

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

ESCOLA POLITÉCNICA E DE ARTES

GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



**VERIFICAÇÃO DE FLECHAS**

**EM VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR**

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA O AUTOAPRENDIZADO**

**ÍGOR SOARES SIQUEIRA**

GOIÂNIA

2023

ÍGOR SOARES SIQUEIRA

**VERIFICAÇÃO DE FLECHAS  
EM VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR  
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA O AUTOAPRENDIZADO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola Politécnica, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador:

Prof. Me. Alberto Vilela Chaer

Banca examinadora:

Prof. Me. Luciano Caetano do Carmo

Prof. Me. Murilo Meiron de Pádua Soares

GOIÂNIA

2023

ÍGOR SOARES SIQUEIRA

**VERIFICAÇÃO DE FLECHAS  
EM VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR  
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA O AUTOAPRENDIZADO**

Monografia defendida e aprovada em 18 de dezembro de 2023 pela banca examinadora a seguir:

---

Orientador: Prof. Me. Alberto Vilela Chaer

---

Prof. Me. Luciano Caetano do Carmo

---

Prof. Me. Murilo Meiron de Pádua Soares

GOIÂNIA

2023

*Dedico este trabalho à minha família, especialmente à minha mãe e irmã. Agradeço o apoio constante e amor incondicional ao longo da minha jornada acadêmica.*

## AGRADECIMENTO

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Alberto Vilela Chaer, pela orientação dedicada, paciência e valiosas sugestões que foram essenciais para o desenvolvimento desta monografia.

Agradeço também a Deus, por Sua graça e orientação ao longo desta jornada. Cada desafio foi uma oportunidade de crescimento.

À minha família, em especial aos meus avós, por terem me inspirado. Suas palavras de encorajamento foram a força motriz que impulsionou minha determinação.

A meus(minhas) amigos(as) e colegas que compartilharam seus conhecimentos e experiências, agradeço a colaboração e pelas discussões enriquecedoras que moldaram este trabalho.

Por fim, expresso minha gratidão à instituição, PUC Goiás, e aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica. Cada desafio superado foi uma oportunidade de aprendizado valiosa.

Obrigado a todos que, de alguma forma, fizeram parte desta jornada.

## RESUMO

A fissuração é um fenômeno inevitável em estruturas de concreto armado, sendo causada por diversos fatores, como tensões de tração superiores à resistência do material, erros de execução e deficiências nos materiais. Este trabalho aborda a importância de a estrutura atender a requisitos além dos aspectos econômicos e estéticos, destacando capacidade portante, desempenho em serviço e durabilidade. O foco do presente trabalho está no Estado Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF), que depende do dimensionamento da seção transversal, da determinação da armadura longitudinal devido à flexão pura, bem como o detalhamento final, ou seja, a distribuição das barras de aço na seção. O trabalho aprimorou planilhas desenvolvidas anteriormente, proporcionando uma interface mais intuitiva para facilitar o autoaprendizado. Os objetivos gerais incluem a configuração de um sistema que permita o autoaprendizado por meio de planilhas, determinando a armadura longitudinal devido à flexão pura, detalhando a quantidade de armadura e verificando flechas em vigas de seção retangular, revisão bibliográfica, melhoria das planilhas, automação dos cálculos. Diferentes aspectos do dimensionamento são explorados, incluindo a Armadura Simples, que segue a ABNT NBR 6118:2023, e a Armadura Dupla, necessária quando o momento fletor ultrapassa o limite estabelecido, com relação à curvatura máxima, para se garantir a ductilidade da peça. A análise de flechas (ELS-DEF) considera o comportamento não linear do concreto, devido à fissuração no estágio II. Este trabalho limita as dimensões da base da viga em 30 cm, presença de estribos de dois ramos e possibilidade de um fosso centralizado para a passagem do vibrador, se houver.

**Palavras-Chaves:** Armadura Simples e Armadura Dupla, Detalhamento, Estados Limites de Serviço, Planilha para o autoaprendizado.

## ABSTRACT

Cracking is an inevitable phenomenon in reinforced concrete structures, caused by various factors such as tensile stresses surpassing the material strength, execution errors, and deficiencies in materials. This work addresses the importance of structures meeting requirements beyond economic and aesthetic aspects, emphasizing load-bearing capacity, performance in service, and durability. The focus of this work is on the Excessive Deformation Limit State (ELS-DEF), which depends on the sizing of the cross-section, determination of longitudinal reinforcement due to pure bending, and the final detailing, i.e., the distribution of steel bars in the section. The work improved previously developed spreadsheets, providing a more intuitive interface to facilitate self-learning. General objectives include configuring a system for self-learning through spreadsheets, determining longitudinal reinforcement due to pure bending, detailing the quantity of reinforcement, and checking deflections in rectangular section beams. The study involves a literature review, spreadsheet enhancement, and automation of calculations. Various aspects of sizing are explored, including Simple Reinforcement, following ABNT NBR 6118:2023, and Double Reinforcement, necessary when the flexural moment exceeds the established limit concerning maximum curvature to ensure the ductility of the element. Deflection analysis (ELS-DEF) considers the non-linear behavior of concrete due to cracking in Stage II. This work restricts the dimensions of the beam base to 30 cm, presence of two-legged stirrups, and the possibility of a centralized trench for vibrator passage, if needed.

**Keywords:** Simple Reinforcement, Double Reinforcement, Detailing, Serviceability Limit States, Spreadsheet for self-learning.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	10
2.	OBJETIVOS.....	11
2.1	Objetivos gerais .....	11
2.2	Objetivos específicos .....	11
3.	JUSTIFICATIVA .....	12
4.	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	13
4.1	Revisão bibliográfica.....	13
4.1.1	<i>Flexão Pura</i> .....	13
4.1.2	<i>Hipóteses básicas</i> .....	13
4.1.3	<i>Domínios de Deformação</i> .....	14
4.1.4	<i>Armadura Simples</i> .....	18
4.1.5	<i>Fundamentos para o cálculo da Armadura de Tração</i> .....	18
4.1.6	<i>Determinação da posição da linha neutra (x)</i> .....	22
4.1.7	<i>Momento Mínimo e Armadura Mínima</i> .....	24
4.1.8	<i>Momento na Fronteira 2a-2b (Md, ab)</i> .....	26
4.1.9	<i>Momento Limite para Armadura Simples Md, lim</i> .....	27
4.1.10	<i>Armadura Dupla</i> .....	28
4.1.10.1	<b><u>Determinação da armadura de tração</u></b> .....	29
4.1.10.2	<b><u>Determinação da armadura de compressão</u></b> .....	29
4.1.10.3	<b><u>Armadura total</u></b> .....	30
4.1.10.4	<b><u>Determinação de <math>\epsilon_{sc}</math></u></b> .....	30
4.1.11	<i>Distribuição de barras longitudinais</i> .....	31
4.1.11.1	<b><u>Quantidade de barras necessárias</u></b> .....	32
4.1.11.2	<b><u>Espaçamentos mínimos</u></b> .....	33
4.1.11.3	<b><u>Número máximo de barras na primeira camada</u></b> .....	34
4.1.11.4	<b><u>Número máximo de barras na segunda camada</u></b> .....	35
4.1.11.5	<b><u>Centro de gravidade</u></b> .....	36
4.1.11.6	<b><u>Verificação</u></b> .....	36
4.1.12	<i>Estados Limites de Serviço</i> .....	37

4.1.12.1	<b><u>Estados Limites Último (ELU)</u></b> .....	38
4.1.12.2	<b><u>Estado Limite de Serviço (ELS)</u></b> .....	38
4.1.12.3	<b><u>Estádios I, II e III</u></b> .....	38
4.1.12.4	<b><u>Verificação de flechas (ELS-DEF)</u></b> .....	41
4.1.12.5	<b><u>Flecha imediata em vigas de concreto armado</u></b> .....	42
4.1.12.6	<b><u>Cálculo da flecha diferida no tempo para vigas de concreto armado</u></b> ..	42
5.	<b>METODOLOGIA</b> .....	44
5.1	<b>Aprimoramento das planilhas existentes</b> .....	44
5.2	<b>Resultados</b> .....	44
6.	<b>CONCLUSÃO</b> .....	45
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	46

## 1. INTRODUÇÃO

Segundo FREIRE e SANTOS (2016), a fissuração ocorre de forma inevitável em estruturas de concreto armado. Várias podem ser as causas da fissuração, como o aparecimento de tensões de tração superiores à tensão de fissuração do material, erros de execução, deficiência dos materiais a serem utilizados, bem como no mau uso da estrutura.

