numbers and their algebraic and geometric relationships, using the GeoGebra software to enhance the teaching-learning process of this content. It aims to establish conceptual connections between algebra, geometry, and the logical-historical trajectory of these numbers, considering the pedagogical interaction between technology and mathematical education. The objective is to contribute to the development of this topic, transcending traditional didactic strategies that often neglect the historical and geometric aspects. The research seeks to provide a more comprehensive and intuitive understanding of these numbers. The research is grounded in a historical-cultural perspective. This approach emphasizes the reconstruction of the scientific path of mathematical concepts. Using GeoGebra, we developed activities that illustrate operations and properties, providing a learning experience that integrates algebraic and geometric aspects. The investigation revealed the evolution of complex numbers, detailing the solution of cubic equations and the contributions of Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler, Wessel, Argand, Gauss, among others. The demonstrations of De Moivre's formulas and the  $n$ th roots are noteworthy for their importance and beauty. This research offers an integrated pedagogical approach in line with historical and technological processes, in harmony with the past and present, without losing sight of the future. The research shows potential to improve the teaching of scientific topics, benefiting not only the learning of complex numbers but also expanding pedagogical possibilities in other areas of mathematics. The study emphasizes the benefits of this methodology for teachers and students, suggesting paths for a richer and more meaningful academic education.

**Keywords:** Complex Numbers; GeoGebra; Mathematical Education; Teaching Methodology.

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
2	<b>A GÊNESE DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	14
2.1	A DISPUTA PELA RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS .....	14
2.2	O MÉTODO DE TARTAGLIA-CARDANO .....	17
2.2.1	Demonstração da fórmula de Tartaglia-Cardano.....	18
2.3	BOMBELLI E A SUPERAÇÃO DO IMPOSSÍVEL.....	21
2.4	UNIDADE IMAGINÁRIA.....	23
2.5	O PLANO WESSEL-ARGAND-GAUSS.....	25
3	<b>A ÁLGEBRA E A GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	28
3.1	O PLANO COMPLEXO .....	28
3.1.1	Representação do número complexo no plano .....	29
3.1.2	Módulo e argumento de um número complexo no plano .....	30
3.2	POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA $i$ .....	34
3.3	OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS: FORMA ALGÉBRICA.....	36
3.3.1	Adição de números complexos na forma algébrica .....	36
3.3.2	Subtração de números complexos na forma algébrica.....	37
3.3.3	Multiplicação de números complexos na forma algébrica .....	37
3.3.4	Divisão de números complexos na forma algébrica .....	38
3.4	OPERAÇÕES: ABORDAGEM GEOMÉTRICA E FORMA POLAR.....	39
3.4.1	Adição e subtração de números complexos, uma abordagem geométrica.....	40
3.4.2	A Forma Polar de um número complexo.....	41
3.4.3	Multiplicação de números complexos na forma polar .....	43
3.4.4	Divisão de números complexos na forma polar.....	44
4	<b>PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	45
4.1	PROPRIEDADE COMUTATIVA .....	46
4.2	PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DA ADIÇÃO .....	47
4.3	PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DA MULTIPLICAÇÃO.....	48
4.4	PROPRIEDADE DO OPOSTO DE UM NÚMERO COMPLEXO .....	50
5	<b>PRIMEIRA FÓRMULA DE DE MOIVRE – POTENCIAÇÃO</b> .....	51
6	<b>SEGUNDA FÓRMULA DE DE MOIVRE – RADICIAÇÃO</b> .....	55
6.1	DEMONSTRAÇÃO .....	55
7	<b>RAÍZES ENÉSIMAS E SEUS AFIXOS</b> .....	56

8	<b>TEOREMA DAS RAÍZES N-ÉSIMAS DE UM COMPLEXO.....</b>	59
8.1	CASO 1, QUANDO $n$ É ÍMPAR.....	59
8.2	CASO 2, QUANDO $n$ É PAR.....	61
8.3	DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DA SOMA DAS RAÍZES.....	62
8.3.1	Demonstração I.....	62
8.3.2	Demonstração II.....	63
8.3.3	Demonstração III – Um caso especial .....	63
9	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	67
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	69

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evariste Galois .....	15
Figura 2 – Scipione del Ferro. ....	15
Figura 3 – Niccolò Fontana. ....	16
Figura 4 – Girolamo Cardano. ....	16
Figura 5 – Rafael Bombelli. ....	17
Figura 6 – Pierre de Fermat. ....	23
Figura 7 – René Descartes. ....	24
Figura 8 – Leonhard Euler. ....	24
Figura 9 – Caspar Wessel. ....	25
Figura 10 – Jean-Robert Argand. ....	26
Figura 11 – Plano Complexo ou Plano Argand-Gauss. ....	26
Figura 12 – Johann Carl Friedrich Gauss. ....	27
Figura 13 – Representação do número complexo $z = 2 + 2i$ no plano complexo. ....	30
Figura 14 – Módulo de um número complexo. ....	31
Figura 15 – Argumento de um número complexo. ....	32
Figura 16 – Potências de $i$ no plano complexo. ....	35
Figura 17 – Adição e subtração de números complexos, uma abordagem geométrica. ....	41
Figura 18 – Forma polar de um número complexo. ....	41
Figura 19 – Multiplicação de números complexos na forma polar. ....	43
Figura 20 – Divisão de números complexos na forma polar. ....	44
Figura 21 – Multiplicação, de números complexos, usando a técnica de vetor fixo. ....	45
Figura 22 – Propriedade comutativa dos números complexos. ....	46
Figura 23 – Propriedade associativa da adição dos números complexos: caso 1. ....	47
Figura 24 – Propriedade associativa da adição dos números complexos: caso 2. ....	47
Figura 25 – Propriedade associativa da multiplicação dos complexos: caso 1. ....	48
Figura 26 – Propriedade associativa da multiplicação dos complexos, caso 2. ....	49
Figura 27 – Propriedade oposto dos números complexos. ....	50
Figura 28 – O número complexo e seu conjugado são simétricos. ....	50
Figura 29 – O produto de um número complexo por seu conjugado. ....	50
Figura 30 – Abraham de Moivre. ....	51
Figura 31 – Se $\rho = 1$ .....	53
Figura 32 – Se $\rho > 1$ .....	53

Figura 33 – Se $0 < \rho < 1$ .....	54
Figura 34 – As raízes de um número complexo têm o mesmo módulo. ....	58
Figura 35 – Os argumentos das raízes, de um número complexo, são regulares. ....	58
Figura 36 – As raízes, de um número complexo, descrevem um polígono regular. ....	58
Figura 37 – Caso 1: a soma das raízes, de um complexo, é igual a zero.....	60
Figura 38 – Caso 2: a soma das raízes de um complexo é igual a zero.....	61
Figura 39 – Quando $n$ é ímpar.....	65

## 1 INTRODUÇÃO

Os números complexos representam uma página importante da história da matemática. Nela, os matemáticos superaram obstáculos que inicialmente eram intransponíveis. De fato, a questão central está relacionada à transcendência da ideia de que números negativos não possuem raízes quadradas (EVES, 2011).

Surgiram pela primeira vez no século XVI, quando matemáticos tentaram resolver equações que não tinham soluções no conjunto dos números reais. A primeira menção documentada a esses números foi feita pelo matemático italiano Girolamo Cardano em 1545. Rafael Bombelli, outro matemático italiano, expandiu o trabalho de Cardano em 1572, fornecendo regras para a manipulação desses números.

No entanto, foi somente no século XVIII que o conceito de números complexos foi formalizado e amplamente aceito. O matemático suíço Leonhard Euler introduziu o conceito de “ $i$ ” como a raiz quadrada de  $-1$  em 1748. Em 1806, Jean-Robert Argand introduziu o plano complexo, hoje conhecido como plano Argand-Gauss.

No século XIX, com o trabalho de Augustin-Louis Cauchy e Bernhard Riemann, a análise complexa tornou-se uma parte fundamental da matemática, com muitos teoremas importantes e aplicações em várias áreas, incluindo física e engenharia. A consolidação dos números complexos ocorreu gradualmente ao longo de vários séculos, com contribuições de muitos matemáticos diferentes.

Hoje, o tema é comum nos cursos de graduação das áreas de exatas e se articula com diversas áreas de conhecimento, tendo uma ampla gama de aplicações práticas em várias áreas da ciência, engenharia e matemática, sendo a física quântica uma das principais. Nela, os números complexos são usados para descrever o estado de uma partícula. A função de onda, que descreve a probabilidade de encontrar uma partícula em um determinado estado, é uma função complexa. Na Matemática, os números complexos se integram a trigonometria, geometria, funções, entre outros.

Apesar disso, o ensino dos números complexos foi relegado a segundo plano. No ensino médio, por exemplo, notamos a fragilidade das abordagens. Negligenciaram-se os aspectos geométricos das operações e suas propriedades, focando unicamente na proposta algébrica. Isso impede que os alunos compreendam plenamente o objeto complexo, o que pode vir a prejudicar o desenvolvimento do aprendizado em matemática.

Diante disso, fica clara a importância do estudo dos números complexos. Eles são mais do que apenas uma curiosidade histórica, representam uma expansão fundamental do nosso

entendimento matemático. Conhecê-los permitiu-nos resolver problemas que seriam impossíveis usando o conjunto dos números reais, abrindo novas oportunidades para a exploração e a descoberta científica.

Neste contexto, propomos este trabalho para contribuir com o ensino-aprendizagem dos números complexos, o qual inclui uma proposta de apresentar todas as propriedades dos números complexos utilizando o *software* GeoGebra. Assim, todas as operações serão apresentadas em dois níveis de compreensão, algébrico e geométrico. Além disso, essa tecnologia será utilizada para investigar um importante teorema relacionado ao número de raízes de um número complexo.

A introdução de tecnologias na educação matemática de modo a facilitar o acesso ao processo de ensino-aprendizagem ainda é um desafio para professores e alunos. Para tanto, é essencial desenvolver alternativas de modo a superar a dualidade presente no ensino de Matemática, a qual ainda parte da lógica da *educação bancária*, da mera transmissão do conhecimento, cujo aluno é mero receptor.

As tecnologias digitais de informação e comunicação se desenvolveram de modo impressionante nos últimos anos. Entretanto, na área de educação, sua utilização não se mostrou eficaz, como pudemos notar no período pandêmico, onde foi nítida a percepção de que as escolas não estavam preparadas, os professores também não estavam prontos para realizar uma construção pedagógica a distância, capaz de superar os problemas de ensino-aprendizagem, principalmente no campo da Matemática. Segundo Arreguy (2022), após o ensino remoto, 76% das crianças precisaram de reforço escolar na alfabetização. A necessidade de reforço também é apontada pelos pais em disciplinas como matemática (71%), língua portuguesa (70%), ciências (62%) e história (60%). Programas de apoio e recuperação nas escolas são vistos como prioridade para 28% dos responsáveis ouvidos, embora menos da metade dos estudantes em escolas que reabriram estejam recebendo aulas de reforço (43%) ou apoio psicológico (35%).

Entendemos que faz parte da preparação do profissional, de quem vai atuar como professor, estar preparado para assumir, dentro da escola, diversas metodologias. Utilizar as tecnologias de modo a realizar uma mediação adequada é uma delas, pois o professor pode utilizá-las para organizar seu ensino, trazendo para o interior da aula uma interatividade.

Vaz (2012) relata diversas experiências exitosas e ressalta que o GeoGebra permite ao professor experimentar uma situação investigativa, formular conjecturas a partir disso, formalizar ou validar essas conjecturas e generalizá-las, de acordo com o pensamento matemático. Complementando essa visão, Vaz (2016, 2015) amplia o alcance das aplicações

do GeoGebra, ao demonstrar em seus artigos diversas situações em que o professor pode utilizar as ferramentas do programa para investigar problemas reais.

Essas abordagens não apenas enriquecem a prática pedagógica, mas também destacam como o professor pode usufruir do que Vaz (2016, 2015) chama de *Investigação Matemática com o GeoGebra*, um processo que contribui significativamente para construir o pensamento do aluno, auxiliando-o a abstrair, generalizar e conceituar o objeto matemático, interligando a teoria à prática e promovendo um aprendizado mais aprofundado e significativo.

Essa discussão perpassa por teorias que abordam o tema profundamente, como a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov. Segundo essa teoria, a atividade de aprendizagem deve contemplar a possibilidade do professor, em seu planejamento, construir um percurso pedagógico que permita o estudante percorrer o caminho que o cientista percorreu na determinação daquele conteúdo (Davydov, 1988). Dessa forma, com uma atividade significativa, o aluno poderá se apropriar dos modos de pensar dos cientistas, determinando deste modo suas ações mentais a partir da abstração, generalização e formação do conceito.

Daí emerge a nossa proposta de trabalho: mostrar que o *software* GeoGebra é uma boa ferramenta para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, dentre eles os Números Complexos.

Nosso objetivo é desenvolver um método didático formativo em uma proposta de ensino-aprendizagem dos números complexos, utilizando o *software* GeoGebra com a finalidade de compreensão dos aspectos algébricos e geométricos das operações, fundamentado na teoria histórico-cultural de Davydov.

Deste modo, pretendemos compreender os processos históricos que levaram ao surgimento dos números complexos e investigar as potencialidades tecnológicas que o professor pode usufruir no ensino matemático utilizando o *software* GeoGebra.

Partimos da hipótese de que o *software* GeoGebra pode impactar, significativamente, o processo de ensino-aprendizagem, especialmente dos números complexos, desde que seja integrado a práticas pedagógicas que permitam ao professor construir um percurso pedagógico que reflita o caminho percorrido pelos cientistas na descoberta desse conteúdo.

A pesquisa se fundamenta em uma perspectiva histórico-cultural. Esta abordagem metodológica enfatiza a reconstrução do caminho científico dos conceitos matemáticos. Utilizando o GeoGebra, desenvolvemos atividades que ilustram operações e propriedades, proporcionando uma experiência de aprendizagem que integra os aspectos algébricos e geométricos.

O *software* GeoGebra foi criado para o desenvolvimento do pensamento matemático, é gratuito e disponível para várias plataformas, incluindo dispositivos móveis. Ele permite a dinamização dos objetos, teste de situações e hipóteses, modelagem de problemas de todos os conteúdos matemáticos do ensino básico e superior. Além disso, admite a criação de objetos virtuais de aprendizagem, que são ferramentas úteis para o professor ilustrar e elucidar conceitos matemáticos complexos de maneira interativa e engajadora.

## 2 A GÊNESE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, embarcaremos em uma jornada fascinante através da história dos números complexos. Exploraremos como, partindo das fundações lançadas por Scipione del Ferro e Nicolo Fontana, esses números enigmáticos começaram a se formar no imaginário matemático. Veremos como Girolamo Cardano e Rafael Bombelli, desbravando territórios matemáticos desconhecidos, pavimentaram o caminho para uma compreensão mais profunda desses números. A viagem continua com Leonhard Euler, que, com seu brilhantismo, adicionou novas dimensões a essas entidades numéricas. Avançaremos até a era de Caspar Wessel, Jean Robert Argand e, finalmente, Carl Friedrich Gauss, cujas visões inovadoras transformaram os até então chamados “números impossíveis” em uma parte indispensável e fascinante da matemática.

Este capítulo visa demonstrar como essas mentes extraordinárias, cada uma à sua maneira, contribuíram para moldar o conceito dos números complexos, transformando-os de entidades abstratas e incompreendidas em ferramentas poderosas e essenciais para o entendimento do universo matemático. As reflexões que seguem, neste capítulo, tiveram como base os trabalhos realizados por Cerri e Monteiro (2001) e Eves (2011).

### 2.1 A DISPUTA PELA RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS

A história da Matemática é marcada por descobertas fascinantes, particularmente na busca pela resolução de equações polinomiais, que ganhou destaque entre os séculos XVI e XVII. Durante este período, matemáticos renomados como Scipione del Ferro (1465–1526), Nicolo Fontana (1499–1557), mais conhecido como Tartaglia, Girolamo Cardano (1501–1576), Rafael Bombelli (1526–1572), François Viète (1540–1603), Pierre de Fermat (1601–1665) e René Descartes (1596–1650), fizeram contribuições notáveis para a resolução de equações polinomiais até o quarto grau.

O ponto de inflexão nessa jornada foi a crescente compreensão de que as equações de grau superior a dois exigiam uma abordagem mais sofisticada. Isso levou ao desenvolvimento e aceitação dos números complexos, uma nova estrutura numérica que expandiu significativamente o escopo da matemática e permitiu a resolução de equações que antes pareciam insolúveis. A introdução dos números complexos não apenas resolveu equações de terceiro e quarto graus, mas também abriu novos caminhos para a matemática avançada.

Esta saga matemática alcançou um ponto crucial com Evariste Galois, que demonstrou que, para polinômios de grau superior a quatro, não existe uma fórmula geral aplicável a todos os casos. Esse resultado destacou ainda mais a importância e a utilidade dos complexos, que se tornaram fundamentais para a compreensão profunda da matemática.



Figura 1 – Evariste Galois

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois/pictdisplay/>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Por volta de 1515, Scipione del Ferro, um professor da Universidade de Bolonha, realizou um avanço significativo ao resolver algebricamente a equação cúbica do tipo  $x^3 + mx = n$ . Seu trabalho, provavelmente, foi baseado em fontes árabes. Essa conquista, embora não divulgada publicamente, marcou uma etapa importante na matemática, pois as equações cúbicas, devido à sua complexidade, desafiavam os matemáticos da época.



Figura 2 – Scipione del Ferro.

Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PBOh41NxKGc>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Posteriormente, por volta de 1535, Nicolo Fontana, conhecido como Tartaglia, expandiu esse trabalho ao anunciar uma solução para equações cúbicas do tipo  $x^3 + px^2 = n$ . Essa descoberta veio à tona em um contexto de desafio e competição, quando Tartaglia foi desafiado por Antonio Fior, discípulo de del Ferro, em uma disputa pública envolvendo a resolução de

equações cúbicas. Tartaglia, superando as expectativas, resolveu também equações cúbicas sem o termo quadrático, demonstrando a profundidade de seu entendimento matemático.



Figura 3 – Niccolò Fontana.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia/pictdisplay/>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Esses avanços na solução das equações cúbicas foram cruciais para o desenvolvimento dos números complexos. Embora esses matemáticos não tenham lidado diretamente com números complexos como os entendemos hoje. Suas explorações de equações polinomiais abriram caminho para o reconhecimento e aceitação de soluções que não se encaixavam nos números reais.