De acordo com Araújo (2010), uma estrutura de concreto armado deve se adequar a outros requisitos que vão além dos aspectos econômicos e estéticos, sendo eles:

- 1) Capacidade portante: a estrutura deve suportar as ações para as qual foi executada, levando em conta sua vida útil e a fase construtiva, não ocorrendo ruptura total ou parcial, nem a perda de equilíbrio estático;
- 2) Desempenho em serviço: as deformações devem ser adequadas e não devem gerar danos aos elementos estruturais, nem apresentar uma aparência, que pode causar desconforto aos usuários. O grau de fissuração não deve afetar o uso, aparência, nem prejudicar a função da peça;
- 3) Durabilidade: o elemento estrutural deve se manter conservado, levando em conta as condições ambientais previstas em projeto, sem a necessidade de reparos de alto custo no decorrer de sua vida útil.

Portanto, é necessário dar a importância devida ao desempenho da estrutura com relação aos Estados Limites Últimos (ELU) e aos Estados Limites de Serviço, sendo o ELS-DEF (Estado Limite de Deformações Excessivas) o foco deste trabalho.

Em sala de aula e em orientações de TCC's anteriores, o orientador deste trabalho desenvolveu e estimulou os alunos a implementarem os cálculos através de planilhas. Este trabalho recupera planilhas desenvolvidas anteriormente, com o objetivo de aprimorar a sequência dos cálculos e preparar um sistema de apoio para que a teoria e os cálculos apresentados possam ter uma maneira mais intuitiva, facilitando ao usuário para o autoaprendizado.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1 Objetivos gerais

O objetivo geral é aprimorar e configurar um sistema que permita o autoaprendizado por meio de uma planilha de cálculo, com diversas abas, para se determinar a armadura longitudinal devido à flexão pura, detalhar a quantidade de armadura para diversos diâmetros do aço escolhido e executar a verificação de flechas em vigas de seção retangular com arranjo de Armadura Simples ou Armadura Dupla.

### 2.2 Objetivos específicos

- Fazer uma revisão bibliográfica dos fundamentos básicos do ELS-DEF;
- A partir de trabalhos anteriores, promover uma melhoria nas planilhas desenvolvidas para o cálculo de armadura (simples ou dupla), distribuição barras longitudinais na seção transversal e verificação de flechas em vigas de seção retangular submetidas à flexão pura.

### **3. JUSTIFICATIVA**

Este trabalho, ao sistematizar operações e cálculos por meio de planilhas eletrônicas, busca organizar uma interface com o usuário, o que facilitará o aprendizado das etapas envolvidas no entendimento da teoria e respectivos cálculos envolvidos. Contribuir para o processo ensino-aprendizagem é importante para o aprofundamento no assunto, com a satisfação de deixar um legado para quem for se beneficiar do produto deste trabalho.

## 4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

### 4.1 Revisão bibliográfica

#### 4.1.1 *Flexão Pura*

Segundo Silva (2022), de acordo com os Ensaios de Stuttgart (1902), uma seção transversal sujeita a flexão pura apresentará trajetórias de tensões de compressão paralelas às trajetórias de tensão de tração. Considerando uma solicitação por momento fletor positivo, uma linha neutra surgirá no interior da seção transversal. Acima dessa linha, a seção estará sujeita a tensões normais de compressão, enquanto abaixo dela, estará sujeita a tensões de tração. Para o momento fletor negativo, invertem-se de posição as regiões comprimidas e tracionadas.

O cálculo da armadura respeita as condições dos Estados Limites Últimos (ELU), e considera-se que a região tracionada está completamente fissurada, na qual o concreto não contribui para a resultante em tração. Essa responsabilidade recai exclusivamente sobre a armadura longitudinal de tração, que deve ser adequadamente posicionada.

Considerando que a energia de deformação do esforço cortante é nula em flexão pura, assume-se que a seção, originalmente plana, permanece plana após as deformações, ou seja, após o desenvolvimento da curvatura do eixo da peça. Nesse contexto, a curvatura pode ser igualada ao ângulo de giro da seção transversal, formando dois triângulos semelhantes em relação à linha neutra. A fibra mais comprimida do concreto e a fibra correspondente ao esperado centro de gravidade da distribuição das barras de aço são tomadas como referência para determinar o valor da armadura de tração.

Todos os cálculos são conduzidos seguindo princípios estatísticos, com a consideração de uma minoração na resistência dos materiais (concreto e aço) e uma majoração no carregamento. Este processo ocorre quando a seção atinge o final do Estádio III, indicando que os materiais, seja o concreto ou o aço, passam do regime plástico para a situação de ruptura: ou o concreto se rompe por esmagamento, ou o aço atinge seu alongamento limite de cálculo, ou acontecem ambos os modos de ruptura simultaneamente.

#### 4.1.2 *Hipóteses básicas*

A ABNT NBR 6118:2023, recomenda as seguintes hipóteses básicas:

- a) As seções transversais permanecem planas até que haja a ruptura, ou seja, a distribuição das deformações é linear;

- b) A deformação das barras de aço deve ser a mesma do concreto ao seu entorno, deste modo garantido a aderência entre concreto e barra de aço;
- c) O alongamento máximo permitido para a armadura de tração será de 10%, com o intuito de prevenir deformações excessivas;
- d) No ELU, as tensões de tração no concreto são desprezadas;
- e) A distribuição de tensões do concreto é feita de acordo com o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo, com tensão máxima  $\sigma_{cd}$ ; (ROCHA & CHAER, 2020).

### 4.1.3 Domínios de Deformação

A ABNT NBR 6118:2023 estabelece os seguintes domínios de deformação, para seções submetidas a tensões normais, seja em tração uniforme, flexo-tração, flexão pura, flexo-compressão e compressão uniforme, a saber:

Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:

- reta a: tração uniforme;
- domínio 1: tração não uniforme, sem compressão;
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\varepsilon_c < \varepsilon_{cu}$  e com o máximo alongamento permitido).

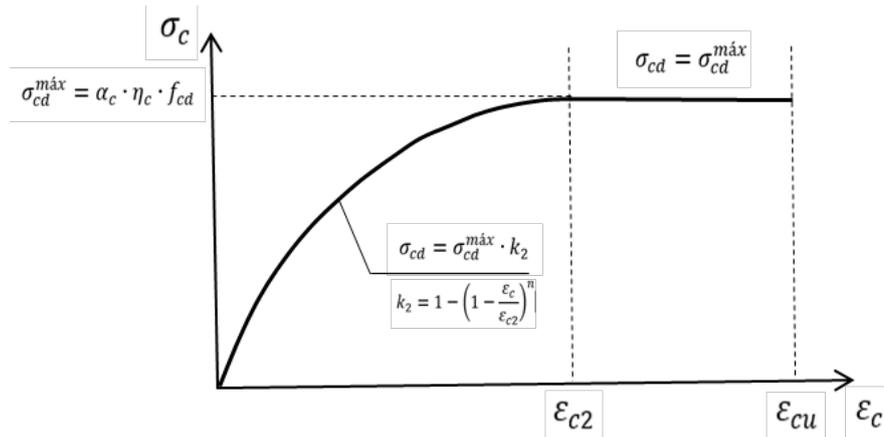
Ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto:

- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$ );
- domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ( $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$ );
- domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
- reta b: compressão uniforme.

(ABNT NBR 6118:2023).

Considerando que o diagrama tensão-deformação do concreto assume a forma de uma parábola-retângulo e que, para  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$ , ocorre a transição do trecho parabólico para o trecho horizontal (plastificação), propõe-se uma divisão para o Domínio 2. Este domínio é segmentado em dois Subdomínios: 2a (trecho parabólico) e 2b (trecho reto), conforme Figura 1.

Figura 1 – Concreto: Diagrama tensão-deformação de cálculo.



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Na qual, para classe de concreto Grupo I (C20 a C50):

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} \quad (1)$$

$$\epsilon_{c2} = 3,5\text{‰} \quad (2)$$

$$n = 2 \quad (3)$$

$$\alpha = 0,85 \quad (4)$$

Já para a classe de concreto Grupo II (C55 a C90):

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (5)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4 \quad (6)$$

$$n = 1,4 + 23,4 \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4 \quad (7)$$

$$\left[ \alpha = 0,85 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck} - 50}{100} \right) \right] \quad (8)$$

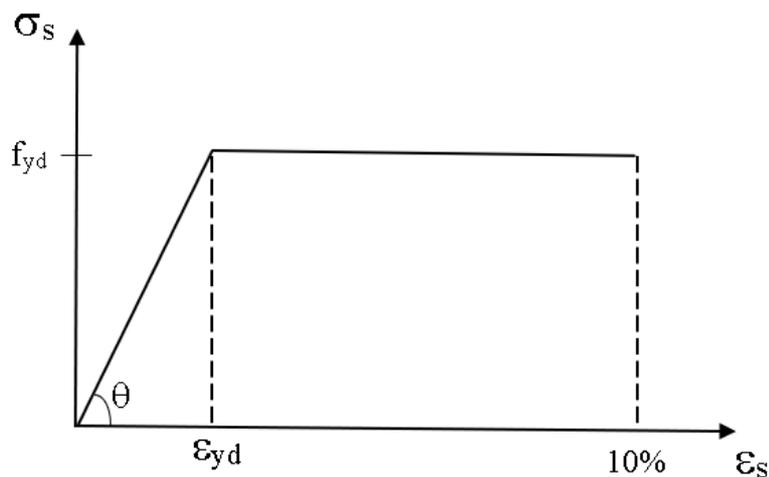
Onde:

$$\text{Para } f_{ck} \leq 40\text{MPa: } n_c = 1,0 \quad (9)$$

$$\text{Para } f_{ck} > 40\text{MPa: } n_c = (40/f_{ck})^{1/3} \quad (10)$$

Em função do diagrama tensão-deformação do aço, temos um trecho inclinado, onde vale a lei de Hooke, com as tensões inferiores à tensão de escoamento. Ao atingir a deformada de início de escoamento, o gráfico assume uma reta horizontal limitada em 10%, Figura 2. A parte inclinada do gráfico, corresponde ao Domínio 4, enquanto o escoamento está para o Domínio 3.

Figura 2 – Aço: Diagrama tensão-deformação de cálculo.



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Na qual, o valor de  $tg_{\theta}$  é obtido pela Equação 11.

$$tg_{\theta} = \epsilon_s = \frac{f_{yd}}{\epsilon_{yd}} \rightarrow \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{\epsilon_s} \quad (11)$$



	Domínio 3	$\epsilon_{cu}$	$\epsilon_{yd} < \epsilon_s < \epsilon_{s\_lim}$	concreto no limite e escoamento do aço
	fronteira 3-4	$\epsilon_{cu}$	$\epsilon_{yd}$	concreto no limite e início de escoamento do aço
4	Domínio 4	$\epsilon_{cu}$	$0 < \epsilon_s < \epsilon_{yd}$	concreto no limite e aço antes do escoamento (Lei de Hooke)
	Final do Domínio 4	$\epsilon_{cu}$	0	concreto no limite e aço antes do escoamento (Lei de Hooke)

Fonte: Elaborado pelos autores

#### 4.1.4 Armadura Simples

Conforme a ABNT NBR 6118:2023, é recomendado estabelecer um limite para a curvatura do elemento, expresso em relação a um limite para a posição relativa da linha neutra ( $k_x = x/d$ ). Esse limite é estipulado como 0,45 para concretos da classe I (C20 a C50) e 0,35 para concretos da classe II (C55 a C90). Ambos os limites pertencem ao Domínio 3, caracterizando o que denominamos como uma situação limite para o cálculo com Armadura Simples.

O cálculo com Armadura Simples ocorre quando a armadura longitudinal de tração é devidamente calculada. Na região comprimida, são prescritas duas barras finas, uma em cada canto do estribo, denominadas armadura de montagem ou porta-estribos. Como o próprio nome sugere, essas barras servem para fixar os estribos na região comprimida.

Segundo Rocha & Chaer (2020),

Caso tenhamos uma solicitação inicial que conduza a uma deformada posterior à deformada limite, podemos tomar duas decisões de projeto:

- a) alterar os parâmetros de geometria e material, buscando uma nova situação de deformada anterior à limite e, portanto, mantendo o cálculo por Armadura Simples;
- b) optar pelo arranjo de armadura conhecido por Armadura Dupla.

(ROCHA & CHAER, 2020).

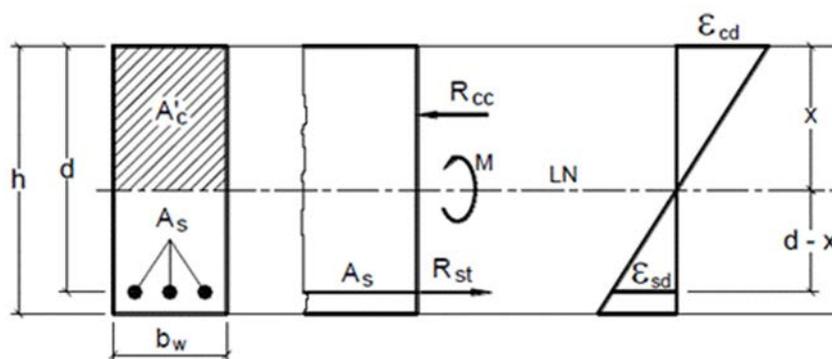
#### 4.1.5 Fundamentos para o cálculo da Armadura de Tração

Seguindo as hipóteses básicas, a partir da Figura 4, tem-se, por equilíbrio:

$$\sum N = 0 \text{ e } \sum M = 0 \quad (12)$$

Para uma viga de seção retangular, com largura  $b_w$  e altura  $h$ , sob flexão simples, submetida a um momento fletor positivo, com armadura de tração  $A_s$  e uma área de concreto comprimido  $A'_c$ , surgirá a Linha Neutra (LN) à distância  $x$ , medida a partir da fibra mais comprimida da seção transversal. Chama-se de altura útil “ $d$ ” a distância da fibra mais comprimida ao centro de gravidade esperado da armadura longitudinal tracionada, como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Distribuição de tensões e deformações em viga de seção retangular.



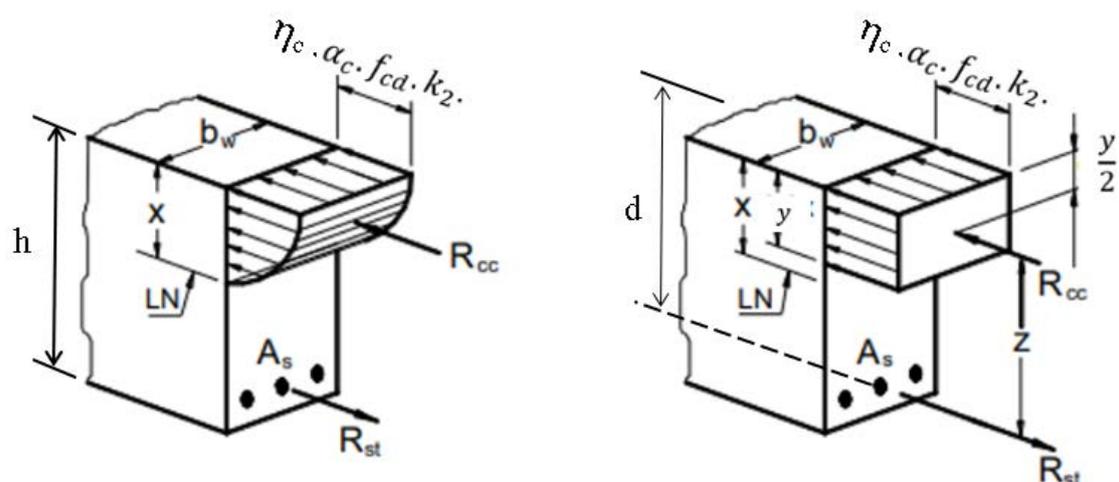
Fonte: Bastos (2019)

A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da LN no ELU, sendo definida como a relação  $\frac{x}{d}$ , denominado  $k_x$ :

$$k_x = \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} \quad (13)$$

Conforme Bastos (2019), as distribuições de tensões de compressão podem ser descritas pelo diagrama parábola-retângulo. Nesse contexto, há uma adaptação para um bloco de tensão constante de profundidade  $y$  ( $y = \lambda \cdot x$ ), resultando em uma resultante situada na metade de  $y$ . Admite-se também a resultante das tensões de tração no centro de gravidade (CG) da Armadura de Tração, como mostrado na Figura 5.

Figura 5 - Distribuição de tensões de compressão em perspectiva.