A abordagem de Tartaglia e del Ferro na resolução de equações cúbicas, e a posterior divulgação dessa solução, em 1545, no tratado “*Ars Magna*” de Girolamo Cardano, estabeleceram as bases para que, mais tarde, os matemáticos começassem a explorar a ideia de números que iam além dos reais, conduzindo eventualmente ao conceito formal de números complexos.



Figura 4 – Girolamo Cardano.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan/pictdisplay/>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Este período de intensa atividade matemática e de disputas intelectuais, não apenas solucionou um problema algébrico de longa data, mas também estabeleceu as bases de um dos maiores avanços na matemática: a introdução e aceitação dos números complexos.

Exemplo disso foi a significativa contribuição de Rafael Bombelli para a história dos números complexos, especialmente por meio de sua obra “*L'Algebra*”, publicada em 1572.



Figura 5 – Rafael Bombelli.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli/pictdisplay/>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Este livro marcou um avanço crucial na matemática ao introduzir um tratamento sistemático das raízes de números negativos, uma noção que era inédita e até mesmo controversa na época. Em “*L'Algebra*”, Bombelli abordou, de maneira detalhada e metodológica, as soluções imaginárias das equações cúbicas. Sua abordagem racional e sistemática para esses “números impossíveis”, como eram conhecidos, estabeleceu um entendimento mais claro e estruturado do que viria a ser os números complexos. Este trabalho foi fundamental não apenas para a evolução do conceito de números complexos, mas também influenciou significativamente o desenvolvimento subsequente da álgebra. As realizações de Bombelli foram vitais para estabelecer uma compreensão mais profunda e fundamentada dos complexos, hoje considerados um pilar essencial na matemática moderna. Suas ideias inovadoras e sua abordagem formal ajudaram a moldar o caminho para a aceitação e o desenvolvimento dos números complexos na comunidade matemática.

## 2.2 O MÉTODO DE TARTAGLIA-CARDANO

Os matemáticos daquela época perceberam que toda cúbica completa do tipo  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  poderia ser reduzida a uma cúbica sem o termo quadrático, substituindo a variável original por  $(y - \frac{a}{3})$ .

Vamos resolver a equação cúbica ( $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ) usando o método de Cardano. Uma das etapas críticas desse método é a eliminação do termo quadrático da equação cúbica, o que simplifica muito a resolução da equação. Isso é feito por meio de uma mudança de variável. Primeiro devemos fazer a mudança de variável ( $x = y - \frac{a}{3}$ ). Substituindo na equação original, temos:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ onde } x = y - \frac{a}{3}$$

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

Agora, vamos expandir e simplificar:

$$y^3 - \frac{3y^2a}{3} + \frac{3ya^2}{9} - \frac{a^3}{27} + a\left(y^2 - \frac{2ya}{3} + \frac{a^2}{9}\right) + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 - y^2a + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27} + a\left(y^2 - \frac{2ya}{3} + \frac{a^2}{9}\right) + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y - \left(\frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c\right) = 0$$

Chamando de  $p$  e  $q$  os termos entre parêntesis obtemos:

$$y^3 + py - q = 0, \text{ ou seja,}$$

$$y^3 + py = q$$

Voltando para a variável original:

$$x^3 + px = q$$

A equação cúbica reduzida é uma forma simplificada, na qual o termo quadrático é eliminado. Essa simplificação permite utilizar a fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver a equação. A seguir, apresentaremos uma demonstração desta fórmula. Este método oferece um meio eficiente para encontrar as raízes de equações polinomiais de terceiro grau.

### 2.2.1 Demonstração da fórmula de Tartaglia-Cardano

Em uma equação cúbica reduzida da forma  $x^3 = px + q$ , podemos aplicar um método sistemático para encontrar suas raízes. A estratégia consiste nos seguintes passos:

1) Substituição e expansão do cubo:

Primeiramente, propomos uma substituição na variável  $x$ , expressando-a como a soma de duas novas variáveis  $u$  e  $v$ ,  $x = u + v$ . Substituindo na equação cúbica original, temos:

$$x^3 = px + q$$

$$(u + v)^3 = px + q$$

Ao expandirmos  $(u + v)^3$ , utilizando o cubo de um binômio, obtemos:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u + v)^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

2) Estabelecendo correspondências na equação cúbica:

Comparando  $(u + v)^3$  com  $x^3 = px + q$  e considerando  $x = u + v$ , observamos que:

$$(u + v)^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

$$x^3 = px + q$$

Onde  $p = 3uv$  e  $q = u^3 + v^3$

3) Relação entre  $p$  e  $q$

Se  $p = 3uv$ , então:

$$p^3 = (3uv)^3 = 3^3 u^3 v^3$$

$$\frac{p^3}{3^3} = u^3 v^3$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 = u^3 v^3$$

$$q = u^3 + v^3$$

4) Soma e produto de raízes

$$\text{Se } x = u + v,$$

$$u + v \text{ é solução para a equação } x^3 = px + q.$$

Ora, se a soma e o produto de duas quantidades são conhecidos, pode-se escrever uma equação quadrática tal que sua solução, ou suas raízes, sejam essas quantidades.

$x^2 - Sx + P = 0$ , onde  $S = x' + x''$  (soma das raízes) e  $P = x' \cdot x''$  (produto das raízes).

$$x^2 - qx + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

5) Resolvendo usando a fórmula resolutive para a equação de segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-q) \pm \sqrt{(-q)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4 \left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$

$$x = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2^2} - 4 \left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

As expressões para  $u$  e  $v$  são obtidas ao tomar a raiz cúbica das raízes da equação.

Sendo,  $q = u^3 + v^3$  e  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 = u^3 v^3$ , então as raízes da equação acima são  $u^3$  e  $v^3$

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \therefore u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \therefore v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x^2 - qx + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

6) Finalmente, a fórmula de Cardano. Onde a solução para a cúbica original, é dada por:

$$x = u + v$$

Substituindo as expressões para  $u$  e  $v$ , obtemos a fórmula final:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Para ilustrar a aplicação do método de Cardano, consideremos a equação cúbica  $x^3 = 6x + 9$

$$\begin{cases} x^3 = px + q & \left\{ \begin{array}{l} p = 6 \\ q = 9 \end{array} \right. \\ x^3 = 6x + 9 \end{cases}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}} \\
 x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} \\
 x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\
 x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} \\
 x &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\
 x &= 2 + 1 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

### 2.3 BOMBELLI E A SUPERAÇÃO DO IMPOSSÍVEL

A trajetória dos números complexos é fascinante e reflete a evolução do pensamento matemático através dos séculos. No século XVI, a matemática enfrentava um impasse semelhante ao que os antigos gregos experimentaram com a descoberta de números irracionais, como  $\sqrt{2}$ . Os números reais, até então conhecidos, eram insuficientes para resolver certas equações algébricas, indicando a necessidade de expandir o conceito de número para além dos racionais e irracionais conhecidos.

Rafael Bombelli, nascido em Bolonha em 1530, foi um pioneiro nesta jornada. Em seu trabalho, se debruçou sobre a equação cúbica  $x^3 = 15x + 4$ , que não podia ser resolvida utilizando os métodos algébricos tradicionais da época. Ao investigar soluções para essa equação, Bombelli considerou expressões que envolviam a raiz quadrada de números negativos, uma ideia que era inédita e desafiadora para a época.

No seu livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, publicado em 1572, Bombelli propôs que os termos  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  poderiam ser tratados como números na forma  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$ , respectivamente. Com meticulosas manipulações algébricas, ele concluiu que, para essas expressões,  $a = 2$  e  $b = 1$ , como veremos mais adiante. Essa

abordagem inovadora foi um passo crucial no desenvolvimento dos números complexos e na solução de equações até então insolúveis. A coragem e a intuição de Bombelli ao lidar com esses “números impossíveis” foram fundamentais para estabelecer as bases do que hoje conhecemos como números complexos, um componente essencial na matemática.

Vamos acompanhar, passo a passo, o que teria sido o pensamento de Bombelli na resolução da famosa cúbica  $x^3 = 15x + 4$ .

$$x^3 = 15x + 4, \text{ onde } p = 15 \text{ e } q = 4$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121 \cdot (-1)} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Neste ponto, Bombelli fez uso do cubo da soma de dois termos.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \cdot (-1) - \sqrt{-1}$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}$$

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$2 + \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Portanto,  $u = 2 + \sqrt{-1}$  e  $v = 2 - \sqrt{-1}$

$$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \quad \therefore \quad u = 2 + \sqrt{-1}$$

$$v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \quad \therefore \quad v = 2 - \sqrt{-1}$$

$$x = u + v$$

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$

$$x = 4 + \sqrt{-1} - \sqrt{-1}$$

$$x = 4$$

## 2.4 UNIDADE IMAGINÁRIA

O diálogo entre Aritmética e Geometria transcende milênios, com cada um desses campos se desenvolvendo de maneira distinta, até que a conexão entre números e formas geométricas se tornasse evidente. O marco inicial desse enlace pode ser rastreado até Apolônio no terceiro século antes de Cristo, porém, foi somente no século XVII que a fusão de álgebra e geometria foi concretizada através da Geometria Analítica desenvolvida por Pierre de Fermat e René Descartes.



Figura 6 – Pierre de Fermat.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat/pictdisplay/>.

Acesso em: 08 dez. 2023

Embora Fermat tenha hesitado em publicar suas descobertas, Descartes não só as incluiu em seu famoso “Discurso sobre o Método” de 1637, mas também anexou “*La Géométrie*”, obra que viria a ser reconhecida como a fundação da Geometria Analítica.



Figura 7 – René Descartes.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes/pictdisplay/>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Descartes, em sua exploração das equações algébricas sob a luz da Geometria Analítica, expressou uma observação notável: as soluções de uma equação poderiam não ser sempre numéricas no sentido tradicional. Ele abriu caminho para a aceitação de soluções que mais tarde seriam chamadas de “imaginárias”.

O desenvolvimento subsequente dos números complexos contou com as contribuições de vários matemáticos, mas foi Leonhard Euler (1707–1783) quem desempenhou um papel decisivo na formalização e popularização de sua notação. Nascido em 1707, Euler testemunhou o florescimento do Cálculo e contribuiu imensamente para a matemática com suas publicações. Apesar de sua saúde debilitada na velhice, sua produtividade intelectual permaneceu inabalável até sua morte em 1783.



Figura 8 – Leonhard Euler.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/pictdisplay/>.  
Acesso em: 08 dez. 2023

Dentre suas muitas contribuições, está a adoção do símbolo “ $i$ ”, introduzido em sua obra em 1777, para representar a raiz quadrada de  $-1$ . Um avanço simbólico que refletiu a transição de números outrora considerados impossíveis para entidades matemáticas plenamente

reconhecidas. A escolha de Euler por “ $i$ ” propôs uma maneira consistente de tratar essas quantidades até então enigmáticas, facilitando sua manipulação algébrica e permitindo que fossem incorporadas com maior facilidade em problemas matemáticos e aplicações práticas. Euler formalizou os números complexos como expressões da forma  $z = a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i^2 = -1$ . Sua notação e tratamento dos números complexos não só resolveram questões de longa data sobre raízes quadradas de números negativos, mas também lançaram as bases para a expansiva teoria dos números complexos, essencial para o avanço da matemática moderna, da física e da engenharia (CERRI; MONTEIRO, 2001).

## 2.5 O PLANO WESSEL-ARGAND-GAUSS

O desenvolvimento do plano complexo é uma parte fascinante da história da matemática, marcada por contribuições notáveis de Caspar Wessel (1745–1818), Jean Robert Argand (1768–1822) e Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Este conceito, fundamental no estudo dos números complexos, surge da associação entre estes números e pontos no plano bidimensional, Figura 11.

Wessel, nascido em Jorud, Noruega, não era matemático de formação, mas agrimensor. Sua contribuição para a matemática veio com um artigo apresentado à Real Academia Dinamarquesa de Ciências em 1797, publicado posteriormente em 1799. Neste trabalho pioneiro, Wessel estabeleceu a base para o que hoje conhecemos como plano complexo. Mas, infelizmente, permaneceu desconhecido pelo mundo matemático por quase um século.



Figura 9 – Caspar Wessel.

Fonte: Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel/poster/lived/>.  
Acesso em: 09 dez. 2023

Paralelamente, Jean Robert Argand, um guarda-livros suíço nascido em Genebra, também contribuiu significativamente para o desenvolvimento do plano complexo.

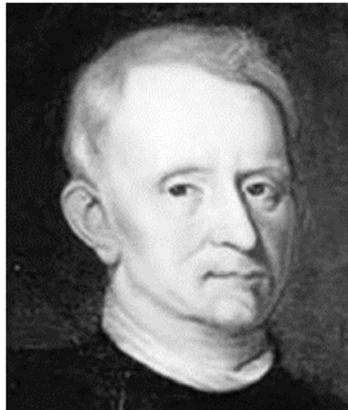


Figura 10 – Jean-Robert Argand.

Fonte: Disponível em: <https://prabook.com/web/jean-robert.argand/2202845#gallery>.  
Acesso em: 09 dez. 2023

Seu trabalho foi publicado em 1806 e posteriormente apresentado nos “*Annales de Mathématiques*” de Gergonne em 1814. A falta de reconhecimento inicial do trabalho de Wessel levou a que o plano complexo fosse comumente referido como plano de Argand (EVES, 2011).

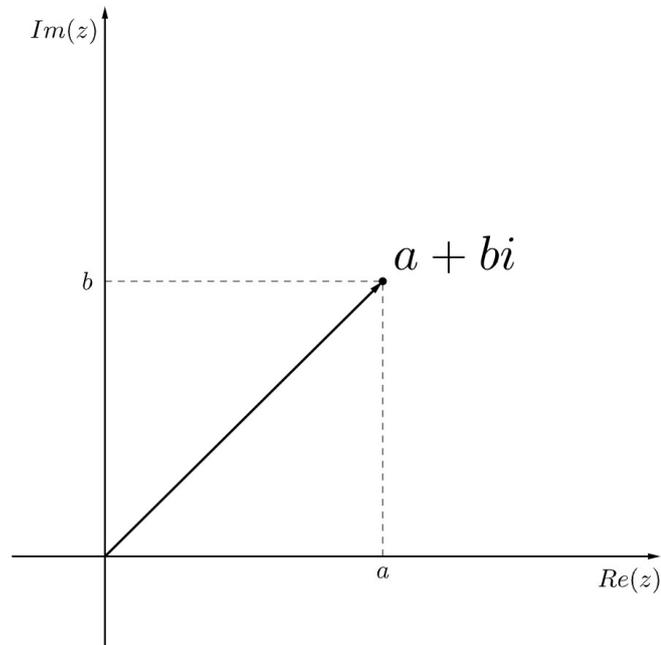


Figura 11 – Plano Complexo ou Plano Argand-Gauss.

Fonte: O Autor, 2023.

Carl Friedrich Gauss, um dos matemáticos mais influentes da história, também desempenhou um papel crucial no desenvolvimento do plano complexo. Sua contribuição foi apresentada em 1831 à Sociedade Real de Göttingen e mais tarde incluída em suas Obras Reunidas.



Figura 12 – Johann Carl Friedrich Gauss.

Fonte: Disponível em: <https://www.inverse.com/article/44309-johann-carl-friedrich-gauss-math-statistics-accomplishments>. Acesso em: 09 dez. 2023

Gauss destacou que a ideia de representar números complexos em um plano já estava implícita em sua tese de doutorado de 1799. Essa afirmação justifica por que, em algumas ocasiões, o plano complexo é referido como Plano de Gauss.

Assim, a evolução do plano complexo é um exemplo notável de como ideias inovadoras podem surgir de diferentes fontes e como o reconhecimento pode, às vezes, ser obscurecido, alterando a atribuição de crédito na história da matemática. No capítulo seguinte, aprofundaremos nosso entendimento sobre os números complexos, explorando suas facetas tanto algébricas quanto geométricas.

Nessa seção, o foco estará na representação desses números no plano complexo, um método que associa cada elemento complexo a um ponto (afixo) ou vetor específico. Este ponto de vista facilita a visualização de suas características e operações fundamentais, abrindo perspectivas para aplicações em campos como engenharia elétrica e física quântica. Também examinaremos como executar operações – adição, subtração, multiplicação e divisão – com esses números, tanto do entendimento algébrico quanto do geométrico. Conceitos essenciais como conjugado, módulo e argumento serão discutidos, evidenciando a importância do plano complexo para que a assimilação do conhecimento seja completa. Esperamos, assim, que o leitor obtenha uma compreensão ampla e robusta sobre os números complexos, percebendo sua elegância e aplicabilidade na matemática.

### 3 A ÁLGEBRA E A GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos surgiram para solucionar uma questão fundamental na matemática: a inexistência de raízes quadradas de números negativos dentro do conjunto dos números reais. Para superar essa limitação, introduziu-se o conceito de unidade imaginária, denotada por  $i$ , que é definida pela propriedade  $i^2 = -1$ . Isso permitiu a criação de um novo conjunto numérico, dos Números Complexos ( $\mathbb{C}$ ), que engloba todos os números reais e ainda mais, pois oferece uma estrutura capaz de resolver equações que antes eram insolúveis.

Um número complexo é expresso na forma  $z = a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é a unidade imaginária. A componente  $a$  representa a parte real de  $z$  (denotada como  $Re(z) = a$ ), enquanto  $b$  representa a parte imaginária (denotada como  $Im(z) = b$ ).

Essa estrutura numérica amplia significativamente o escopo da álgebra e oferece ferramentas poderosas para diversas áreas da matemática e da engenharia, incluindo análise complexa, resolução de equações diferenciais e representação de fenômenos ondulatórios, entre outros.

Em resumo, temos:

$$z = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$z = a + bi$ , onde  $a$  é a parte real,  $b$  a parte imaginária e  $i$  a unidade imaginária.

$$Re(z) = a, Im(z) = b$$

#### 3.1 O PLANO COMPLEXO

Iniciar o estudo dos aspectos algébricos e geométricos dos números complexos pelo plano complexo é uma escolha metodológica estratégica e eficaz por diversas razões. Primeiramente, a abordagem geométrica proporcionada pelo plano complexo oferece uma compreensão mais intuitiva e visual dos conceitos algébricos, facilitando o aprendizado e a internalização das propriedades fundamentais dos números complexos.

O plano complexo, ao mapear os números complexos em um contexto bidimensional, permite a visualização de operações algébricas como operações geométricas. Por exemplo, a adição e a subtração de números complexos podem ser representadas como a adição e a subtração vetorial, respectivamente. Da mesma forma, a multiplicação e a divisão de números complexos se traduzem em transformações geométricas de rotação e redimensionamento.