Fonte: Neves & Chaer (2023), adaptado de Bastos (2019)

Equações de equilíbrio estático a partir das Figura 4:

$$\sum N = 0 \therefore R_{cc} - R_{st} = 0 \rightarrow R_{cc} = R_{st} \quad (14)$$

$$\sum M = 0 \therefore R_{st} \cdot z = R_{cc} \cdot z = M_d \quad (15)$$

Onde:

$$M_d = R_{cc} \cdot z \quad (16)$$

$$M_d = R_{st} \cdot z \quad (17)$$

$$R_{st} = f_{sd} \cdot A_s \quad (18)$$

$$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot A'_c \quad (19)$$

$$\sigma_{cd} = \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot k_2 \quad (20)$$

$$k_2 = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n \text{ se } \varepsilon_c < \varepsilon_{c2}; k_2 = 1 \text{ se } \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c2} \quad (21)$$

$$\text{Classes de concreto – Grupo I: } \lambda = 0,8 \quad (22)$$

$$\text{Classes de concreto – Grupo II: } \lambda = 0,8 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{400}\right) \quad (23)$$

$$y = \lambda \cdot x \quad (24)$$

$$A'_c = b_w \cdot y \quad (25)$$

$$z = d - \frac{y}{2} \quad (26)$$

De (18) e (19), obtém-se:

$$M_d = A_s \cdot f_{sd} \cdot z \rightarrow A_s = \frac{M_d}{f_{sd} \cdot z} \quad (27)$$

De (17), (19), (20) e (21), tem-se:

$$M_d = \sigma_{cd} \cdot A'_c \cdot z = \sigma_{cd} \cdot b_w \cdot y \cdot z \quad (28)$$

$$M_d = \sigma_{cd} \cdot b_w \cdot \lambda \cdot x \cdot \left(d - \frac{\lambda \cdot x}{2}\right) \quad (29)$$

A partir da Equação (29), o problema se resolve encontrando o valor da posição absoluta da LN (x):

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot M_d}{\sigma_{cd} \cdot b_w}}}{\lambda} \quad (30)$$

Mas  $f_{sd} = f_{yd}$  para Armadura Simples com  $k_x$  menor ou igual a  $k_x$  limite, que é a situação de Armadura Simples.

$$A_s = \frac{M_d}{f_{yd} \cdot z} \quad (31)$$

#### 4.1.6 Determinação da posição da linha neutra ( $x$ )

A incógnita para se determinar a Armadura de Tração para a situação de Armadura Simples é a posição da linha neutra ( $x$ ). Resolvendo-se a expressão de  $x$ , segundo a Equação 30, toda a sequência de cálculos para se chegar à armadura estará definida. Na referida equação, temos definida a altura útil ( $d$ ), o momento fletor ( $M_d$ ) é a solicitação de cálculo, a base da seção transversal ( $bw$ ) é conhecida e o fator  $\lambda$  é determinado em função da Classe do Concreto. O último valor que entra na equação é o valor da tensão de compressão de cálculo do concreto. Nesse caso o valor dessa tensão depende da correspondente deformação ( $\varepsilon_c$ ), que pode ser inferior a  $\varepsilon_{c2}$ , pertencente ao Subdomínio 2<sup>a</sup>, ou maior ou igual, pertencente aos Subdomínio 2b, ou ao Domínio 3, até a fronteira limite (para  $k_x$  limite).

Quando a seção está no Subdomínio 2a, o diagrama tensão-deformação do concreto está na região parabólica, portanto, com valor inferior ao seu valor máximo. Por outro lado, se a seção estiver no Subdomínio 2b, ou no Domínio 3, até a fronteira limite, a tensão de compressão é máxima.

Sabe-se que  $\sigma_{cd} = \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot k_2$ , sendo  $k_2 = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n$  se  $\varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$ , Subdomínio 2a; enquanto  $k_2 = 1$  se  $\varepsilon_c \geq \varepsilon_{c2}$ , Subdomínio 2b e Domínio 3.

Se estivermos no Subdomínio 2a, a solução não é imediata.

$$k_2 = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)\right]^n \quad (32)$$

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot M_d}{\sigma_{cd} \cdot bw}}}{\lambda} \quad (33)$$

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot Md}{(k2 \cdot \sigma_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd}) \cdot bw}}}{\lambda} \quad (34)$$

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot Md}{\left[1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \cdot \sigma_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot bw}}}{\lambda} \quad (35)$$

$$x_1(\varepsilon_c) = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot Md}{\sigma_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \cdot bw}}}{\lambda} \quad (36)$$

$$x = kx \cdot d \quad (37)$$

$$kx = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \quad (38)$$

$$kx = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \left(\frac{10}{1000}\right)} \quad (39)$$

$$x_2(\varepsilon_c) = \left[ \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \left(\frac{10}{1000}\right)} \right] \cdot d \quad (40)$$

$$x_1(\varepsilon_c) = x_2(\varepsilon_c) \quad (41)$$

$$\left[ \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot Md}{\sigma_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \cdot bw}}}{\lambda} \right] = \left[ \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \left(\frac{10}{1000}\right)} \right] \cdot d \quad (42)$$

Variando  $\varepsilon_c$  de 0 a  $\varepsilon_{c2}$  e buscar a diferença nula:

$$|x_1(\varepsilon_c) - x_2(\varepsilon_c)| = 0 \quad (43)$$

Contudo se estivermos no Subdomínios 2b, ou no Domínio 3,  $k_2=1$ , de modo que temos todos os valores para se determinar  $x$ :

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot Md}{\sigma_{cd} \cdot bw}}}{\lambda} \quad (44)$$

$$\sigma_{cd} = \sigma_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot k_2 \quad (45)$$

$$x = \frac{d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \cdot Md}{(\sigma_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd}) \cdot bw}}}{\lambda} \quad (46)$$

$$y = \lambda \cdot x \quad (47)$$

$$z = d - \frac{y}{2} \quad (48)$$

$$kx = \frac{x}{d} \quad (49)$$

#### 4.1.7 Momento Mínimo e Armadura Mínima

Conforme estabelecido pela Norma Brasileira ABNT NBR 6118:2023, aprimorar o desempenho estrutural e a ductilidade à flexão, além de controlar a fissuração, requer a incorporação de quantidades mínimas de armadura passiva, as quais são determinadas com base no momento mínimo.

Quando as primeiras fissuras de tração se manifestam durante a flexão, é imperativo evitar uma ruptura frágil da seção fissurada, sendo indicada a utilização de armadura de tração

dimensionada conforme os parâmetros definidos pela ABNT NBR 6118: 2023 para o denominado Momento Mínimo.

A quantidade mínima de armadura de tração em elementos estruturais, sejam eles armados ou protendidos, deve ser estabelecida com base em um momento fletor mínimo, conforme indicado na Equação 50, observando a taxa mínima absoluta de 0,15%<sub>0</sub>:

$$Md_{mín} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup} \quad (50)$$

Onde  $W_0$  representa o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto em relação à fibra mais tracionada. Este módulo é definido, no caso de uma seção transversal retangular, da seguinte maneira:

$$W_0 = \frac{bw \cdot h^2}{6} \quad (51)$$

A norma ABNT NBR 6118:2023 sugere que, na ausência de ensaios para a determinação da resistência à tração indireta e da resistência à tração na flexão, a resistência à tração direta do concreto pode ser avaliada utilizando as seguintes expressões:

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (52)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (53)$$

Sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{1}{3}} \\ \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot (f_{ck} + 8)) \\ \text{para } 55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad (54)$$

#### 4.1.8 Momento na Fronteira 2a-2b ( $M_{d,ab}$ )

A Fronteira 2a-2b é caracterizada como a região onde a deformação do concreto atinge o valor de  $\varepsilon_{c2}$ , enquanto a deformação do aço alcança 10‰. Apresenta uma adaptação no Domínio 2 conforme estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2023. Dessa maneira, é viável determinar o par ( $M_{d,ab}; A_{s,ab}$ ) ao substituir os valores correspondentes das deformações conhecidas.

$$\varepsilon_{c_{ab}} = \varepsilon_{c2} \quad (55)$$

$$\varepsilon_{s_{ab}} = 10\text{‰} \quad (56)$$

$$kx_{ab} = \frac{\varepsilon_{c_{ab}}}{\varepsilon_{c_{ab}} + \varepsilon_{s_{ab}}} \quad (57)$$

$$x_{ab} = kx_{ab} \cdot d \quad (58)$$

$$y_{ab} = \lambda \cdot x_{ab} \quad (59)$$

$$A'c_{ab} = b_w \cdot y_{ab} \quad (60)$$

$$k_{2_{ab}} = 1 \quad (61)$$

$$\sigma cd_{ab} = \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot k_2 \quad (62)$$

$$Rcd_{ab} = \sigma cd_{ab} \cdot A'c_{ab} \quad (63)$$

$$z_{ab} = d - \frac{y_{ab}}{2} \quad (64)$$

$$Md_{ab} = Rcd_{ab} \cdot z_{ab} \quad (65)$$

#### 4.1.9 Momento Limite para Armadura Simples $M_{d,lim}$

A fim de assegurar um comportamento dúctil apropriado da peça, considerando a posição relativa da linha neutra, a ABNT NBR 6118:2023 recomenda:

$$\begin{cases} k_{x,lim} \leq 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ Mpa} \\ k_{x,lim} \leq 0,35 \text{ para } 55 \text{ Mpa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ Mpa} \end{cases} \quad (66)$$

A partir da definição de uma posição limite para a linha neutra, estabelece-se a fronteira que diferencia o cálculo de armadura classificado como Armadura Simples e Armadura Dupla. Na situação caracterizada como Armadura Simples, a armadura de tração é calculada, e na região comprimida, é prescrita uma armadura de montagem denominada porta-estribos. Para o caso de Armadura Dupla, o resultado do cálculo da armadura devido à flexão consiste em dois conjuntos: a armadura de tração e a armadura de compressão, esta última desempenhando o papel de porta-estribo.

No contexto da posição limite da linha neutra, o momento correspondente é conhecido como Momento Limite, quando o cálculo é realizado considerando a Armadura Simples.

O Momento Limite é facilmente definido a partir da Equação (67), desde que se apresente a expressão de  $z_{lim}$ :

$$\varepsilon_{clim} = \varepsilon_{cu} \quad (67)$$

$$\varepsilon_{slim} = \left( \frac{1 - kx_{lim}}{kx_{lim}} \right) \cdot \varepsilon_{cu} \quad (68)$$

$$kx_{lim} = \frac{\varepsilon_{clim}}{\varepsilon_{clim} + \varepsilon_{slim}} \quad (69)$$

$$x_{lim} = kx_{lim} \cdot d \quad (70)$$

$$y_{lim} = \lambda \cdot x_{lim} \quad (71)$$

$$A'c_{lim} = b_w \cdot y_{lim} \quad (72)$$

$$k_{2lim} = 1 \quad (73)$$

$$\sigma_{cdlim} = \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot k_2 \quad (74)$$

$$Rcd_{lim} = \sigma_{cdlim} \cdot A'c_{lim} \quad (75)$$

$$z_{lim} = d - \frac{y_{lim}}{2} \quad (76)$$

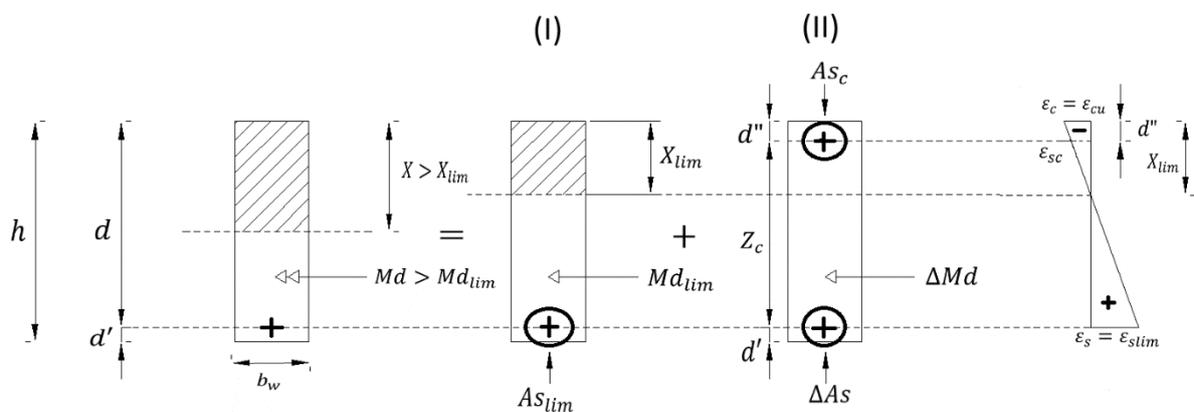
$$Md_{lim} = Rcd_{lim} \cdot z_{lim} \quad (77)$$

#### 4.1.10 Armadura Dupla

A utilização do arranjo de Armadura Dupla torna-se necessária, quando se tem uma solicitação de Momento Fletor maior que o Momento Fletor Limite, este correspondente ao  $k_x$  limite.

O cálculo das Armaduras de Tração e Compressão é feito desmembrando o Momento Fletor em duas parcelas: I) Momento Fletor Limite, para  $k_x$  limite e, por conseguinte  $x$  limite, cuja armadura de tração é ( $A_{s\ lim}$ ); II) Variação de Momento Fletor,  $\Delta Md$ , que será resistido por um binário de forças resistentes correspondentes à um acréscimo de armadura de tração e a necessidade de armadura de compressão ( $A_{s\ c}$ ).

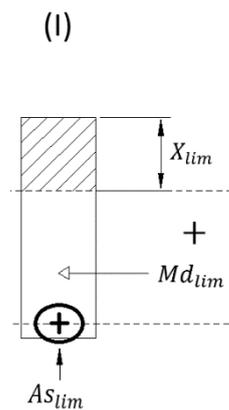
Figura 6: Seção transversal de viga retangular com armadura dupla.



Fonte: Elaborado pelos autores

#### 4.1.10.1 Determinação da armadura de tração para $Md_{lim}$

Figura 7: Seção com armadura de tração.



Fonte: Elaborado pelos autores

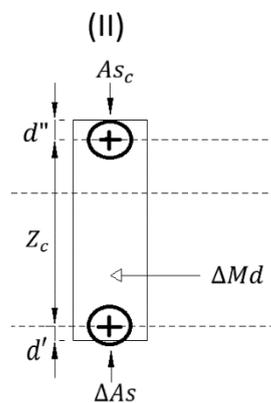
Sendo a armadura de tração definida como:

$$A_{s_{lim}} = \frac{Md_{lim}}{f_{yd} \cdot z_{lim}} \quad (78)$$

$$z_{lim} = d - \frac{y_{lim}}{2} \quad (79)$$

#### 4.1.10.2 Determinação do acréscimo de armadura de tração e armadura de compressão

Figura 8: Seção com armadura de compressão.



Fonte: Elaborado pelos autores

O acréscimo de armadura de tração correspondente ao  $\Delta Md$  será:

$$\Delta A_s = \frac{\Delta Md}{f_{yd} \cdot z_c}$$

A armadura de compressão correspondente ao  $\Delta Md$  será:

$$A_{sc} = \frac{\Delta Md}{f_{scd} \cdot z_c} \quad (80)$$

$$z_c = d - d'' \quad (81)$$

#### 4.1.10.3 Armadura total tracionada

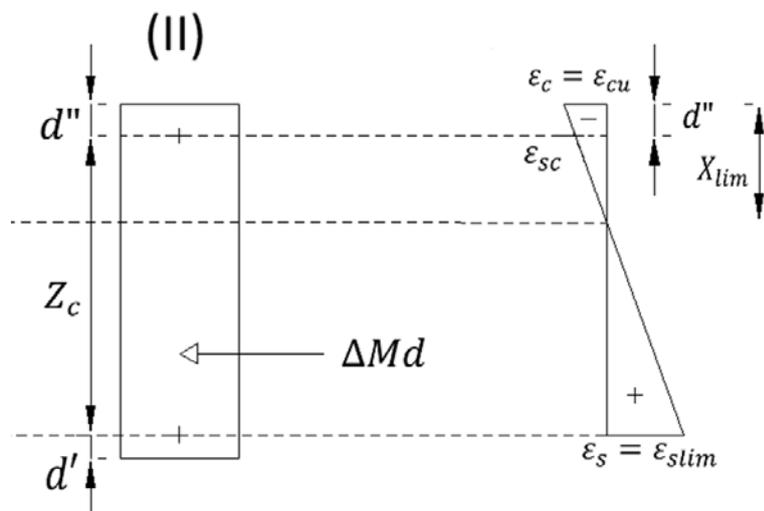
A armadura tracionada total  $A_{st}$  será:

$$A_{st} = A_{s_{lim}} + \Delta A_s \quad (82)$$

$$A_{st} = \frac{Md_{lim}}{f_{sd} \cdot z_{lim}} + \frac{\Delta Md}{f_{yd} \cdot z_c} \quad (83)$$

#### 4.1.10.4 Determinação de $\epsilon_{sc}$

Figura 9: Diagrama de deformação em uma seção retangular com armadura dupla.