Essa representação visual não apenas simplifica a compreensão de conceitos algébricos, mas também enriquece a análise, permitindo o estudo de propriedades como simetria, periodicidade e continuidade de uma maneira mais acessível e menos abstrata. Além disso, o plano complexo serve como uma ponte entre a teoria dos números complexos e outras áreas da matemática, como a análise complexa e a geometria.

Ao começarmos o estudo dos números complexos pelo plano complexo, estabelecemos uma base sólida para a exploração posterior dos aspectos mais abstratos e complexos da teoria. Esta abordagem não apenas fortalece a compreensão fundamental dos conceitos, mas também motiva o interesse e a curiosidade, apresentando os números complexos de uma maneira visualmente atraente e conceitualmente rica. Portanto, a introdução do plano complexo como ponto de partida no estudo dos números complexos é uma decisão pedagógica que alia rigor matemático com didática, proporcionando um caminho lógico e eficiente para a exploração dos diversos aspectos dessa área fascinante da matemática.

### 3.1.1 Representação do número complexo no plano

O plano complexo, também conhecido como plano de Argand-Gauss, é uma ferramenta essencial na matemática para a visualização e manipulação de números complexos. De fato, este plano representa uma extensão do plano cartesiano tradicional, adaptado para incorporar a natureza bidimensional dos números complexos.

Neste plano, o eixo horizontal (eixo das abscissas) representa a parte real dos números complexos, sendo denominado como eixo  $Re(z)$ . Já o eixo vertical (eixo das ordenadas) é dedicado à parte imaginária dos números complexos, denominado como eixo  $Im(z)$ . Essa disposição permite uma representação visual direta e intuitiva dos números complexos.

Um número complexo, expresso na forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é a unidade imaginária, pode ser representado no plano complexo tanto como um ponto (afixo) cujas coordenadas são  $(a, b)$ , quanto como um vetor com origem em  $(0,0)$  e extremidade em  $(a, b)$ . Esta abordagem, conforme demonstrado na Figura 13, oferece uma visualização geométrica intuitiva e eficaz, destacando a natureza bidimensional dos números complexos e facilitando o entendimento de suas operações e propriedades.

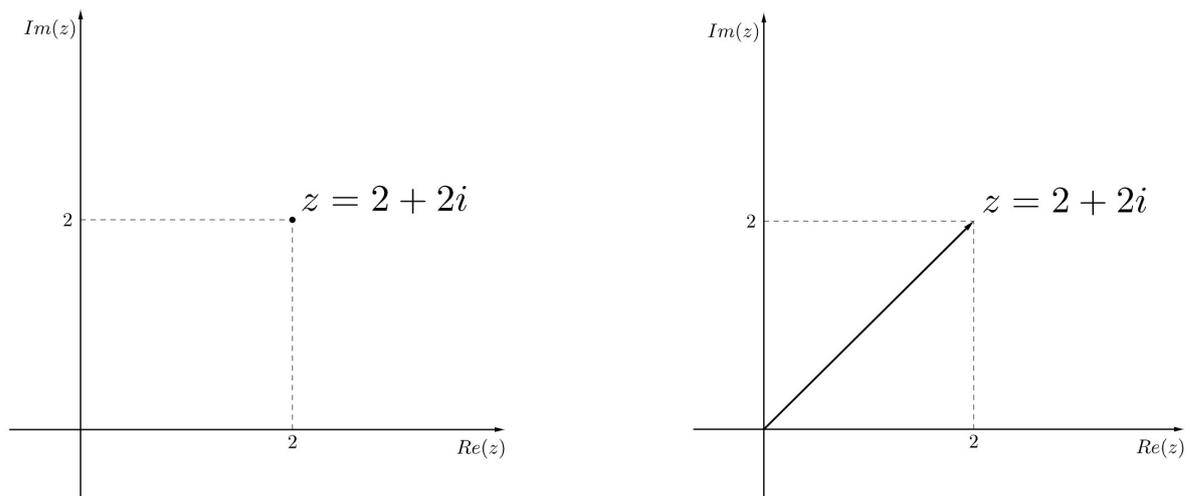


Figura 13 – Representação do número complexo  $z = 2 + 2i$  no plano complexo.

À esquerda,  $z$  é representado geometricamente como um ponto no plano. Este ponto, conhecido como afixo, está localizado nas coordenadas  $(2,2)$ .

À direita, o mesmo número complexo é interpretado como um vetor. Este vetor origina-se no ponto  $(0,0)$  e tem sua extremidade no afixo  $(2,2)$ , ilustrando graficamente a magnitude e direção de  $z$  no plano complexo.

Fonte: O Autor, 2023.

Por exemplo, a soma de dois números complexos corresponde à soma vetorial de seus representantes no plano complexo, e o módulo é interpretado como a distância da origem do plano até o afixo.

Além disso, o plano complexo facilita a compreensão de conceitos como a multiplicação de números complexos, que pode ser interpretada como uma combinação de rotação e escalonamento no plano, e a noção de argumento de um número complexo, que corresponde ao ângulo que o vetor, representando o número complexo, forma com o eixo real.

### 3.1.2 Módulo e argumento de um número complexo no plano

No plano complexo, cada número complexo  $z$ , expresso na forma  $a + bi$ , é representado por um ponto cujas coordenadas são  $(a, b)$ . O módulo de  $z$ , denotado por  $|z|$ , é definido como a distância da origem do plano, ponto  $(0,0)$ , até o afixo, ponto  $(a, b)$ .

Esta distância, no contexto geométrico, corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo formado pelos segmentos de medidas  $a$ ,  $b$  e  $|z|$ . A aplicação do Teorema de Pitágoras a este triângulo, nos permite calcular o módulo de  $z$ . Conforme o teorema, a soma dos quadrados das medidas dos catetos (neste caso,  $a$  e  $b$ , que são as partes real e imaginária do número complexo, respectivamente) é igual ao quadrado da medida da hipotenusa (o módulo de  $z$ ). Assim, a fórmula para o módulo de um número complexo  $z$  é dada por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Essa relação não apenas fornece um método para calcular o módulo, mas também sublinha a conexão intrínseca entre a álgebra e a geometria no estudo dos números complexos, como podemos observar na Figura 14. A representação geométrica do módulo como uma distância no plano complexo torna o conceito mais acessível e compreensível, especialmente em aplicações que envolvem a visualização de complexos e suas propriedades.

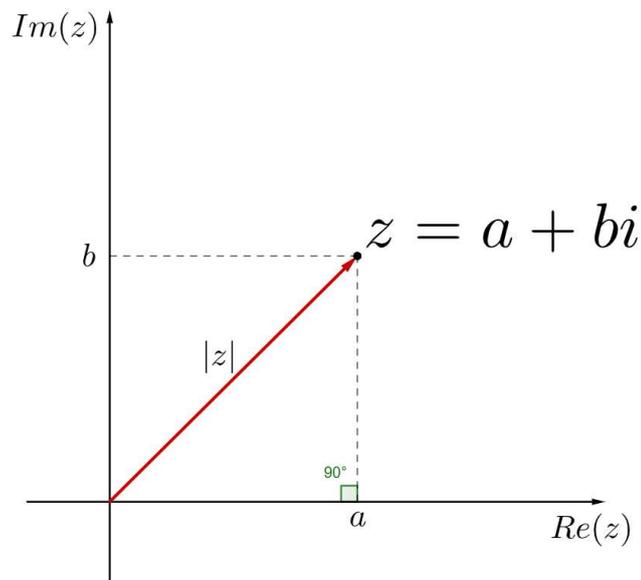


Figura 14 – Módulo de um número complexo.  
Fonte: O Autor, 2023.

No estudo dos números complexos, além do módulo que representa a magnitude, outro conceito fundamental é o argumento, que indica a direção de um número complexo no plano de Argand-Gauss. O argumento de um número complexo é definido como o ângulo formado entre o eixo real positivo e o vetor que representa o número complexo, medido no sentido anti-horário, como podemos verificar na Figura 15. Em termos geométricos, o argumento de  $z$ , denotado por  $\arg(z)$ , é o ângulo  $\theta$  que o vetor representativo de  $z$  faz com o eixo real positivo.

$$\arg(z) = \theta$$

Se considerarmos um número complexo  $z = a + bi$ , o argumento de  $z$ , denotado como  $\arg(z)$ , é o ângulo  $\theta$  tal que:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \therefore \quad a = |z| \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} \quad \therefore \quad b = |z| \sin \theta$$

A partir desta relação, é possível extrair a expressão de  $z$  em sua forma polar. Nos aprofundaremos neste assunto em seções futuras, mas por ora, é relevante ter em mente que esta forma é particularmente útil, pois fornece uma representação do complexo que enfatiza sua magnitude (módulo) e direção (argumento). Assim, ao combinar estas relações, obtemos:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z &= |z| \cos \theta + |z| \sin \theta i \\ z &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

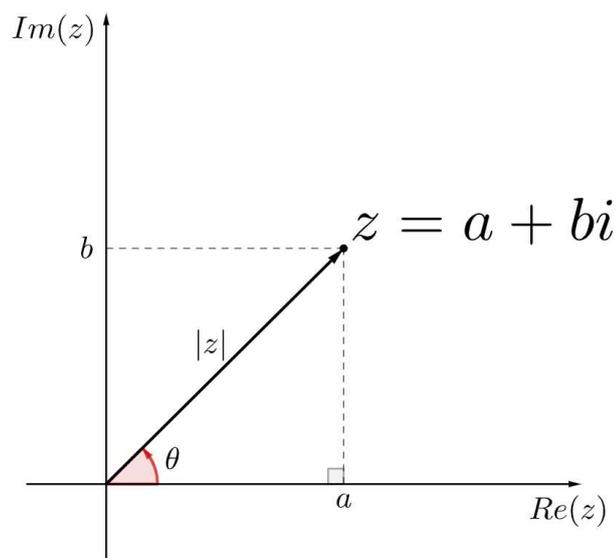


Figura 15 – Argumento de um número complexo.  
Fonte: O Autor, 2023.

O conceito de argumento é crucial para operações como a multiplicação e divisão de números complexos, pois estas operações envolvem não apenas a alteração do módulo dos números, mas também a rotação de seus vetores no plano complexo. Assim, o argumento oferece uma interpretação geométrica para tais operações, evidenciando a riqueza e a elegância da matemática dos números complexos.

Exemplo: escreva na forma polar o número complexo  $z = 2 + 2i$ .

1) Cálculo do módulo.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$|z| = \sqrt{4 + 4}$$

$$|z| = \sqrt{8}$$

$$|z| = 2\sqrt{2}$$

2) Cálculo do argumento.

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\theta = 45^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\theta = 45^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{4}$$

Conforme estabelecido, a representação polar de um número complexo  $z = a + bi$  é dada por  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , onde  $|z|$  é o módulo de  $z$  e  $\theta$  seu argumento.

Logo, na forma polar,  $z = 2 + 2i$ , é expresso como  $z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

### 3.2 POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA $i$

Ao explorarmos a unidade imaginária  $i$ , nos deparamos com propriedades significativas, particularmente ao investigarmos suas potências. Essas potências de  $i$  não apenas revelam características únicas, mas também exibem um comportamento cíclico importante, que se manifesta claramente através de uma análise algébrica como veremos mais abaixo.

Este padrão cíclico não só é fundamental para a compreensão dos números complexos, mas também é crucial em diversas aplicações matemáticas, onde a periodicidade e a simetria desempenham papéis-chave. À medida que avançarmos, vamos examinar como as potências de  $i$  se desenvolvem e se repetem, evidenciando a elegância e a coerência subjacentes no universo dos números complexos.

$$\begin{aligned}i &= \sqrt{-1} \\i^0 &= 1 \\i^1 &= i \\i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\i^3 &= i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i\end{aligned}$$

A partir daqui o ciclo se repete:

$$\begin{aligned}i^4 &= i^3 \cdot i^1 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1 \\i^5 &= i^4 \cdot i^1 = (1) \cdot i = i \\i^6 &= i^5 \cdot i^1 = i \cdot i = i^2 = -1 \\i^7 &= i^6 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i\end{aligned}$$

Ao continuarmos a calcular as potências, as respostas sempre serão elementos do conjunto  $\{1, i, -1, -i\}$ . Então, para encontrarmos uma potência da unidade  $i^n$ , faremos a divisão de  $n$  (o expoente) por 4, e o resto dessa divisão será o novo expoente de  $i$ ,  $r = \{0, 1, 2, 3\}$ .

Exemplos:

$$\begin{aligned}i^{103} &\rightarrow \text{Se } \frac{103}{4} = 25, \text{ com resto } 3 \quad \therefore i^{103} = i^3 = -i \\i^{1083} &\rightarrow \text{Se } \frac{1083}{4} = 270, \text{ com resto } 3 \quad \therefore i^{1083} = i^3 = -i \\i^{121} &\rightarrow \text{Se } \frac{121}{4} = 30, \text{ com resto } 1 \quad \therefore i^{121} = i^1 = i\end{aligned}$$

Assim como no contexto algébrico as potências de  $i$  revelam uma sequência cíclica, na perspectiva geométrica, observamos um padrão de rotação consistente e repetitivo, como podemos observar na Figura 16:

$i^0 = 1$ : No plano complexo, esta potência pode ser representada por um vetor unitário no eixo real positivo, pois qualquer número, exceto zero, elevado à potência zero é igual a 1.

$i^1 = i$ : Aqui, o vetor gira  $90^\circ$  no sentido anti-horário a partir da posição inicial em  $i^0$ , posicionando-se no eixo imaginário positivo.

$i^2 = -1$ : Continuando o movimento no sentido anti-horário, o vetor agora gira mais  $90^\circ$ , alinhando-se com o eixo real negativo. Esta é uma rotação total de  $180^\circ$  desde  $i^0$ .

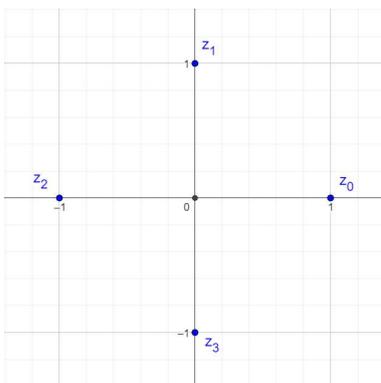
$i^3 = -i$ : Uma terceira rotação de  $90^\circ$  move o vetor para o eixo imaginário negativo, totalizando uma rotação de  $270^\circ$  desde o início.

$i^4 = 1$ : Com mais uma rotação de  $90^\circ$ , o vetor retorna à posição original em  $i^0$ , completando um ciclo total de  $360^\circ$ .

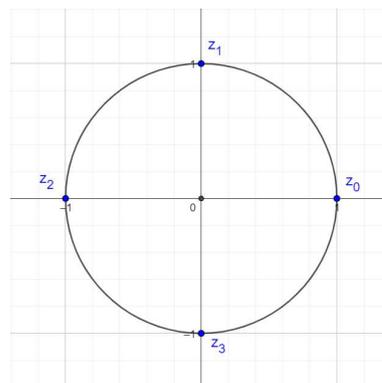
Esse padrão se repete com cada potência de  $i$ , representando uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário. Geometricamente, isso equivale a multiplicar um número complexo por  $i$ , que sempre resulta em uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário no plano complexo.

Figura 16 – Potências de  $i$  no plano complexo.

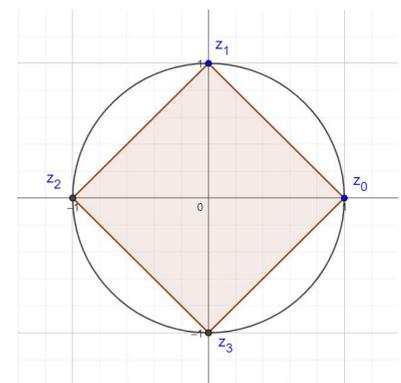
$$z_0 = i^0 = 1, \quad z_1 = i^1 = i = 0 + i, \quad z_2 = i^2 = -1 = -1 + 0i, \quad z_3 = i^3 = -i = 0 - 1i$$



Afixos das potências de  $i$  no plano complexo. A distribuição desses pontos revela sua natureza rotacional. Cada potência sucessiva corresponde a uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário.



As potências de  $i$  estão sobre o círculo unitário, destacando a propriedade de que esses pontos têm magnitude (ou módulo) 1. Isso significa que a multiplicação por  $i$  não altera a magnitude, apenas sua direção.



O polígono regular de quatro lados inscrito no círculo unitário sintetiza a regularidade e a periodicidade das potências de  $i$ , reiterando a natureza periódica dessas potências e sua relação com as rotações de  $90^\circ$ .

### 3.3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS: FORMA ALGÉBRICA

As operações com números complexos na forma algébrica seguem regras e propriedades específicas que, embora se assemelhem às operações com números reais, possuem particularidades inerentes à natureza dos números complexos.

Nas seções subsequentes, detalharemos cada uma dessas operações. Inicialmente, abordaremos a adição e a subtração, operações que destacam a natureza bidimensional dos números complexos. Em seguida, exploraremos a multiplicação, que, além de combinar as partes reais e imaginárias, introduz uma interação com a rotação no plano complexo. Por fim, a divisão, talvez a mais exigente das operações, pois revela a necessidade de estratégias adicionais, como a multiplicação pelo conjugado, para efetuar cálculos que, à primeira vista, podem parecer desafiadores.

#### 3.3.1 Adição de números complexos na forma algébrica

A operação de adição de números complexos é direta, seguindo princípios similares aos da adição de vetores no plano. Quando adicionamos dois números complexos,  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , estamos, efetivamente, adicionando suas partes reais e imaginárias separadamente. O resultado é um novo número complexo onde a parte real é a soma das partes reais, e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias. Algebricamente, isso pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ \mathbf{z_1 + z_2} &= \mathbf{(a + c) + (b + d)i} \end{aligned}$$

Exemplos:

$$\text{a) } (2 + 3i) + (5 + 2i) = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$$

$$\text{b) } (3 + 2i) + (6 + 1i) = (3 + 6) + (2 + 1)i = 9 + 3i$$

Nas próximas seções, veremos o modo como essa operação pode ser visualizada geometricamente, onde cada número complexo é representado por um vetor. A soma resulta um vetor que é a diagonal principal do paralelogramo formado pelos vetores originais.

### 3.3.2 Subtração de números complexos na forma algébrica

A subtração de números complexos segue um raciocínio similar. Para subtrair  $z_2$  de  $z_1$ , subtraímos as partes reais e as partes imaginárias, separadamente.

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i}$$

Exemplos:

$$\text{a) } (2 + 3i) - (5 + 2i) = (2 - 5) + (3 - 2)i = -3 + 1i$$

$$\text{b) } (3 + 2i) - (6 + 1i) = (3 - 6) + (2 - 1)i = -3 + 1i$$

Ao subtrair um número complexo de outro, estamos, no plano complexo, encontrando a diagonal secundária do paralelogramo formado pelos vetores correspondentes. Essa interpretação geométrica não apenas facilita a visualização da operação, mas também ajuda a entender as relações espaciais entre números complexos, como veremos mais adiante.

### 3.3.3 Multiplicação de números complexos na forma algébrica

A multiplicação de números complexos é uma operação que combina tanto as partes reais quanto as imaginárias dos números envolvidos, resultando em um produto que reflete uma interação mais ampla do que a observada na adição e subtração.

Quando multiplicamos dois números complexos,  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição, tratando  $i$  como uma variável, mas lembrando que  $i^2 = -1$ . A fórmula para a multiplicação é:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bd \cdot (-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd$$

$$\mathbf{z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

Esta fórmula mostra que o produto de dois números complexos resulta em um novo número complexo, cuja parte real é  $ac - bd$  e a parte imaginária é  $ad + bc$ .

Conforme exploraremos em detalhes nas próximas seções, geometricamente, a multiplicação de números complexos pode ser vista como uma combinação de rotação e alteração de escala no plano complexo. Cada número complexo pode ser representado por um vetor neste plano, e a multiplicação envolve girar um desses vetores em torno da origem (o ângulo de rotação é a soma dos ângulos que cada número faz com o eixo real) e, em seguida, ampliar ou reduzir a distância desse vetor à origem. Essa alteração na escala é proporcional ao produto dos módulos dos números complexos envolvidos.

Exemplo:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 3i \text{ e } z_2 = 3 - 2i \\ z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2i) + 3i \cdot 3 + 3i \cdot (-2i) \\ z_1 \cdot z_2 &= 6 - 4i + 9i - 6i^2 \\ z_1 \cdot z_2 &= 6 + 5i - 6 \cdot (-1) \\ z_1 \cdot z_2 &= 6 + 5i + 6 \\ z_1 \cdot z_2 &= 12 + 5i \end{aligned}$$

### 3.3.4 Divisão de números complexos na forma algébrica

A divisão entre números complexos, embora mais exigente do que a adição, subtração e multiplicação, segue um método sistemático. Para dividir dois números complexos como esses:  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , onde  $z_2 \neq 0$ , empregamos o conceito de conjugado de um complexo para eliminar a unidade imaginária do denominador.

O conjugado de um número complexo  $z = c + di$  é definido como  $\bar{z} = c - di$ . A chave para a divisão é multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo conjugado do denominador. Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{ac - adi + cbi - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{ac - adi + cbi - bd(-1)}{c^2 - d^2(-1)} \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Esta fórmula permite a divisão de dois números complexos, resultando em um número complexo cuja parte real é  $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$  e a parte imaginária é  $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ .

Exemplo:

$z_1 = 2 - 3i$  e  $z_2 = 3 - i$ , calcular  $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{3 - i} = \frac{2 - 3i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6 + 2i - 9i - 3i^2}{9 + 3i - 3i - i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6 - 7i - 3(-1)}{9 - (-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9 - 7i}{10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{10} - \frac{7}{10}i$$

Geometricamente, a divisão de números complexos pode ser vista como uma operação inversa à multiplicação. Ela envolve uma combinação de rotação inversa e mudança de escala no plano complexo. Essa interpretação será mais explorada posteriormente, destacando a beleza e elegância da álgebra e da geometria dos números complexos.

### 3.4 OPERAÇÕES: ABORDAGEM GEOMÉTRICA E FORMA POLAR

No estudo dos números complexos, diferentes operações podem ser mais intuitivamente compreendidas e realizadas ao adotarmos abordagens distintas. Neste tópico, exploraremos as operações de adição e subtração através da abordagem geométrica e as operações de multiplicação e divisão utilizando a forma polar. Esta escolha de abordagens é motivada pelas características intrínsecas de cada conjunto de operações, e como elas se manifestam no plano complexo.

A adição e subtração de números complexos são operações que se beneficiam grandemente de uma interpretação geométrica. A adição (ou subtração) de dois números complexos pode ser visualizada como a adição (ou subtração) vetorial destes pontos, uma

abordagem que fornece uma compreensão visual e direta do resultado dessas operações. Esta interpretação geométrica não apenas simplifica a compreensão dessas operações básicas, mas também oferece *insights* sobre a natureza bidimensional dos números complexos.

Por outro lado, a multiplicação e divisão de números complexos são operações que ganham uma nova dimensão de simplicidade e elegância quando abordadas na forma polar. Nesta representação, um número complexo é expresso por seu módulo (distância da origem ao afixo) e argumento (ângulo com o eixo real). A multiplicação resulta na multiplicação dos módulos e na adição dos argumentos, enquanto a divisão é realizada dividindo-se os módulos e subtraindo-se os argumentos. Esta abordagem destaca o poder da forma polar em simplificar operações que, de outra forma, seriam mais exigentes na forma algébrica.

### 3.4.1 Adição e subtração de números complexos, uma abordagem geométrica

Quando adicionamos dois números complexos, representados por vetores, o vetor resultante da adição corresponde à diagonal principal do paralelogramo formado por esses vetores. Esta representação geométrica não apenas simplifica a compreensão da operação de adição, mas também oferece uma visualização intuitiva e significativa do processo.

De maneira similar, a subtração de números complexos pode ser visualizada como a diagonal secundária do paralelogramo formado pelos mesmos vetores. Esta abordagem geométrica para a subtração nos permite entender como um número complexo é subtraído de outro no plano complexo, resultando em um vetor que representa a diferença entre os dois pontos no plano, visualizado como a diagonal secundária do paralelogramo.

Tomemos como exemplo os números complexos  $z_1 = 1 + 2i$  e  $z_2 = 3 + i$ .

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 + i) = 4 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 + i) = -2 + i$$

Geometricamente, como ilustrado na Figura 17, a soma dos vetores  $z_1$  e  $z_2$  corresponde ao vetor  $z_3 = 4 + 3i$ , que é a diagonal principal do paralelogramo formado por  $z_1$  e  $z_2$ . Por outro lado, a subtração de  $z_2$  de  $z_1$  é representada pelo vetor  $z_4 = -2 + i$ , que corresponde à diagonal secundária do paralelogramo.

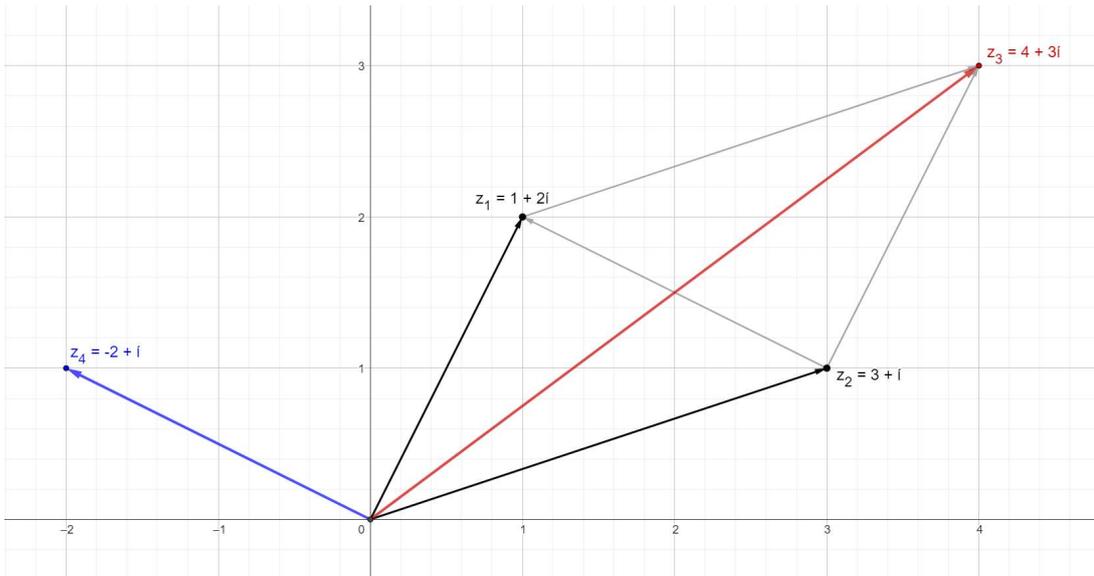


Figura 17 – Adição e subtração de números complexos, uma abordagem geométrica.

$$z_1 + z_2 = z_3 = 4 + 3i \text{ (diagonal principal do paralelogramo)}$$

$$z_1 - z_2 = z_4 = -2 + i \text{ (diagonal secundária do paralelogramo)}$$

Fonte: O Autor, 2023

### 3.4.2 A Forma Polar de um número complexo

Como discutido anteriormente, a forma polar de um número complexo é uma alternativa à representação algébrica, proporcionando uma perspectiva valiosa para o estudo das propriedades e operações de tais números. Essa abordagem é particularmente útil para multiplicação e divisão, pois simplifica consideravelmente essas operações. Na forma polar, um número complexo é representado por dois parâmetros: seu módulo (ou magnitude) e seu argumento (ou ângulo), como podemos observar na figura 18.

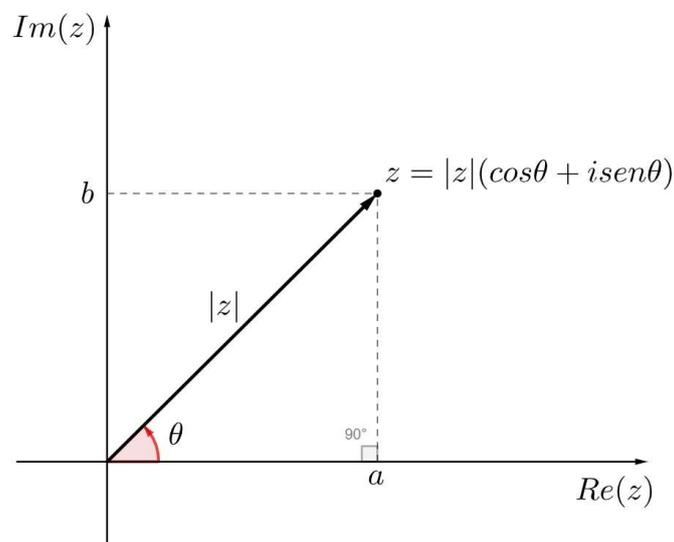


Figura 18 – Forma polar de um número complexo.  
Fonte: O Autor, 2023.

Exemplo: escreva na forma polar o número complexo  $z = 1 + i$ .

1) Cálculo do módulo.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$|z| = \sqrt{1 + 1}$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

2) Cálculo do argumento.

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\theta = 45^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\theta = 45^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{4}$$

Portanto, na forma polar,  $z = 1 + i$ , é expresso como  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

### 3.4.3 Multiplicação de números complexos na forma polar

Consideremos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , dados na forma polar:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

O produto  $z_1 \cdot z_2$  é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot |z_2|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot i \sin \alpha + i \sin \theta \cdot \cos \alpha + i \sin \theta \cdot i \sin \alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot i \sin \alpha + i \sin \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha + \cos \theta \cdot i \sin \alpha + i \sin \theta \cdot \cos \alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ((\cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha) + (\cos \theta \cdot i \sin \alpha + i \sin \theta \cdot \cos \alpha))$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ((\cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha) + i(\cos \theta \cdot \sin \alpha + \sin \theta \cdot \cos \alpha))$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))$$

Logo, para multiplicar dois números complexos na forma polar, basta multiplicar os módulos e somar os argumentos, Figura 19. Tomemos como exemplo os números complexos:

$$z_1 = 2 + i$$

$$z_2 = 2 + 2i$$

Forma algébrica:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (2 + 2i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4 + 4i + 2i - 2$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_3 = 2 + 6i$$

Forma polar:

$$z_1 = \sqrt{5}(\cos 26,6^\circ + i \sin 26,6^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt{40}(\cos 71,6^\circ + i \sin 71,6^\circ)$$

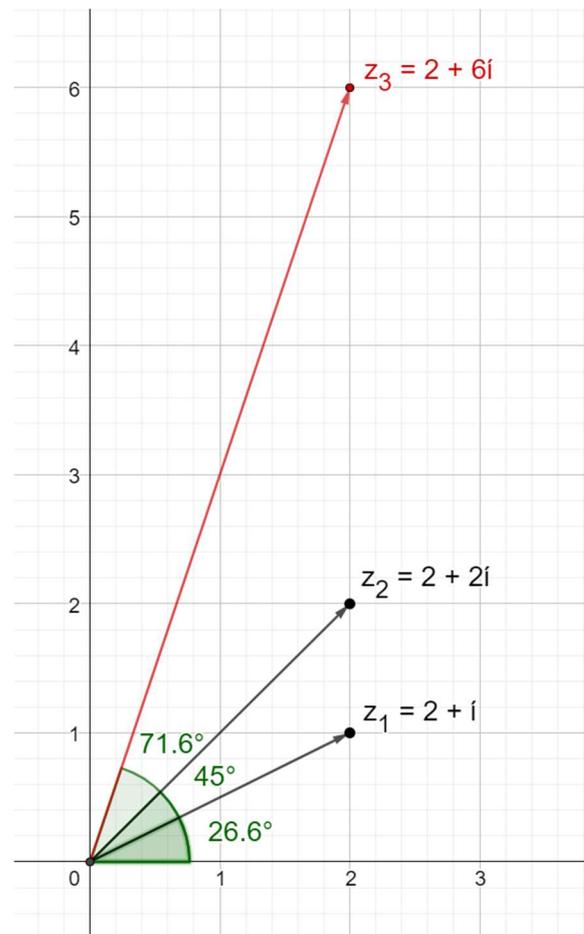


Figura 19 – Multiplicação de números complexos na forma polar.

Fonte: O Autor, 2023

### 3.4.4 Divisão de números complexos na forma polar

Sejam os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , dados na forma polar:

$$z_1 = |z_1|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)} \cdot \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \cdot \sin \alpha) + i(\cos \theta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \theta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\theta - \alpha) + i(\sin(\theta - \alpha)))$$

Portanto, para dividir dois números complexos, dividimos seus módulos e subtraímos seus argumentos. Tomemos como exemplo  $z_1 = 2 + i$  e  $z_2 = 2 + 2i$ , Figura 20.

Forma algébrica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{2 + 2i} \cdot \frac{2 - 2i}{2 - 2i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$$

Forma polar:

$$z_1 = \sqrt{5}(\cos 26,57^\circ + i \sin 26,57^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(\cos 341,57^\circ + i \sin 341,57^\circ)$$

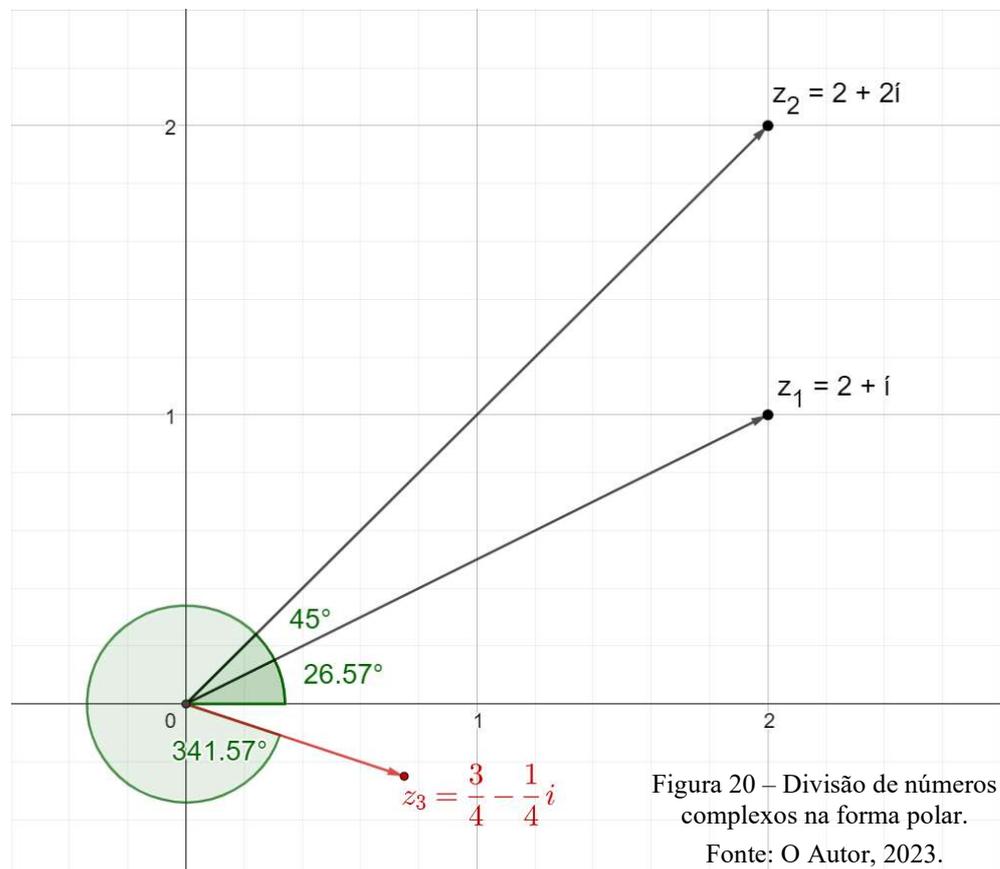


Figura 20 – Divisão de números complexos na forma polar.

Fonte: O Autor, 2023.

## 4 PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A multiplicação de dois números complexos pode ser visualizada geometricamente como uma combinação de escala e rotação. Podemos usar essa interpretação para realizar a multiplicação de dois números complexos mantendo um vetor fixo, Figura 21. Para entender como fazer isso, veja esse exemplo:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bidi = (ac - bd) + (ad + cd)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a(c + di) + bi(c + di), \text{ onde } (c + di) \text{ é um vetor } v \text{ fixo.}$$

Para manter o vetor  $v$  fixo, multiplicamos o vetor  $v$  pela parte real e pela parte imaginária.