Fonte: Elaborado pelos autores

Por semelhança de triângulos no diagrama de deformação, temos que:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_{lim}} = \frac{\varepsilon_{sc}}{(x_{lim} - d'')} \quad (84)$$

$$|\varepsilon_{sc}| = \left( \frac{x_{lim} - d''}{x_{lim}} \right) \cdot \varepsilon_{cu} \quad (85)$$

$$se \begin{cases} |\varepsilon_{sc}| \geq \varepsilon_{yd} \rightarrow f_{scd} = f_{yd} \\ |\varepsilon_{sc}| < \varepsilon_{yd} \rightarrow f_{scd} = E_s \cdot |\varepsilon_{sc}| \end{cases} \quad (86)$$

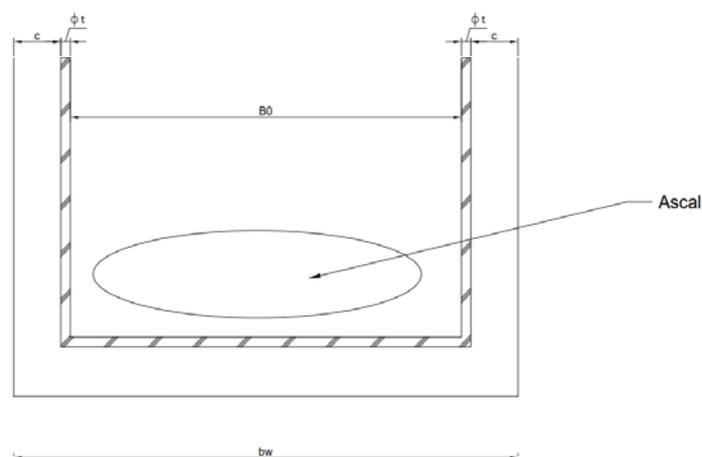
Onde:

$$x_{lim} = kx_{lim} \cdot d \quad (87)$$

#### 4.1.11 Distribuição de barras longitudinais

Para o cálculo da quantidade de barras necessárias é preciso saber algumas medidas da seção transversal da viga, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Espaço para distribuição para as barras na seção transversal



Fonte: Elaborado pelos autores

Na qual:

$\Phi_t$ - Diâmetro do estribo;

$c$ - Cobrimento;

$b_w$ - Largura da base da viga;

$b_0$ - Comprimento do fuste da viga, encontrado pela Equação 88:

$$b_0 = b_w - 2c - 2\Phi_t \quad (88)$$

#### 4.1.11.1 Quantidade de barras necessárias

Primeiramente, é feita a escolha do diâmetro do estribo, depois é calculado a área da barra  $As_\Phi$ , como mostra a Equação 89:

$$As_\Phi = \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4} \quad (89)$$

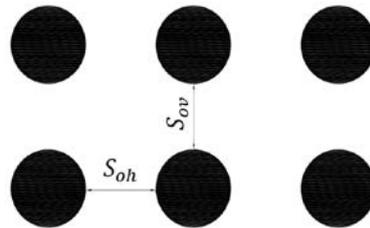
O número de barras será calculado da seguinte forma:

$$N\Phi_{ne} = \frac{As_{cal}}{As_\Phi} \quad (90)$$

Vale ressaltar que o valor de  $N\Phi_{ne}$  deve ser arredondado para o maior número inteiro.

4.1.11.2 Espaçamentos mínimos

Figura 11 - Espaçamentos Mínimos.



Fonte: Elaborado pelos autores

Para o cálculo do espaçamento mínimo, usa-se os seguintes:

$$S_{oh} \geq \begin{cases} 2cm \\ \Phi \\ 1,2\Phi_{AGR} \end{cases} \quad (91)$$

$$S_{ov} \geq \begin{cases} 2cm \\ \Phi \\ 0,5\Phi_{AGR} \end{cases} \quad (92)$$

Onde  $\Phi_{AGR}$  é o diâmetro máximo do agregado.

A partir da segunda camada é necessário deixar o foso para entrada do vibrador.

$$S_{ohf} \geq \begin{cases} S_{oh\_min} \\ S_{ovib\_min} \end{cases} \quad (93)$$

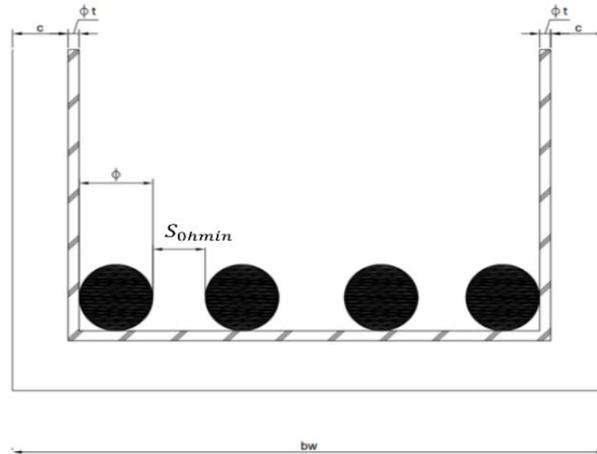
$$S_{ovibmin} = \Phi_{vib} + 1cm \quad (94)$$

Para a quantidade de foso, segue o critério apresenta a seguir:

$$\begin{cases} p/b_w \leq 30cm \rightarrow 1 \text{ foso!} \\ p/30 \leq b_w \leq 60cm \rightarrow 2 \text{ fossos!} \end{cases} \quad (95)$$

#### 4.1.11.3 Número máximo de barras na primeira camada

Figura 12 - Número máximo de barras na primeira camada.



Fonte: Elaborado pelos autores

A distribuição das barras se dá no espaço  $b_0$ , onde  $N_{\Phi 1c}^{máx}$  é o número máximo de barras que cabem na primeira camada. A seguir:

$$b_0 = N \cdot \Phi + (N - 1) \cdot S_{0Hmin} \quad (96)$$

$$b_0 = N \cdot \Phi + N \cdot S_{0Hmin} - S_{0Hmin} \quad (97)$$

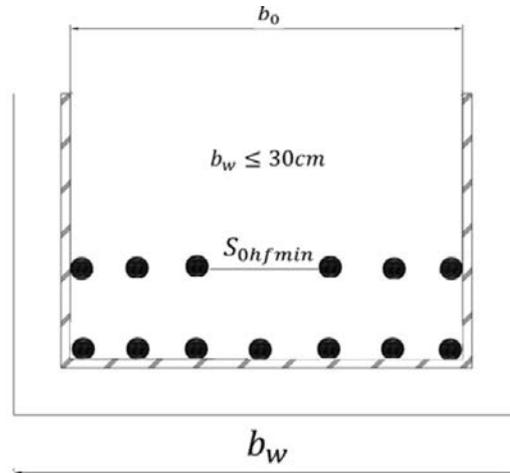
$$b_0 = N \cdot (\Phi + S_{0Hmin}) \quad (98)$$

$$N = \frac{b_0 + S_{0Hmin}}{\Phi + S_{0Hmin}} \quad (99)$$

$$N_{\Phi 1c}^{máx} = \frac{b_0 + S_{0Hmin}}{\Phi + S_{0Hmin}} \quad (100)$$

4.1.11.4 Número máximo de barras na segunda camada

Figura 13 - Número máximo de barras a partir da segunda camada.



Fonte: Elaborado pelos autores

$$S_{0HF} \geq \begin{cases} S_{0Hmin} = 3cm \\ S_{0vibmin} = \Phi_{vib} + 1cm \end{cases} \quad (101)$$

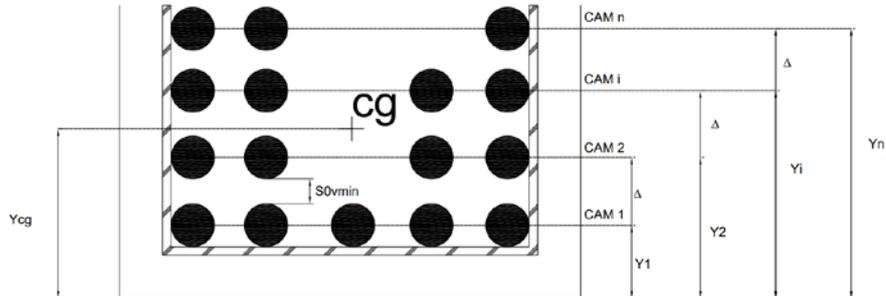
$$b_{0E} = b_{01} = \frac{b_0 - S_{0HFmin}}{2} \quad (102)$$

$$N\Phi_{b0E}^{max} = \frac{b_{0E} + 3cm}{\Phi + 3cm} = N\Phi_{b0D}^{max} \quad (103)$$

$$N\Phi_{bE}^{max} = N\Phi_{b0E} + N\Phi_{b0D} \quad (104)$$

#### 4.1.11.5 Centro de gravidade

Figura 14: Determinação do centro de gravidade (CG) real.