Isso nos permite realizar as seguintes operações:

a) Multiplicar o vetor  $v$  por um número real  $a$ ,  $av$ .

se  $a > 1$  há uma expansão do vetor  $v$ ,

se  $0 < a < 1$  há uma retração do vetor  $v$ ,

se  $a < 0$  há uma inversão do vetor  $v$ .

b) Multiplicar o vetor  $v$  pela unidade imaginária:  $(bi)v$ , isso fará com que ele escale e rotacione  $90^\circ$  no sentido anti-horário. A escala dependerá do módulo de  $b$ , assim como explicado acima.

c) Adicionar os vetores resultantes.

Dessa forma, multiplicar dois números complexos é o mesmo que adicionar dois vetores perpendiculares, de tal modo que o primeiro vetor  $a(c + di)$  é um múltiplo do vetor  $v$ , e o segundo vetor  $bi(c + di)$  é múltiplo e perpendicular ao vetor  $v$ .

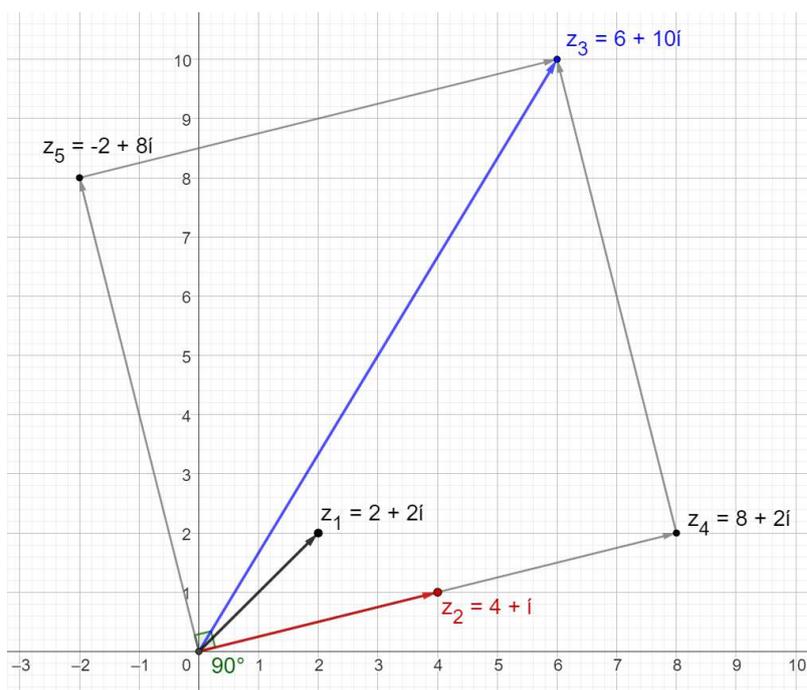


Figura 21 – Multiplicação, de números complexos, usando a técnica de vetor fixo.

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 4 + i \text{ (vetor fixo)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2(4 + i) + 2i(4 + i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_4 + z_5$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_3 = 6 + 10i$$

Fonte: O Autor, 2023.

#### 4.1 PROPRIEDADE COMUTATIVA

A propriedade comutativa é uma das propriedades básicas da aritmética, e ela se aplica também aos números complexos. A propriedade comutativa afirma que a ordem na qual realizamos uma operação não afeta o resultado. Em outras palavras, se temos dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , a ordem em que os adicionamos ou os multiplicamos não muda o resultado. Algebricamente, podemos escrever a propriedade comutativa como:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Ou seja, se adicionarmos dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , teremos o mesmo resultado se trocarmos a ordem dos termos e adicionarmos  $z_2$  e  $z_1$ . Isso também vale para a multiplicação de dois números complexos. O resultado será o mesmo, independentemente da ordem em que os multiplicarmos, Figura 22. Podemos verificar a propriedade comutativa ao considerarmos os números complexos  $z_1 = 2 + 2i$  e  $z_2 = 4 + i$ , vejamos:

$$z_1 = 2 + 2i \text{ e } z_2 = 4 + i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 2i) + (4 + i) = \mathbf{6 + 3i}$$

$$z_2 + z_1 = (4 + i) + (2 + 2i) = \mathbf{6 + 3i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 2i) \cdot (4 + i) = \mathbf{6 + 10i}$$

$$z_2 \cdot z_1 = (4 + i) \cdot (2 + 2i) = \mathbf{6 + 10i}$$

Podemos ver que, em ambos os casos, a propriedade comutativa é satisfeita e que a ordem em que os números complexos são adicionados ou multiplicados não afeta o resultado.

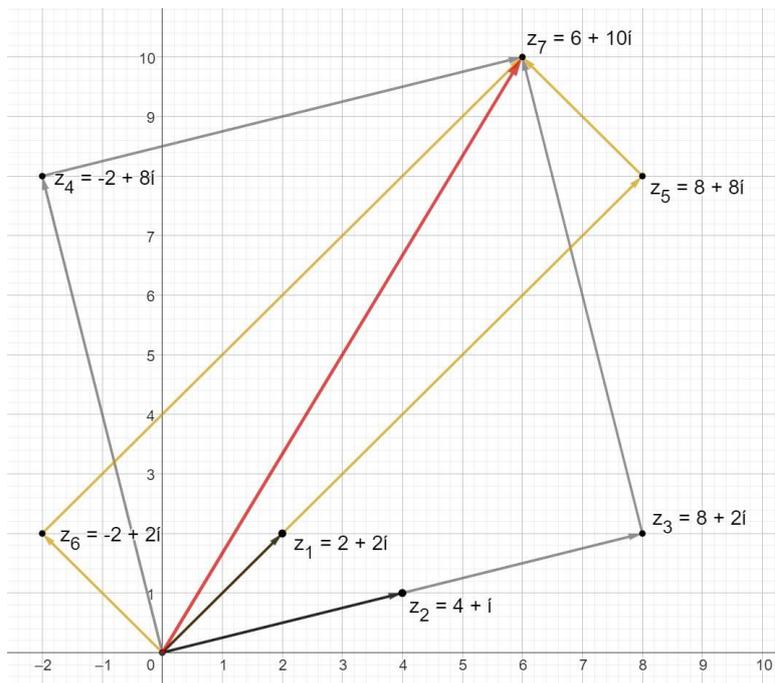


Figura 22 – Propriedade comutativa dos números complexos

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 4 + i$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_7 = 6 + 10i$$

$$z_2 \cdot z_1 = z_7 = 6 + 10i$$

Fonte: O Autor, 2023.

## 4.2 PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DA ADIÇÃO

Essa propriedade afirma que, ao adicionar três ou mais números complexos, podemos associá-los de diferentes maneiras, e o resultado será o mesmo. Formalmente, se tivermos três números complexos quaisquer  $z_1, z_2$  e  $z_3$ , a propriedade associativa da adição diz que:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Ao adicionar três números complexos, podemos agrupar os dois primeiros ( $z_1 + z_2$ ) e, em seguida, adicionar o terceiro ( $z_3$ ) ou agrupar o segundo e o terceiro ( $z_2 + z_3$ ) e, em seguida, adicionar o primeiro ( $z_1$ ). Independentemente da ordem em que forem agrupados, o resultado será o mesmo, Figuras 23 e 24. Um exemplo dessa propriedade pode ser visto abaixo:

Sejam  $z_1 = -4 + 2i$ ,  $z_2 = 3 + 3i$ ,  $z_3 = 4 + i$ . Então, temos:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (-4 + 2i + 3 + 3i) + (4 + i) = (-1 + 5i) + (4 + 1i) = 3 + 6i$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (-4 + 2i) + (3 + 3i + 4 + i) = (-4 + 2i) + (7 + 4i) = 3 + 6i$$

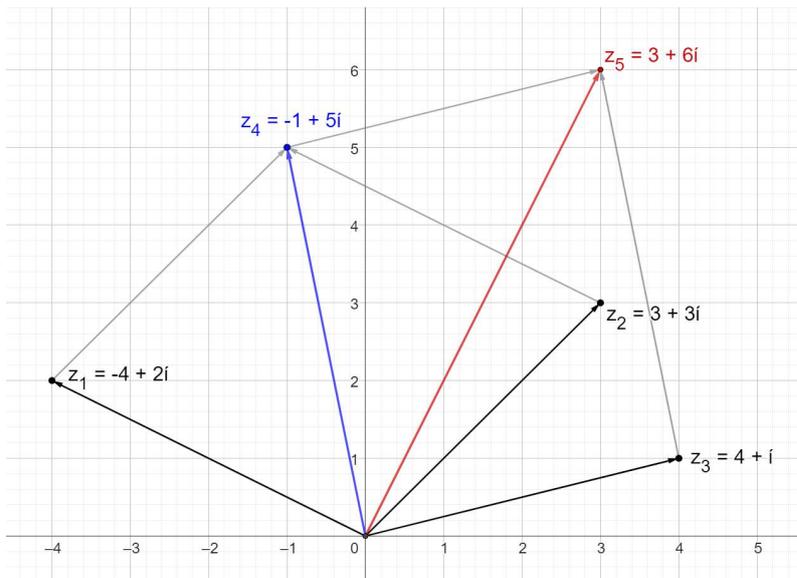


Figura 23 – Propriedade associativa da adição dos números complexos: caso 1.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (z_4 + z_3) = z_5$$

$$(-4 + 2i + 3 + 3i) + (4 + i) =$$

$$(-1 + 5i) + (4 + 1i) = 3 + 6i$$

Fonte: O Autor, 2023.

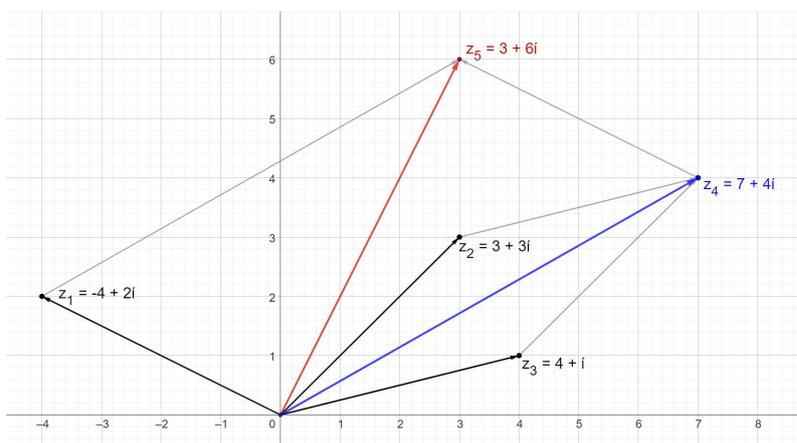


Figura 24 – Propriedade associativa da adição dos números complexos: caso 2.

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_4) = z_5$$

$$(-4 + 2i) + (3 + 3i + 4 + i) =$$

$$(-4 + 2i) + (7 + 4i) = 3 + 6i$$

### 4.3 PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DA MULTIPLICAÇÃO

A propriedade associativa da multiplicação afirma que a forma como os números complexos são agrupados não afeta o resultado da multiplicação. Formalmente, sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  números complexos quaisquer, a propriedade associativa da multiplicação pode ser escrita da seguinte forma:  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ .

Isso significa que o produto dos números complexos  $(z_1 \cdot z_2)$  pode ser multiplicado por  $z_3$  em qualquer ordem, ou que o produto de  $(z_2 \cdot z_3)$  pode ser multiplicado por  $z_1$  em qualquer ordem, e ainda assim o resultado será o mesmo, Figuras 25 e 26. Podemos verificar a propriedade associativa da multiplicação da seguinte forma:

Sejam  $z_1 = 2i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = 2 + i$ . Então, temos:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(2i) \cdot (2 + 2i)] \cdot (2 + i)$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (-4 + 4i) \cdot (2 + i)$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = -12 + 4i$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2i) \cdot [(2 + 2i) \cdot (2 + i)]$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2i) \cdot (2 + 6i)$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = -12 + 4i$$

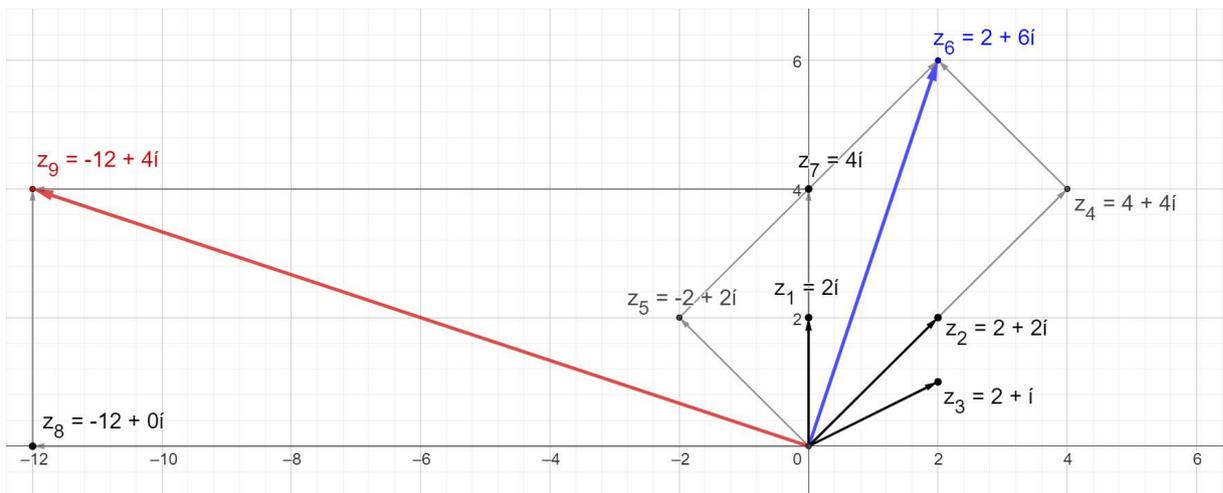


Figura 25 – Propriedade associativa da multiplicação dos complexos: caso 1.

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_6 = z_9$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = 2i \cdot [(2 + 2i) \cdot (2 + i)]$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = 2i \cdot (2 + 6i) = -12 + 4i$$

Fonte: O Autor, 2023.

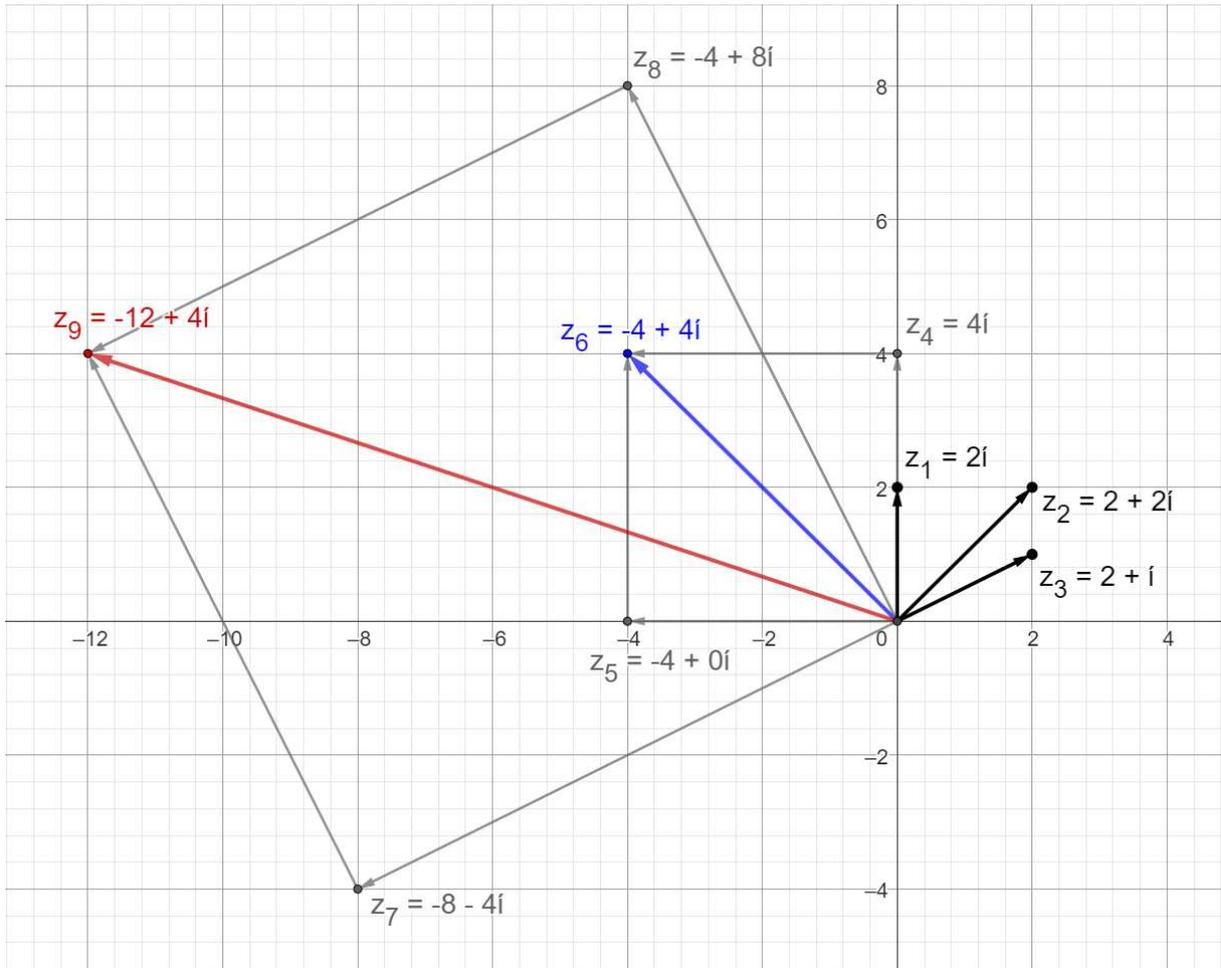


Figura 26 – Propriedade associativa da multiplicação dos complexos, caso 2.

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (z_6 \cdot z_3) = z_9$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(2i) \cdot (2 + 2i)] \cdot (2 + i)$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (-4 + 4i) \cdot (2 + i) = -12 + 4i$$

Fonte: O Autor, 2023.

#### 4.4 PROPRIEDADE DO OPOSTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

A propriedade do oposto dos números complexos diz que, para todo número complexo  $z_1 = a + bi$ , há um número complexo oposto,  $z_2 = -a - bi$ , tal que,  $z_1 + z_2 = 0$ . O oposto de um número complexo pode ser obtido simplesmente trocando o sinal da parte real e da parte imaginária do número.

Se  $z_1$  é um número complexo qualquer, então seu oposto ( $z_2$ ) mantém a mesma magnitude e o mesmo módulo de  $z_1$ , mas inverte o seu sentido, Figura 27. Portanto, são simétricos em relação à origem. Por outro lado, o conjugado de um número complexo é simétrico em relação ao eixo  $x$ , Figura 28. Além disso, o produto de um número complexo por seu conjugado sempre resultará em um número real puro, Figura 29.

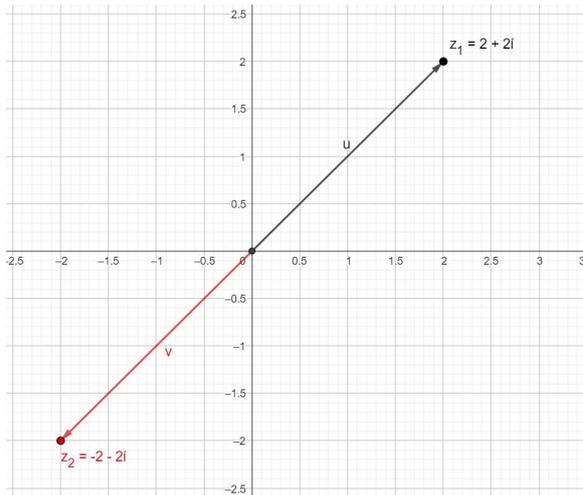


Figura 27 – Propriedade oposto dos números complexos.

O oposto do número complexo  $z_1$  mantém o módulo, mas inverte o sentido.

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = -2 - 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

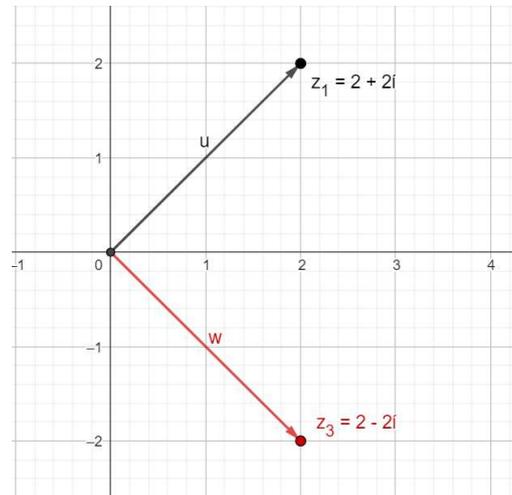


Figura 28 – O número complexo e seu conjugado são simétricos.

$z_1$  e seu conjugado  $z_3$  são simétricos em relação ao eixo  $x$ .

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_3 = 2 - 2i$$

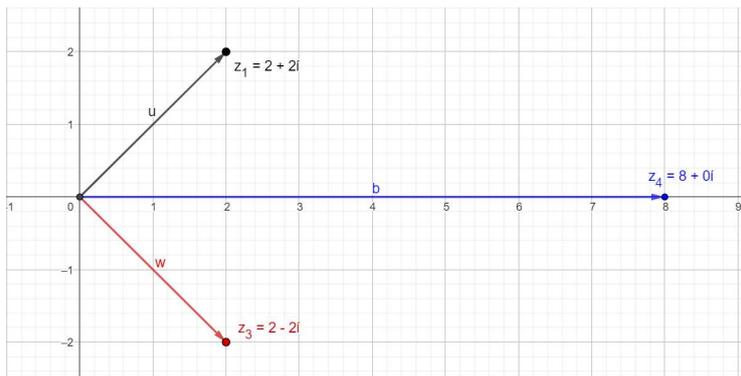


Figura 29 – O produto de um número complexo por seu conjugado.

O resultado, desse produto, sempre será um número real puro.

$$z_1 \cdot z_3 = z_4$$

$$(2 + 2i) \cdot (2 - 2i) = (8 + 0i)$$

Fonte: O Autor, 2023.

## 5 PRIMEIRA FÓRMULA DE DE MOIVRE – POTENCIAÇÃO

A primeira fórmula de De Moivre relaciona os números complexos com a trigonometria. Essa fórmula é aplicada para potências inteiras de números complexos. Ela é atribuída ao matemático francês Abraham de Moivre (1667–1754), que a apresentou em seu livro “*The Doctrine of Chances*” em 1718.



Figura 30 – Abraham de Moivre.

Fonte: Disponível em: [https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De\\_Moivre/pictdisplay/](https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre/pictdisplay/).  
Acesso em: 09 dez. 2023

Veremos que a representação polar de um número complexo é especialmente apropriada para operações de multiplicação entre esses números.

Considere os seguintes números complexos, em sua forma trigonométrica (ou polar):

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot i \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot i \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot i \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot i \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)))$$

Podemos continuar:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)))$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \dots \cdot \rho_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n)))$$

Portanto, para obtermos o produto de dois ou mais números complexos, multiplicamos os módulos e adicionamos os argumentos. Vejamos:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ então}$$

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \text{ onde } n \in \mathbb{Z}$$

Se  $\rho = 1$ , obtemos a fórmula de De Moivre:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^n = (\rho(\cos \theta + i \sin \theta))^n$$

$$z^n = (1(\cos \theta + i \sin \theta))^n$$

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

Se  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ , então:

$$z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

A primeira fórmula de De Moivre tem aplicações em diversas áreas da matemática, como cálculo, teoria dos números, geometria e física. Ela é um exemplo de como a trigonometria e os números complexos estão intimamente relacionados. Pode ser utilizada para simplificar cálculos envolvendo números complexos elevados a potências inteiras. Por exemplo, se quisermos calcular  $(\sqrt{3} + i)^{10}$ , podemos usar a Fórmula de De Moivre da seguinte forma:

$$(\sqrt{3} + i)^{10} = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

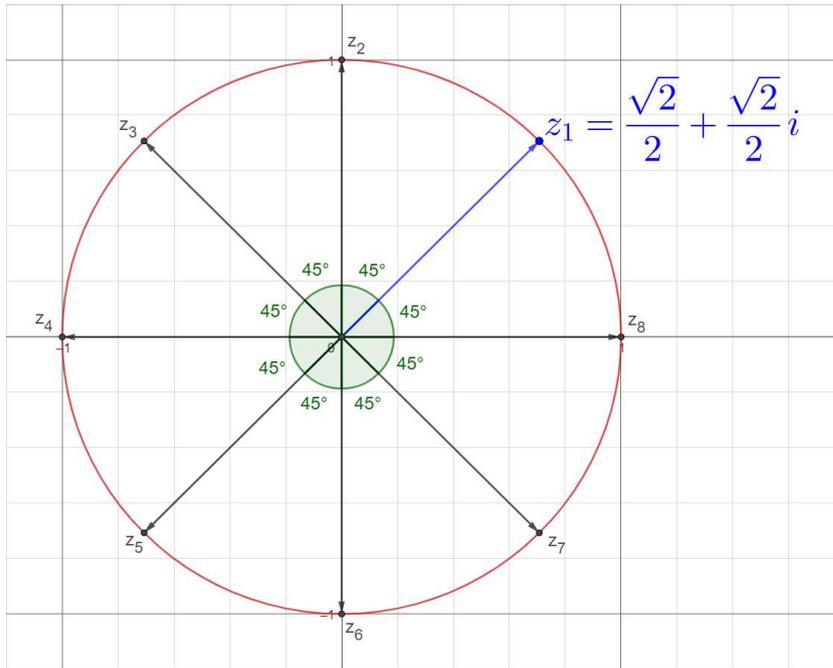
$$(\sqrt{3} + i)^{10} = (2)^{10} \left( \cos\left(10 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(10 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^{10} = 1024 \left( \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

Exemplos geométricos da potenciação de um número complexo:

Caso 1) se  $\rho = 1$ , quando o módulo for igual a 1.

Se  $\rho = 1$ , então o número complexo  $z$  está localizado na circunferência unitária no plano complexo. Neste caso, a potência  $z^n$  tem módulo igual a 1, para qualquer valor de  $n$ . Além disso, o argumento de  $z^n$  é  $n\theta$ , ou seja, é um múltiplo inteiro do argumento original  $\theta$ . Portanto, a potência  $z^n$  é um número complexo que está localizado na circunferência unitária e forma um ângulo  $n\theta$  com o eixo real no plano complexo, Figura 31.

Figura 31 – Se  $\rho = 1$ 

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = (z_1)^2$$

$$z_3 = (z_1)^3$$

$$z_4 = (z_1)^4$$

$$z_5 = (z_1)^5$$

$$z_6 = (z_1)^6$$

$$z_7 = (z_1)^7$$

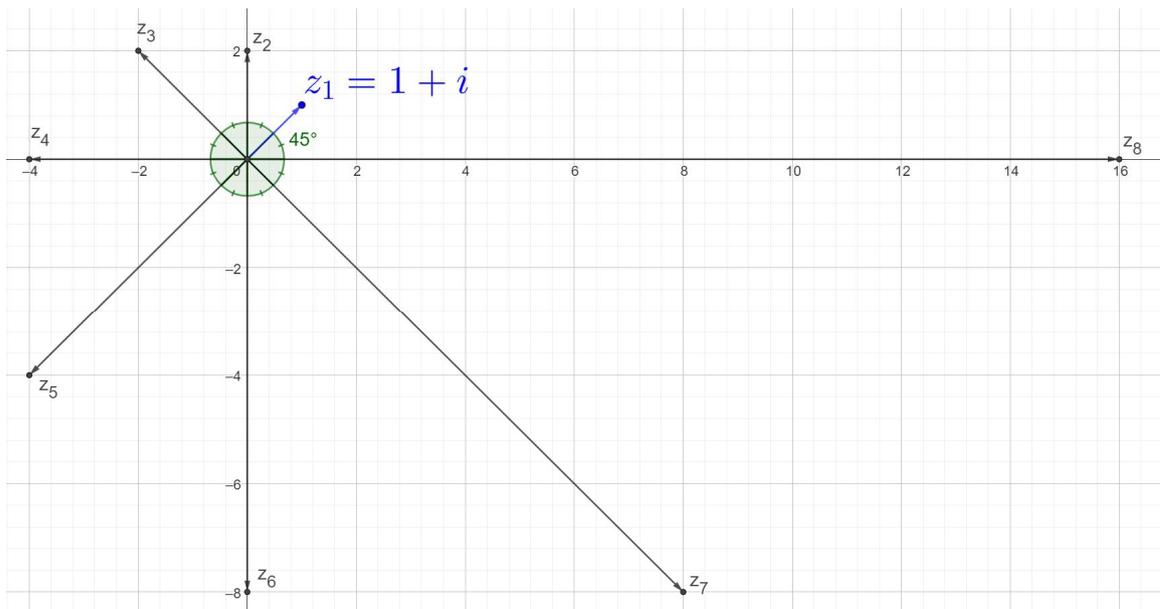
$$z_8 = (z_1)^8$$

$$\arg(z_1)^n = n\theta$$

Fonte: O Autor, 2023.

Caso 2) se  $\rho > 1$ , quando o módulo for maior que 1.

Se  $\rho > 1$ , então o número complexo  $z$  está localizado fora da circunferência unitária no plano complexo. Neste caso, a potência  $z^n$  tem módulo igual a  $\rho^n$ , que aumenta exponencialmente com  $n$ . Além disso, o argumento de  $z^n$  é  $n\theta$ , ou seja, é um múltiplo inteiro do argumento original  $\theta$ . Portanto, a potência  $z^n$  é um número complexo que está localizado a uma distância cada vez maior do ponto  $(0,0)$  no plano complexo, e que forma um ângulo  $n\theta$  com o eixo real. Assim chamado extrator, Figura 32.

Figura 32 – Se  $\rho > 1$ 

$$z_1 = 1 + i, z_2 = (z_1)^2, z_3 = (z_1)^3, z_4 = (z_1)^4, z_5 = (z_1)^5, z_6 = (z_1)^6, z_7 = (z_1)^7, z_8 = (z_1)^8 \arg(z_1)^n = n\theta$$

Fonte: O Autor, 2023.

Caso 3) se  $0 < \rho < 1$ , quando o módulo for maior que zero e menor que 1.

Se  $0 < \rho < 1$ , então o número complexo  $z$  está localizado dentro da circunferência unitária no plano complexo. Neste caso, a potência  $z^n$  tem módulo igual a  $\rho^n$ , que diminui exponencialmente com  $n$ . Além disso, o argumento de  $z^n$  é  $n\theta$ , ou seja, é um múltiplo inteiro do argumento original  $\theta$ . Portanto, a potência  $z^n$  é um número complexo que está localizado cada vez mais próximo do ponto  $(0,0)$  no plano complexo, e que forma um ângulo  $n\theta$  com o eixo real. Assim chamado atrator, Figura 33.

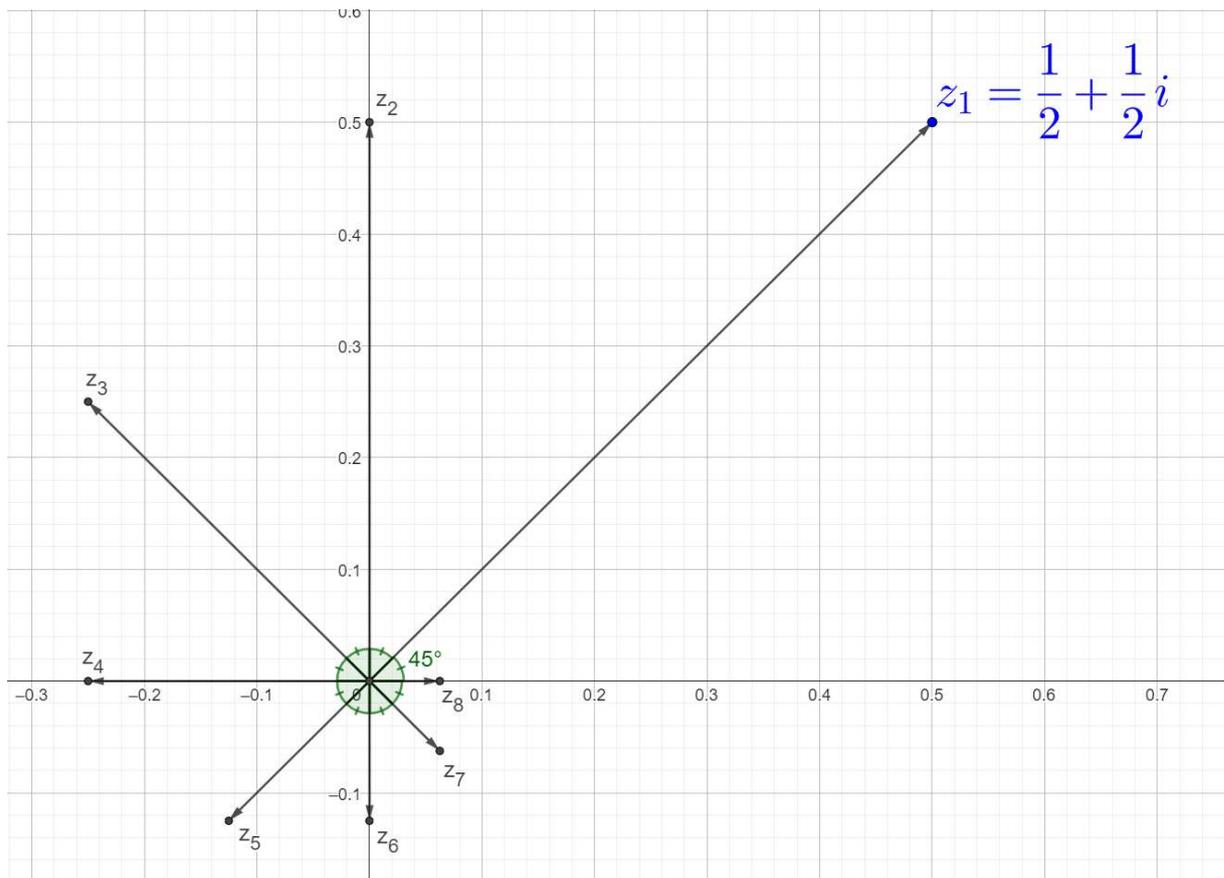


Figura 33 – Se  $0 < \rho < 1$

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = (z_1)^2, z_3 = (z_1)^3, z_4 = (z_1)^4, z_5 = (z_1)^5, z_6 = (z_1)^6, z_7 = (z_1)^7, z_8 = (z_1)^8$$

$$\arg(z_1)^n = n\theta$$

Fonte: O Autor, 2023.

## 6 SEGUNDA FÓRMULA DE DE MOIVRE – RADICIAÇÃO

A segunda fórmula de De Moivre é derivada da primeira e trata da radiciação, permitindo calcular a  $n$ ésima raiz de um complexo. Dado um número complexo  $z$  e um número natural  $n$ , existem exatamente  $n$  números complexos diferentes que são a  $n$ ésima raiz de  $z$ . Para calcular essas raízes, é comum expressar o número complexo  $z$  em sua forma polar:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ onde } \rho \text{ é o módulo e } \theta \text{ é o argumento.}$$

As raízes de índice  $n$  são dadas pela segunda fórmula de De Moivre.

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Após  $k = n - 1$ , os valores começam a se repetir. Portanto, de  $0$  a  $n - 1$  é possível obter  $n$  raízes distintas.

### 6.1 DEMONSTRAÇÃO

Determinar todos os complexos  $z_k$  tais que  $\sqrt[n]{z} = z_k$ .

Se  $z_k = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , nossas incógnitas são  $r$  e  $\theta$ . Aplicamos a definição de  $\sqrt[n]{z}$ :

$$\sqrt[n]{z} = z_k \leftrightarrow z_k^n = z$$

Então:

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Exemplo: determinar as raízes quadradas de  $2i$ .

1º) Escrever o número complexo  $z = 0 + 2i$  na forma trigonométrica:

Módulo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Argumento:

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \theta = \arcsin(1) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow \theta = \arccos(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

Desse modo, a forma trigonométrica de  $z = 2i$  é:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

2º) Calcular as raízes quadradas utilizando a fórmula de De Moivre.