Fonte: Elaborado pelos autores

Para o cálculo do centro de gravidade real, usa-se os valores do centro da barra no sentido de y, como mostra a Figura 14.

$$\Delta = S_{0vmin} + \Phi \quad (105)$$

$$y_1 = c + \Phi_t + \frac{\Phi}{2} \quad (106)$$

$$p/i = 2 \rightarrow n \rightarrow y_i = y_{i+1} + \Delta \quad (107)$$

Logo, o centro de gravidade real será a divisão entre a somatória do produto entre o centro de gravidade, no sentido y da barra, e o número de barras na camada pela somatória do número de barra da camada, como mostra Equação 108.

$$Y_{CG} = \frac{\sum y_i \cdot N_{\Phi i}}{\sum N_{\Phi cam}} \quad (108)$$

#### 4.1.11.6 Verificação

A verificação consiste em duas etapas, sendo a primeira a resolução da Equação 109.

$$Y_{CG} = d'_{real} \leq d'_{adotado} \quad (109)$$

A segunda etapa da verificação consiste em o maior valor da variação da distância, no sentido y.

$$\Delta_{sup} = y_n - Y_{CG} \quad (110)$$

$$\Delta_{inf} = Y_{CG} - y_1 \quad (111)$$

$$Maior(\Delta_{sup}; \Delta_{inf}) \leq \frac{h}{10} \quad (112)$$

Caso seja atendido a condição apresentada na Equação 112, o detalhamento será aceito.

#### 4.1.12 Estados Limites de Serviço

São estados a partir dos quais a estrutura passa a ter desempenho inadequado às finalidades da construção ou apresenta riscos de ruína. (BASTOS, 2019).

Depreende-se naturalmente dos requisitos esperados para uma edificação, que ela deva reunir condições adequadas de segurança, funcionalidade e durabilidade, de modo a atender todas as necessidades para as quais foi projetada, ao longo de sua vida e que as exigências relativas à capacidade resistente e ao desempenho em serviço deixam de ser satisfeitas, quando são ultrapassados os respectivos estados limites. (BASTOS, 2019).

Assim, quando uma estrutura não satisfaz um ou mais desses três critérios, ela é considerada a ter alcançado um Estado Limite. Consequentemente, uma estrutura pode alcançar um estado limite de natureza estrutural ou funcional. Portanto, existem dois tipos de estados limites que podem ser identificados, a saber:

- Estados Limites Últimos (ELU);
- Estados Limites de Serviço (ELS).

#### 4.1.12.1 Estados Limites Último (ELU)

Conforme especificado pela ABNT NBR 6118:2023, os Estados Limites Últimos são aqueles associados ao colapso estrutural ou qualquer outra forma de falha que resulte na interrupção do uso seguro da estrutura. No processo de projeto, é fundamental considerar os seguintes aspectos que caracterizam os estados limites últimos:

- Perda do equilíbrio, global ou parcial, admitida a estrutura como um corpo rígido;
- Ruptura ou deformação plástica excessiva dos materiais;
- Transformação da estrutura, no todo ou em parte, em sistema hipostático;
- Instabilidade por deformação;
- Instabilidade dinâmica;
- Casos especiais.

#### 4.1.12.2 Estado Limite de Serviço (ELS)

São aqueles relacionados à durabilidade das estruturas, aparência, conforto do usuário e a boa utilização funcional delas, seja em relação aos usuários, seja às máquinas ou aos equipamentos utilizados. (BASTOS, 2019).

No período de vida da estrutura, usualmente são considerados estados limites de serviço caracterizados por:

- Danos ligeiros ou localizados, que comprometam o aspecto estético da construção ou a durabilidade da estrutura;
- Deformações excessivas que afetem a utilização normal da construção ou seu aspecto

estético;

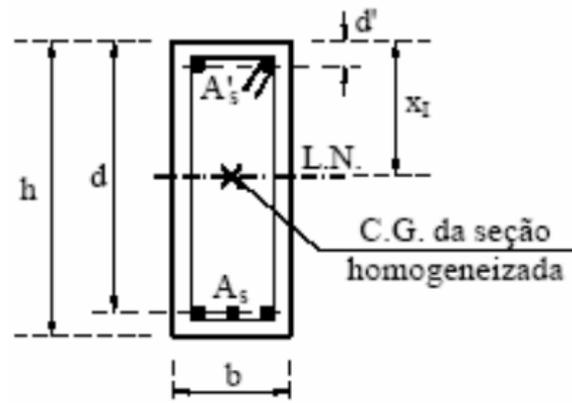
- Vibração excessiva ou desconfortável.
  - a) **Estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF):** Estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da estrutura (ver item 13.3 da ABNT NBR 6118:2023).

#### 4.1.12.3 Estádios I, II e III

Os estádios I, II e III de deformação de uma viga de seção retangular são etapas distintas que descrevem o comportamento estrutural da viga sob diferentes condições de carregamento.

- Estádio I: a peça se encontra no estado elástico. O momento  $M_I$  é de pequena intensidade, que resulta em uma tração no concreto, porém essa tensão não ultrapassa a resistência característica do concreto à tração. As tensões nas fibras mais comprimidas são proporcionais às deformações do diagrama tensão-deformação, garantido um trecho linear no diagrama. Nesse estágio não existem fissuras. (FREIRE, L. F., SANTOS, C. R., 2016).

Figura 15 Seção não fissurada (Estádio I).



Fonte: Alva

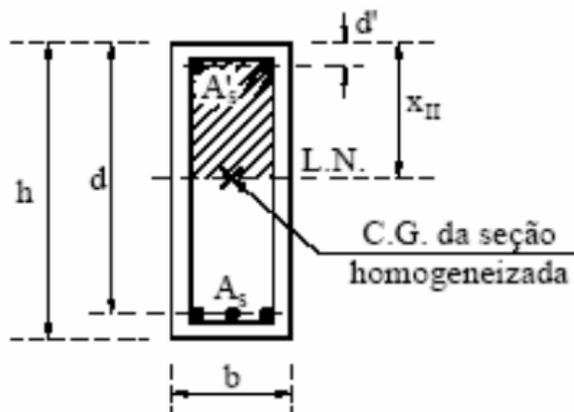
Onde:

$$x_I = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2} + (\alpha_e - 1)A_s \cdot d + (\alpha_e - 1)A'_s \cdot d'}{b \cdot h + (\alpha_e - 1)A_s + (\alpha_e - 1)A'_s} \quad (113)$$

$$I_I = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \left( x_I - \frac{h}{2} \right)^2 + (\alpha_e - 1)A_s (d - x_I)^2 + (\alpha_e - 1)A'_s (x_I - d')^2 \quad (114)$$

- Estádio II: a viga começa entrar no estado de fissuração. Aumentado o valor do momento para  $M_{II}$ , as tensões de tração terão valores superiores a resistência característica do concreto à tração. Portanto, apenas o aço irá resistir ao esforço, visto que o concreto terá rompido, tornando visíveis as fissuras. (FREIRE, L. F., SANTOS, C. R., 2016).

Figura 16 Seção fissurada (Estádio II)



Fonte: Alva

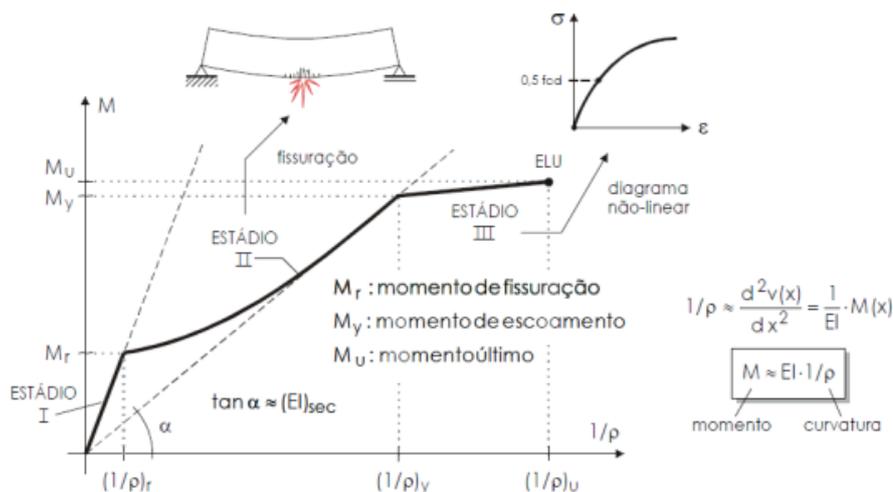
Onde:

$$\frac{b \cdot x_{II}^2}{2} + [\alpha_e(A'_s + A_s) - A'_s]x_{II} + [A'_s \cdot d' - \alpha_e(A'_s d' + A'_s \cdot d)] = 0 \quad (115)$$

$$I_{II} = \frac{b \cdot x_{II}^3}{3} + (\alpha_e - 1)A'_s(x_{II} - d')^2 + (\alpha_e - 1)A_s(d - x_{II})^2 \quad (116)$$

- Estádio III: neste estágio de carregamento, as fissuras estabilizam em profundidade, de modo que ao aumentar-se o valor do momento fletor, ocorrerá a plastificação dos materiais, em que pode acontecer que o concreto se rompa por esmagamento, ou o aço se rompa por tração após o escoamento, ou que ambos se rompam simultaneamente, caracterizando o Estado Limite Último, em que o Momento Fletor correspondente é o Momento Fletor de Cálculo, denominado de momento de ruína,  $M_u$ . (FREIRE, L. F., SANTOS, C. R., 2016).