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) \right]$$

$$z_k = \sqrt[2]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{2}\right) \right]$$

**Primeira raiz  $z_0$ . Para  $k = 0$**

$$z_0 = \sqrt[2]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + 0 \frac{2\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0 \frac{2\pi}{2}\right) \right] =$$

$$z_0 = \sqrt[2]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] =$$

$$z_0 = \sqrt[2]{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] =$$

$$z_0 = 1 + i$$

**Segunda raiz  $z_1$ . Para  $k = 1$**

$$z_1 = \sqrt[2]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + 1 \frac{2\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1 \frac{2\pi}{2}\right) \right] =$$

$$z_1 = \sqrt[2]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \right] =$$

$$z_1 = \sqrt[2]{2} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] =$$

$$z_1 = \sqrt[2]{2} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] =$$

$$z_1 = -1 - i$$

## 7 RAÍZES ENÉSIMAS E SEUS AFIXOS

Os afixos das raízes enésimas de um número complexo formam os vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio  $\sqrt[n]{|z|}$  e centro na origem. Isso acontece porque, na forma polar, todos os afixos têm mesmo módulo  $\sqrt[n]{|z|}$  e seus argumentos diferem

por um múltiplo inteiro do mesmo ângulo  $\frac{2\pi}{n}$ . Portanto, esses afixos estão igualmente espaçados ao longo da circunferência e formam um polígono regular, Figuras 34, 35 e 36.

Exemplo:

Determinar as raízes sextas do número  $z = 32\sqrt{3} + 32i$ .

Primeiro devemos reescrever o número complexo na forma polar:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \therefore \quad |z| = \sqrt{(32\sqrt{3})^2 + (32)^2} \quad \therefore \quad |z| = 64$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{32\sqrt{3}}{64} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 64(\cos(30^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ))$$

Os módulos das 6 raízes são dados pelo raio da circunferência  $r = \sqrt[n]{|z|} \therefore r = \sqrt[6]{64} \therefore r = 2$

Enquanto os argumentos são dados por  $\theta = \frac{\theta_0}{n} + k \frac{2\pi}{n}$

Argumentos

Raízes sextas

Para  $k = 0$ ,  $\theta = \frac{30^\circ}{6} + 0 \frac{360^\circ}{6} \therefore \theta = 5^\circ \quad \therefore \quad r_0 = 2(\cos(5^\circ) + i \sin(5^\circ))$

Para  $k = 1$ ,  $\theta = \frac{30^\circ}{6} + 1 \frac{360^\circ}{6} \therefore \theta = 65^\circ \quad \therefore \quad r_1 = 2(\cos(65^\circ) + i \sin(65^\circ))$

Para  $k = 2$ ,  $\theta = \frac{30^\circ}{6} + 2 \frac{360^\circ}{6} \therefore \theta = 125^\circ \quad \therefore \quad r_2 = 2(\cos(125^\circ) + i \sin(125^\circ))$

Para  $k = 3$ ,  $\theta = \frac{30^\circ}{6} + 3 \frac{360^\circ}{6} \therefore \theta = 185^\circ \quad \therefore \quad r_3 = 2(\cos(185^\circ) + i \sin(185^\circ))$

Para  $k = 4$ ,  $\theta = \frac{30^\circ}{6} + 4 \frac{360^\circ}{6} \therefore \theta = 245^\circ \quad \therefore \quad r_4 = 2(\cos(245^\circ) + i \sin(245^\circ))$

Para  $k = 5$ ,  $\theta = \frac{30^\circ}{6} + 5 \frac{360^\circ}{6} \therefore \theta = 305^\circ \quad \therefore \quad r_5 = 2(\cos(305^\circ) + i \sin(305^\circ))$

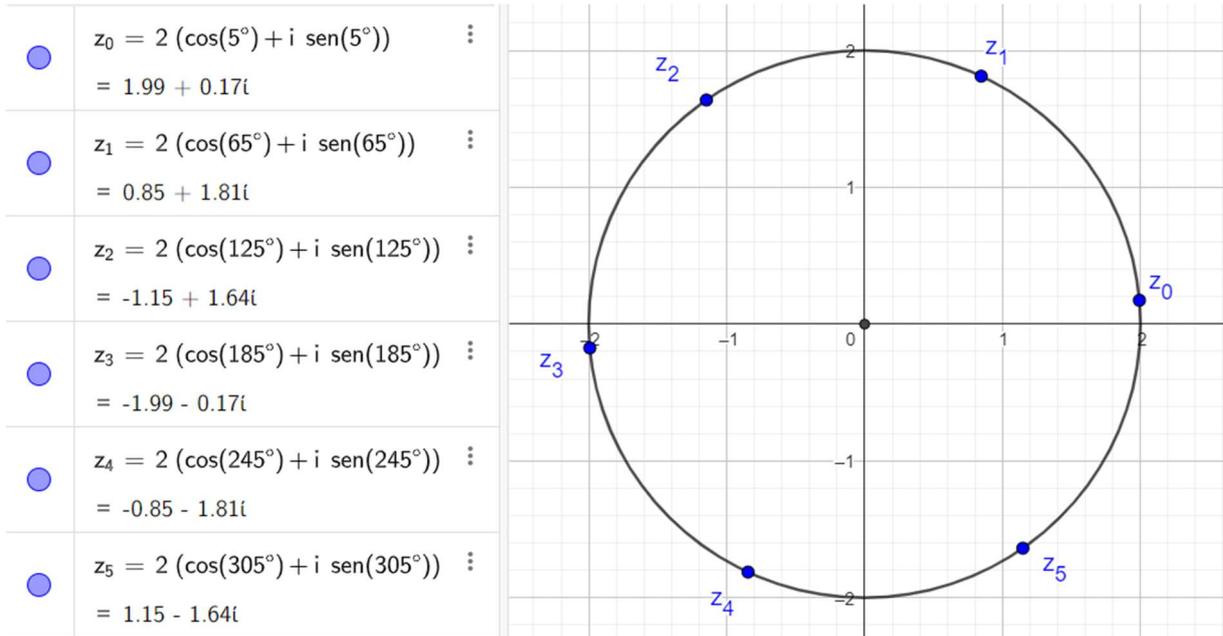


Figura 34 – As raízes de um número complexo têm o mesmo módulo.

As raízes sextas do número complexo  $z = 32\sqrt{3} + 32i$  têm o mesmo módulo, calculado por  $r = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[6]{64} = 2$ . Portanto, estão sobre a circunferência de raio 2 e centro na origem.

Fonte: O Autor, 2023.

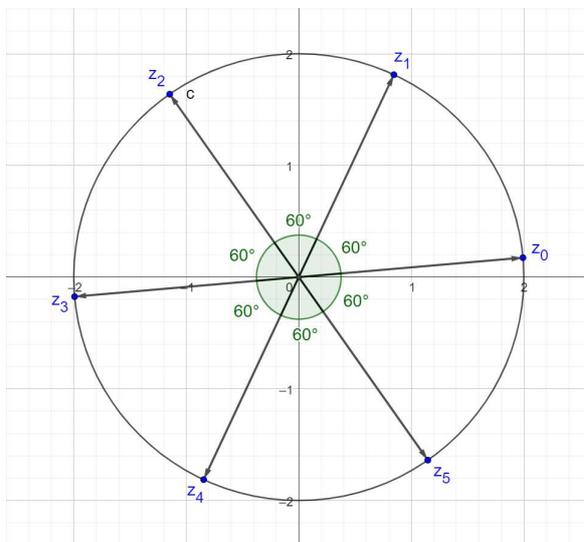


Figura 35 – Os argumentos das raízes, de um número complexo, são regulares.

Os argumentos das raízes sextas de  $z = 32\sqrt{3} + 32i$ , estão dispostos, sobre a circunferência, de forma regular em intervalos de múltiplos inteiros de  $60^\circ$

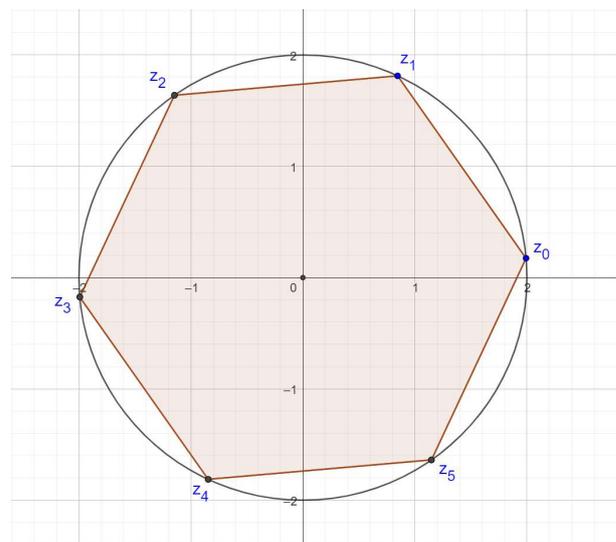


Figura 36 – As raízes, de um número complexo, descrevem um polígono regular.

As raízes sextas de  $z = 32\sqrt{3} + 32i$ , formam os vértices de um polígono regular de 6 lados inscrito na circunferência de raio 2

Fonte: O Autor, 2023.

## 8 TEOREMA DAS RAÍZES N-ÉSIMAS DE UM COMPLEXO

O Teorema das Raízes n-ésimas de um Número Complexo é um princípio fundamental na teoria dos números complexos. O teorema afirma que a soma das raízes n-ésimas de qualquer número complexo é sempre zero, desde que ( $n$ ) seja maior que 1. Em termos matemáticos, se ( $z$ ) é um número complexo e ( $w_1, w_2, \dots, w_n$ ) são suas raízes n-ésimas, então:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 0$$

Este teorema é uma consequência direta da fórmula de De Moivre, que fornece uma maneira de calcular as raízes n-ésimas de um número complexo.

A explicação geométrica para este teorema reside na representação dos números complexos no plano Argand-Gauss; as raízes n-ésimas de um número complexo são representadas como pontos em um círculo centrado na origem e são igualmente espaçados ao redor do círculo. Quando somamos todas essas raízes, os componentes real e imaginário de cada raiz se cancelam, resultando em uma soma total de zero.

O Teorema das Raízes n-ésimas de um Número Complexo é uma ferramenta poderosa na análise de números complexos e suas raízes. Ele fornece uma maneira simples de entender a estrutura das raízes n-ésimas de qualquer número complexo e tem aplicações em várias áreas da matemática, incluindo álgebra, análise complexa e teoria dos números. Para ilustrar este teorema, consideraremos dois casos.

### 8.1 CASO 1, QUANDO $n$ É ÍMPAR.

Determinar as raízes cúbicas de  $z = \sqrt{3} + i$ , Figura 25.

Primeiro devemos expressar o número complexo na forma polar:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \therefore |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \therefore |z| = 2$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = 2(\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ))$$

Os módulos das 3 raízes de  $z$  são dados pelo raio da circunferência:

$$r = \sqrt[n]{|z|} \quad \therefore \quad r = \sqrt[3]{2}$$

Enquanto os argumentos são dados por:

$$\theta = \frac{\theta_0}{n} + k \frac{2\pi}{n}$$

Argumentos:

Raízes terceiras:

$$\text{Para } k = 0, \quad \theta = \frac{30^\circ}{3} + 0 \frac{360^\circ}{3} \rightarrow \theta = 10^\circ \quad \therefore \quad z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ)) = 1,241 + 0,219i$$

$$\text{Para } k = 1, \quad \theta = \frac{30^\circ}{3} + 1 \frac{360^\circ}{3} \rightarrow \theta = 130^\circ \quad \therefore \quad z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos(130^\circ) + i \sin(130^\circ)) = -0,81 + 0,965i$$

$$\text{Para } k = 2, \quad \theta = \frac{30^\circ}{3} + 2 \frac{360^\circ}{3} \rightarrow \theta = 250^\circ \quad \therefore \quad z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos(250^\circ) + i \sin(250^\circ)) = -0,431 - 1,184i$$

$$\text{Finalmente, } z_1 + z_2 + z_3 = (1,241 + 0,219i) + (-0,81 + 0,965i) + (-0,431 - 1,184i) = 0$$

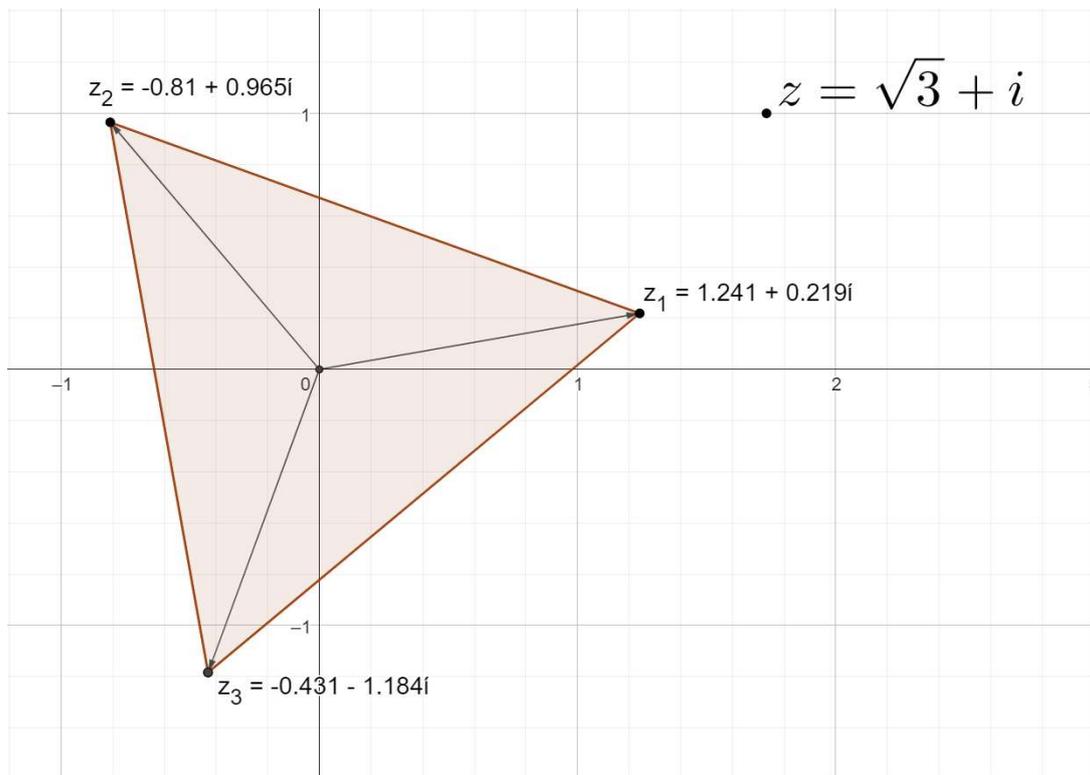


Figura 37 – Caso 1: a soma das raízes, de um complexo, é igual a zero.

$$z = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Fonte: O Autor, 2023.

## 8.2 CASO 2, QUANDO $n$ É PAR.

Determinar as raízes quartas de  $z = \sqrt{3} + i$ , Figura 26. Conforme calculamos, sua forma polar é  $z = 2(\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ))$ .

Os módulos das 4 raízes de  $z_0$  são dados pelo raio da circunferência:

$$r = \sqrt[n]{|z|} \quad \therefore \quad r = \sqrt[4]{2}$$

Enquanto os argumentos são dados por  $\theta = \frac{\theta_0}{n} + k \frac{2\pi}{n}$

Argumentos:

Raízes quartas:

$$\text{Para } k = 0, \quad \theta = \frac{30^\circ}{4} + 0 \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \theta = 07,5^\circ \quad \therefore \quad z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos(7,5^\circ) + i \sin(7,5^\circ)) = 1,18 + 0,16i$$

$$\text{Para } k = 1, \quad \theta = \frac{30^\circ}{4} + 1 \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \theta = 130^\circ \quad \therefore \quad z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos(97,5^\circ) + i \sin(97,5^\circ)) = -0,16 + 1,18i$$

$$\text{Para } k = 2, \quad \theta = \frac{30^\circ}{4} + 2 \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \theta = 250^\circ \quad \therefore \quad z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos(187,5^\circ) + i \sin(187,5^\circ)) = -1,18 - 0,16i$$

$$\text{Para } k = 3, \quad \theta = \frac{30^\circ}{4} + 3 \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \theta = 277,5^\circ \quad \therefore \quad z_4 = \sqrt[4]{2}(\cos(277,5^\circ) + i \sin(277,5^\circ)) = 0,16 - 1,18i$$

Finalmente,  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = (1,18 + 0,16i) + (-0,16 + 1,18i) + (-1,18 - 0,16i) + (0,16 - 1,18i) = 0$

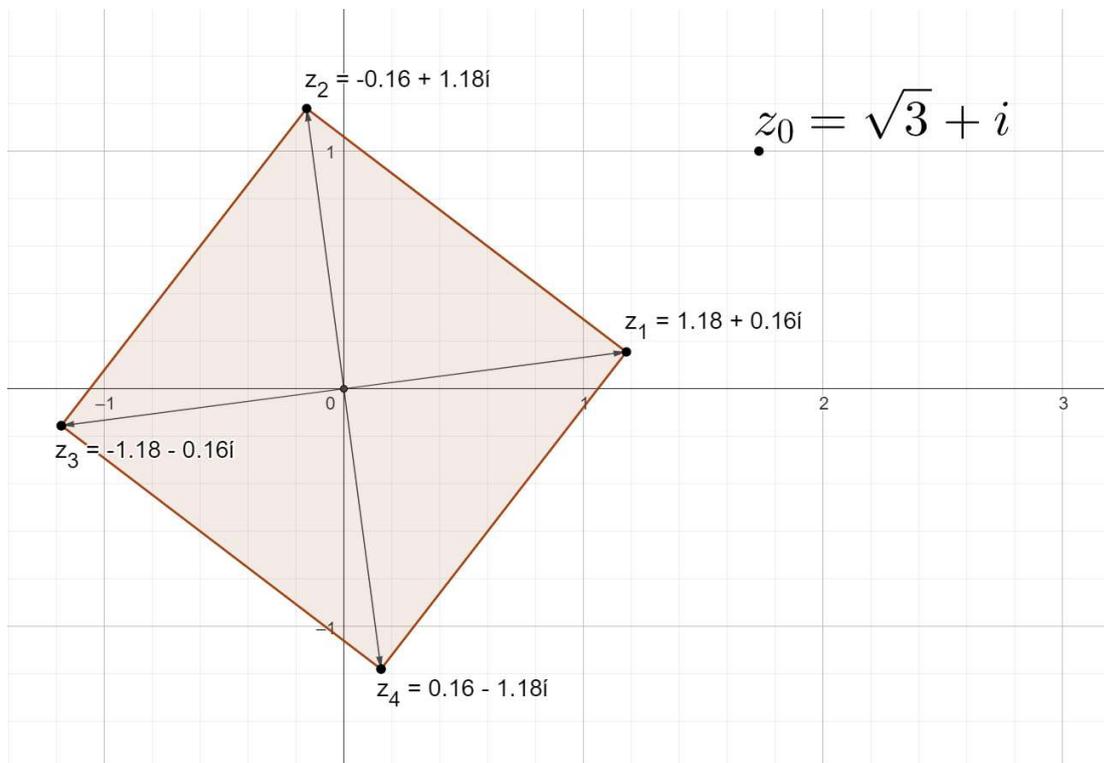


Figura 38 – Caso 2: a soma das raízes de um complexo é igual a zero.

$$z = \sqrt{3} + i, z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

Fonte: O Autor, 2023.