Figura 17 - Relação Momento-Curvatura.



Fonte: Pappalardo Jr, 2006

De maneira simplificada, pode-se dizer que os estádios I e II são os que correspondem às situações de serviço, enquanto o estágio III corresponde ao estado limite último. Para realizar o dimensionamento das peças estruturais de concreto armado, é utilizado o estágio III, visto que as peças devem suportar as situações extremas. Para verificar os Estados Limites de Serviço, com a peça fissurada, tratamos do cálculo no estágio II. (FREIRE, L. F., SANTOS, C. R., 2016).

#### 4.1.12.4 Verificação de flechas (ELS-DEF)

O comportamento da estrutura pode ser descrito de forma que tanto o concreto quanto o aço sejam considerados como materiais elásticos e lineares. Isso significa que as diferentes seções ao longo do elemento estrutural podem sofrer deformações específicas nos estádios I e II.

No estágio I, as deformações específicas podem ocorrer desde que os esforços aplicados não ultrapassem aqueles que causam a fissuração. Já no estágio II, as deformações específicas podem ocorrer mesmo quando os esforços excedem aqueles que causam a fissuração.

Ao se realizar o cálculo, é necessário utilizar o valor do módulo de elasticidade secante,  $E_{cs}$ , que é definido na Seção 8 da ABNT NBR 6118:2023. Além disso, é obrigatório levar em consideração o efeito da fluência ao considerar a deformação ao longo do tempo.

#### 4.1.12.5 Flecha imediata em vigas de concreto armado

Para estimar de forma aproximada da flecha imediata em vigas, pode-se empregar a fórmula de rigidez equivalente apresentada a seguir:

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (117)$$

Onde:

- $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;
- $I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, calculado com  $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$ ;
- $M_a$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, ou seja, o momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada nessa avaliação;
- $M_r$  é o momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas;
- $E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto.

#### 4.1.12.6 Cálculo da flecha diferida no tempo para vigas de concreto armado

A flecha adicional diferida, que é causada pelas cargas de longa duração devido à fluência, pode ser calculada de maneira aproximada multiplicando a deflexão imediata pelo fator  $\alpha_f$ , conforme expresso na equação a seguir:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \rho'} \quad (118)$$

Onde:

- $\rho' = \frac{A_s'}{bd}$
- $\xi$  é um coeficiente função do tempo, que pode ser obtido diretamente na Tabela 1 ou ser calculado pelas expressões seguintes:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (119)$$

$$\xi(t) = 0,68(0,996^t)t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses}$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

Tabela 1 – Valores do coeficiente  $\xi$  em função do tempo.

<b>Tempo (t)</b> meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	$\geq 70$
<b>Coeficiente</b> $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: ABNT NBR 6118:2023

Sendo:

- $t$  o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;
- $t_0$  a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração. No caso de parcelas da carga de longa duração serem aplicadas em idades diferentes, pode-se tomar para  $t_0$  o valor ponderado a seguir:

$$t_0 = \frac{\sum P_i t_{0i}}{\sum P_i} \quad (120)$$

Onde

- $P_i$  representa as parcelas de carga;
- $t_{0i}$  é a idade em que se aplicou cada parcela  $P_i$ , expressa em meses.

O valor da flecha total deve ser obtido multiplicando a flecha imediata por  $(1 + \alpha_f)$ .

## **5. METODOLOGIA**

### **5.1 Aprimoramento das planilhas existentes**

Com o objetivo de melhorar a experiência do usuário, foi empreendido um esforço para desenvolver uma interface mais amigável para o projeto disponíveis no Microsoft Excel. No estágio inicial, decidiu-se iniciar o projeto utilizando a linguagem de programação integrada ao Excel, aproveitando sua funcionalidade de cálculos em planilhas.

### **5.2 Resultados**

Neste trabalho para além da revisão bibliográfica foi implementada uma planilha de cálculo contemplando a determinação da armadura de flexão (armadura simples ou armadura dupla), detalhamento da armadura (distribuição das barras na seção transversal) e verificação da flexa, a planilha implementada é o resultado e segue em arquivo anexo.

## 6. CONCLUSÃO

A incorporação, em uma mesma planilha das diversas etapas de cálculo para se determinar a flecha em uma viga biapoiada de seção retangular submetida à flexão pura, a saber:

- Determinação da Armadura (SIMPLES ou DUPLA);
- Distribuição das barras de seção transversal e aferição do centro de gravidade real;
- Verificação de flechas.

Contribui para facilitar o entendimento pelo usuário dos procedimentos envolvidos nos diversos passos de cálculo.

Como sugestão para trabalhos futuros, deverá ser implementada uma aba adicional à planilha para a verificação de abertura de fissuras. Ainda, sugere-se desenvolver uma interface mais amigável para se percorrer a sequência de cálculos.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6018:** Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro-RJ, 2023
- ALVA, G. M. S. **Estados Limites De Serviço Segundo a NBR 6118.** Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Estruturas e Construção Civil. Santa Maria-RS, 2009.
- ARAÚJO, J.M., **Curso de Concreto Armado – Volume 1**, Editora DUNAS. 3.ed. Rio Grande - RS, 2010.
- ARAÚJO, J.M., **Curso de Concreto Armado – Volume 2**, Editora DUNAS. 3.ed. Rio Grande - RS, 2010.
- BASTOS, P. S. **Estruturas de concreto I: fundamentos do concreto armado (e-book).** Bauru: Universidade Estadual de São Paulo, 2019.
- FREIRE, L. F., SANTOS, C. R. **Cálculo de flechas em viga de concreto armado considerando a fissuração por tração na flexão.** Trabalho de Conclusão de Curso. PUC Goiás, Escola Politécnica e de Artes, Engenharia Civil. Goiânia-GO, 2016.
- PAPPALARDO, A. J. (2019). **Estruturas de Concreto II Aula 5 – Flechas em viga - Verificação de flechas em vigas concreto armado.** São Paulo: Escola Engenharia Universidade Presbiteriana Mackenzie.
- NEVES., F. P. **Vigas De Seção Retangular - Flexão Pura Armadura Simples e Dupla: Planilhas Para O Autoaprendizado.** Trabalho de Conclusão de Curso. Goiânia, GO: PUC Goiás, Escola Politécnica e de Artes, Engenharia Civil, 2023.
- ROCHA, J.C.F. (2020). **Armadura de Tração em Seções Retangulares Submetidas à Flexão Pura – Simplificação de Cálculo para Armadura Simples.** Trabalho de Conclusão de Curso. Goiânia, GO: PUC Goiás, Escola Politécnica e de Artes, Engenharia Civil.
- SILVA, G. G. **Vigas Em Concreto Protendido - Força De Protensão E Armadura Longitudinal De Flexão.** Trabalho de Conclusão de Curso. Goiânia, GO: PUC Goiás, Escola Politécnica e de Artes, Engenharia Civil, 2022.



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS  
GABINETE DO REITOR

Av. Universitária, 1069 • Setor Universitário  
Caixa Postal 86 • CEP 74605-010  
Goiânia • Goiás • Brasil  
Fone: (62) 3946.1000  
www.pucgoias.edu.br • reitoria@pucgoias.edu.br

## RESOLUÇÃO nº 038/2020 – CEPE

### ANEXO I

#### APÊNDICE ao TCC

#### Termo de autorização de publicação de produção acadêmica

O(A) estudante **ÍGOR SOARES SIQUEIRA** do Curso de **ENGENHARIA CIVIL**, matrícula **2018.2.0025.0101-5**, telefone: **(94) 9-8137-1799** e-mail **igor7renis@gmail.com**, na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei nº 9.610/98 (Lei dos Direitos do Autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **VERIFICAÇÃO DE FLECHAS EM VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA O AUTOAPRENDIZADO**, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto(PDF); Imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); Vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão pela internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 14 de dezembro de 2023.

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

*Igor Soares Siqueira*

Nome completo do autor: **ÍGOR SOARES SIQUEIRA**

Assinatura do professor-orientador: \_\_\_\_\_

*Alberto Vilela Chaer*

Nome completo do professor-orientador: **ALBERTO VILELA CHAER**