### 8.3 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DA SOMA DAS RAÍZES

Avançaremos com a apresentação de três demonstrações distintas para o Teorema das Raízes  $n$ -ésimas de um Número Complexo. As duas primeiras abordagens são amplamente reconhecidas e estabelecidas no âmbito da literatura matemática. Em contraste, a terceira abordagem foi divulgada pela primeira vez na Revista do Professor de Matemática Online (VAZ; VASCONCELOS, FILHO, 2016) e se destaca pela aplicação intensiva do software GeoGebra. Esta abordagem estabelece uma conexão íntima e significativa com a metodologia que fundamenta o presente trabalho, demonstrando a aplicação prática de ferramentas computacionais no estudo dos números complexos.

**Teorema: A soma das  $n$  raízes da equação:  $z^n - A = 0$ , onde  $A \in \mathbb{C}$  é igual a zero.**

#### 8.3.1 Demonstração I

Apesar de sua brevidade, esta demonstração incorpora a fórmula de Euler ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ), que pode representar um desafio significativo para a sua completa compreensão. A fórmula de Euler, que estabelece uma profunda relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial complexa, é um conceito avançado que exige uma compreensão sólida de várias áreas da matemática. Sua compreensão requer uma argumentação cuidadosa e bem articulada, que muitas vezes só é abordada em detalhes em cursos avançados de cálculo.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \text{ Como } z_k = \sqrt[n]{|A|} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), (0 \leq k \leq n - 1),$$

são as  $n$  raízes da equação, então a soma de todas elas é

$$S = \sqrt[n]{|A|} \left( \cos \left( \frac{\theta}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} \right) + \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left( \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right) \right) = \sqrt[n]{|A|} \left( e^{\frac{i\theta}{n}} + e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)} + \dots + e^{i\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}} \right) = \sqrt[n]{|A|} \left( \frac{e^{\frac{i\theta}{n}} \left( \left( e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^n - 1 \right)}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} \right) =$$

$$\sqrt[n]{|A|} \left( \frac{e^{\frac{i\theta}{n}} (e^{2\pi i} - 1)}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} \right) = \sqrt[n]{|A|} \left( \frac{e^{\frac{i\theta}{n}} (\cos(\pi) + i \sin(\pi) - 1)}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} \right) = 0$$

### 8.3.2 Demonstração II

Esta demonstração emprega uma propriedade que surge ao dividir os elementos consecutivos na soma das raízes. Esta abordagem se destaca por sua simplicidade e acessibilidade, pois a propriedade em questão é obtida por meio de operações fundamentais com números complexos. Assim, esta demonstração é mais facilmente compreendida, pois se baseia em conceitos elementares, tornando-a uma ferramenta eficaz para introduzir os princípios básicos da teoria dos números complexos.

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt[n]{|A|} \left( \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) + \cos\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right) + \right. \\
 & \left. i \sin\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right) \right). \text{ Isto é, se denotamos as raízes por } z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \text{ então: } \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} = \dots = \\
 & \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} = k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \text{ Assim, } S = \sqrt[n]{|A|} (z_1 + kz_1 + k^2z_1 + \dots + k^{n-1}z_1) = \\
 & \sqrt[n]{|A|} z_1 (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) = \sqrt[n]{|A|} z_1 \left( \frac{k^n - 1}{k - 1} \right) = \sqrt[n]{|A|} z_1 \left( \frac{\left( \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^n - 1}{k - 1} \right) = \\
 & \sqrt[n]{|A|} z_1 \left( \frac{\cos(2\pi) + i \sin(2\pi) - 1}{k - 1} \right) = 0
 \end{aligned}$$

### 8.3.3 Demonstração III – Um caso especial

A terceira demonstração é um produto da Investigação Matemática assistida pelo software GeoGebra. Foi concebida a partir do estudo de uma propriedade específica dos polígonos. Esta demonstração foi publicada na Revista do Professor de Matemática Online, um periódico científico da Sociedade Brasileira de Matemática. A propriedade em questão afirma: *Para qualquer polígono dado, se traçarmos vetores de cada vértice até o ponto médio dos lados não adjacentes e somarmos todos esses vetores, a resultante será nula* (VAZ; VASCONCELOS, FILHO, 2016). Nesta demonstração, os autores validam a universalidade desta propriedade para todos os polígonos, utilizando a Investigação Matemática com o GeoGebra. Após a validação, eles perceberam que essa propriedade poderia ser aplicada para provar o teorema da soma das raízes dos números complexos.

O aspecto crucial a ser destacado aqui é que a demonstração do resultado mencionado foi alcançada graças à interatividade que o software GeoGebra oferece ao usuário. Esta interatividade facilita a identificação de características únicas que são essenciais para a

elaboração de estratégias de generalização da propriedade. Assim, o GeoGebra se torna uma ferramenta poderosa para a descoberta e a demonstração de novos resultados matemáticos.

As  $n$  raízes do complexo  $A$  podem ser representadas como:

$$z_k = \sqrt[n]{|A|} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), (0 \leq k \leq n - 1)$$

Geometricamente estas constituem os vértices de um polígono regular, de  $n$  lados, inscrito na circunferência de raio  $\sqrt[n]{|A|}$ , sendo  $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  a medida dos seus ângulos centrais. Dividiremos a demonstração em dois casos:

### Quando $n$ é par.

Para cada raiz  $z_k = \sqrt[n]{|A|} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right)$ ,  $(1 \leq k \leq \frac{n}{2})$ , existe outra  $z_{k + \frac{n}{2}}$ , diametralmente oposta, de tal forma que:

$$\begin{aligned} z_k + \frac{n}{2} &= \sqrt[n]{|A|} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2 \left( k + \frac{n}{2} \right) \pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2 \left( k + \frac{n}{2} \right) \pi}{n} \right) \right) = \\ &= \sqrt[n]{|A|} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} + \pi \right) \right) = \\ &= \sqrt[n]{|A|} \left( -\cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

**Portanto,  $\sum_{k=1}^n z_k = 0$**

**Quando  $n$  é ímpar.**

Denotemos por  $M_k$  o ponto médio do segmento  $\overline{A_k A_{k+1}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , de tal forma que  $M_n$  é ponto médio de  $\overline{A_2 A_1}$ , tal como ilustra a Figura 39.

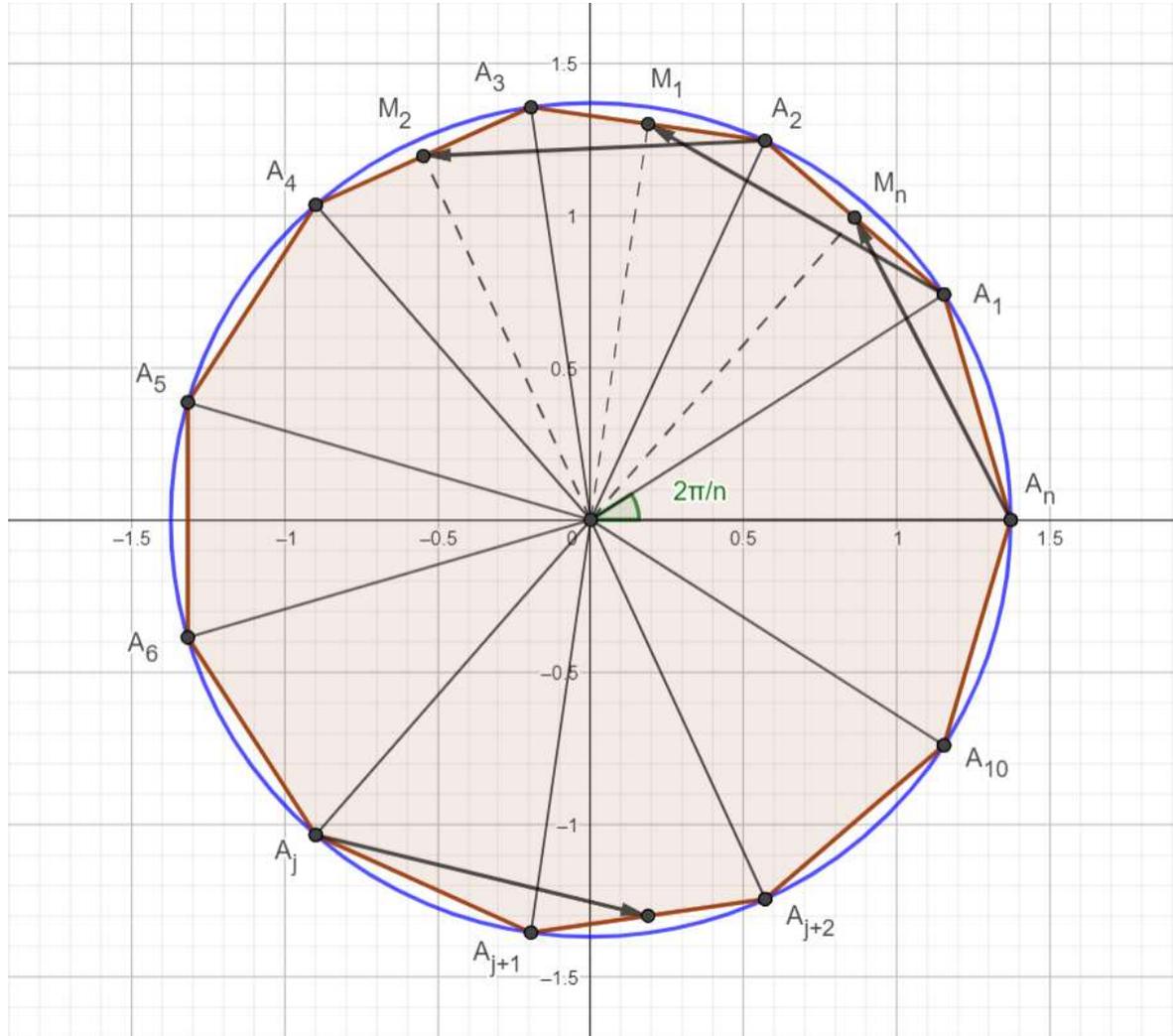


Figura 39 – Quando  $n$  é ímpar.

Em relação a  $M_n$  o ponto médio de  $\overline{A_1 A_2}$ , observamos que as medidas dos ângulos  $M_n O A_2$  é  $\frac{\pi}{n}$ . Por outro lado, se  $A_j$  é o vértice que se obtém percorrendo  $\frac{n-1}{2}$  vértices no sentido anti-horário a partir do vértice  $A_2$ , tem-se que a medida do ângulo  $A_2 O A_j$  é  $\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  e, portanto, temos que:  $\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} = \pi$ .

Assim, o vértice  $A_j$  é diametralmente oposto a  $M_n$ . Logo,  $\overline{M_n A_j}$  é paralelo a  $\overline{O A_j}$ , consequentemente, existe uma constante  $0 < \alpha < 1$  tal que  $\overline{M_n O} = \alpha \overline{O A_j}$ . Observe-se que  $j = 2 + \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+3}{2}$ . Para o ponto médio  $M_1$ , uma vez que a medida do ângulo  $M_1 O M_n$  é  $\frac{2\pi}{n}$  temos

que o vértice  $A_{j+1}$  é diametralmente oposto a  $M_1$ , logo  $\overrightarrow{M_1A_{j+1}}$  é paralelo a  $\overrightarrow{OA_{j+1}}$ , devido à simetria do problema, tem-se que  $|\overrightarrow{M_1A_{j+1}}| = |\overrightarrow{M_nA_j}|$  e assim  $\overrightarrow{M_1O} = \alpha \overrightarrow{OA_{j+1}}$ .

Em geral, para cada ponto médio  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) existe um único vértice  $A_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), diametralmente oposto a este e vice-versa, de tal sorte que  $\forall j, k = 1, 2, \dots, n$ , tem-se:

**I.**  $j = k + 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)$ , de tal forma que para os índices  $j = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ , os vértices correspondentes são  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , respectivamente.

**II.** Para os índices  $j$  dados em I, temos que  $\overrightarrow{M_kA_j}$  é paralelo a  $\overrightarrow{OA_j}$ , conseqüentemente, existe uma constante positiva  $\alpha < 1$  tal que  $\overrightarrow{M_kO} = \alpha \overrightarrow{OA_j}$ .

Por outro lado, no triângulo de vértices  $A_n, M_n$  e  $O$  tem-se:  $\overrightarrow{A_nM_n} + \overrightarrow{M_nO} + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ , uma vez que  $\overrightarrow{M_nO} = \alpha \overrightarrow{OA_j} \therefore j = \frac{n+3}{3} \cdot \overrightarrow{A_nM_n} + \alpha \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ . Analogamente, para  $A_1, M_1$  e  $O$ :  $\overrightarrow{A_1M_1} + \alpha \overrightarrow{OA_{j+1}} + \overrightarrow{OA_1} = \vec{0}$ . Procedendo dessa forma para  $n$  pontos médios  $M_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), obtemos as  $n$  equações vetoriais:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_nM_n} + \alpha \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_n} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1M_1} + \alpha \overrightarrow{OA_{j+1}} + \overrightarrow{OA_1} &= \vec{0} \\ &\vdots \\ \overrightarrow{A_{n-2}M_{n-2}} + \alpha \overrightarrow{OA_{j-2}} + \overrightarrow{OA_{n-2}} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{A_{n-1}M_{n-1}} + \alpha \overrightarrow{OA_{j-1}} + \overrightarrow{OA_{n-1}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Equivalentemente:  $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A_kM_k} + \alpha \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$ , ou seja:  $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A_kM_k} + (\alpha + 1) \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$ .

De acordo com Vaz *et al* (2016):  $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A_kM_k} = \vec{0}$ , logo:  $(\alpha + 1) \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$ , uma vez que  $0 < \alpha < 1$ , então:  $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$ .

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é, em sua essência, uma linguagem universal que permeia diversas áreas do conhecimento. Os Números Complexos são um dos pilares fundamentais dessa linguagem. No entanto, a compreensão plena de sua natureza e aplicabilidade muitas vezes é ofuscada por abordagens didáticas tradicionais que não exploram adequadamente sua riqueza algébrica e geométrica.

Neste contexto, este trabalho surge pretendendo ser uma resposta crítica a essa lacuna, propondo uma metodologia que integra o *software* GeoGebra em consonância com a perspectiva lógico-histórica da matemática. Esta pesquisa não busca apenas aprimorar a didática dos Números Complexos, mas também visa transformar a maneira como os professores e alunos percebem e interagem com esses conceitos, tornando o aprendizado mais intuitivo, contextualizado e significativo.

A principal contribuição deste trabalho é, portanto, sugerir uma abordagem holística que tem o potencial de melhorar as práticas de ensino e aprendizagem dos números complexos, beneficiando tanto educadores quanto estudantes em sua jornada acadêmica. É relevante destacar que este trabalho não se limitou apenas a uma investigação teórica, mas também resultou na criação de um valioso objeto de aprendizagem, concebido para ser uma ferramenta prática e eficaz no processo de ensino-aprendizagem dos números complexos.

Este objeto de aprendizagem é pautado em uma abordagem que integra os aspectos algébricos e geométricos dos números complexos. Esta dualidade permite que os conceitos sejam explorados de maneira mais completa, proporcionando uma compreensão mais robusta e integrada do tema. Além disso, a utilização do *software* GeoGebra mostrou-se uma ferramenta valiosa na aprendizagem desse tema, permitindo a apresentação das operações e propriedades em dois níveis de compreensão.

Houve profundidade e rigor na pesquisa realizada, o que resultou na produção deste testemunho tangível da relevância e da contribuição do estudo para o campo da Matemática Educacional. Além disso, é essencial destacar que, mais de que realizações acadêmicas, a pesquisa proporcionou *insights* valiosos sobre a integração de abordagens algébricas e geométricas no ensino dos números complexos, bem como sobre a aplicação prática de tecnologias educacionais, como o GeoGebra, no processo de ensino-aprendizagem.

Pretende-se, futuramente, conhecer melhor a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov para a compreensão dos processos de mediação de conhecimentos científicos. A apropriação do processo histórico-cultural associado à evolução dos números complexos revela

a tenacidade e a inovação dos matemáticos ao longo dos séculos. A evolução do conceito, desde as primeiras menções por Tartaglia, Cardano e Bombelli até as contribuições fundamentais de Euler, Wessel, Argand, Gauss, Cauchy e De Moivre, demonstra a importância de se entender a origem e a evolução dos conceitos matemáticos.

Apesar dos avanços significativos alcançados, é importante reconhecer as limitações inerentes a este estudo. A pesquisa foi conduzida em um contexto específico e, embora o GeoGebra seja uma ferramenta relativamente acessível, a implementação prática de nossa abordagem pode variar dependendo dos recursos e da capacitação disponíveis para professores e alunos em diferentes ambientes educacionais.

Entende-se que este trabalho pode abrir perspectivas para estudos futuros. A abordagem proposta, que combina tecnologia e teoria pedagógica, pode ser adaptada e aplicada a outros tópicos matemáticos, ampliando seu escopo e impacto. Além disso, seria interessante investigar a eficácia desta metodologia em diferentes contextos educacionais, bem como explorar a possibilidade de integrar outras ferramentas tecnológicas ou teorias pedagógicas.

## REFERÊNCIAS

ARREGUY, J. **Datafolha: Após ensino remoto, 76% precisam de reforço na alfabetização.** UOL Educação. 2022. Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/noticias/2022/02/14/datafolha-educacao-reforco-alfabetizacao-pandemia-covid-aulas-presenciais.htm>>. Acesso em: 22 fev. 2022.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos Números Complexos.** IME Instituto de Matemática e Estatística Universidade de São Paulo. 2001. PDF. Disponível em <<https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2023.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental:** A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Trad. de José Carlos Libâneo. Educação Soviética, N° 8, agosto, 1988.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

VAZ, D. A. F. **Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando:** articulando investigação Matemática com o GeoGebra. Educativa. Goiânia. Editora da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, v. 15. n. 1. p. 39-51, jan./jun., 2012.

VAZ, D. A. F.; VASCONCELOS, J. E. S.; FILHO, O. O. F. **Investigação Matemática com o GeoGebra em uma Propriedade dos Polígonos.** RPMO (Online), Rio de Janeiro, v 3, n. 1. p. 1-18, 2016.