PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
PUC-GOIÁS

FERNANDA CAROLINE SIQUEIRA DA SILVA

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E CONTEXTUAL

GOIÂNIA
2023

FERNANDA CAROLINE SIQUEIRA DA SILVA

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E CONTEXTUAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura, pelo Curso Matemática da Pontifícia Universidade Católica. Orientador: Prof.ª Dra. Vanda Domingos Vieira.

GOIÂNIA

2023

FERNANDA CAROLINE SIQUEIRA DA SILVA

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA E CONTEXTUAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura, pelo Curso Matemática da Pontifícia Universidade Católica. Orientador: Prof.ª Dra. Vanda Domingos Vieira.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dra. Vanda Domingos Vieira.

____

Prof.º Dr. Adelino Candido Pimenta

____

Prof.ª Ms. Rosimara Fachin Pelá

GOIÂNIA
2023

"Dedico este trabalho a todos que me apoiaram quando eu mais necessitava e que acreditaram que eu chegaria onde cheguei hoje."

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, pelo dom da vida, porque tudo pertence a Ele e se estou aqui neste momento é por permissão Dele.

Quero agradecer a minha família, meu esposo e a minha psicóloga, que sempre estiveram ao meu lado, oferecendo suporte emocional, paciência e compreensão. Sua crença em mim foi o alicerce deste projeto.

Agradeço também aos meus professores, orientadores e colegas de turma, que me guiaram com sabedoria, desafiaram meu pensamento e me inspiraram a buscar a excelência em cada etapa do TCC. Suas contribuições foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e profissional.

Quero expressar também gratidão aos amigos que me encorajaram nos momentos de dúvida e celebraram comigo nas vitórias, meu coração transborda alegria por todo o apoio que me deram. Sua amizade foi um bálsamo para os momentos de estresse.

Aos colegas de estudo e parceiros de pesquisa, obrigado por compartilharem seus conhecimentos e experiências, tornando esta jornada intelectual enriquecedora e empolgante.

Por fim, quero agradecer a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste TCC. Cada palavra de incentivo, cada conselho e cada momento de apoio não passaram despercebidos.

Este trabalho não é apenas um reflexo do meu esforço, mas também do poder da união, da colaboração e do amor de minha rede de apoio. Estou extremamente agradecida por cada um de vocês ter feito parte desta jornada. Obrigada do fundo do meu coração.

Com gratidão eterna, Fernanda.

RESUMO

Neste trabalho foi iniciado uma pesquisa qualitativa sobre a evolução das equações do segundo grau através do seu contexto histórico, citando alguns matemáticos importantes que trouxeram contribuições significativas para a área da matemática, bem como também auxiliaram no desenvolvimento do mesmo, entre eles, estão Bhaskara, Viéte e Girard. Durante esse trabalho, foram utilizadas diversas referências, como Eves (2011), Boyer (2003), Andrade (2000), Pedroso (2010), que embasaram a elaboração do mesmo, além do software GeoGebra para a elaboração de algumas ilustrações que enriqueceram os conteúdos abordados nesse trabalho. Como resultado desta pesquisa, foi entendido que é de suma importância acompanhar a evolução e mudanças que a equação do 2º grau sofreu com o passar dos anos, dando então um suporte para o aprendizado do aluno e facilitando seu entendimento e conhecimento sobre essa temática.

Palavras-chave: Equação do 2° grau; História da matemática; Educação matemática

ABSTRACT

In this work, a qualitative research was initiated on the evolution of second-degree equations through their historical context, citing some important mathematicians who made significant contributions to the field of mathematics as well as aided in this development, among them being, Bhaskara, Viète and Girard. Throughout this work, various references were used such as Eves (2011), Boyer (2003), Andrade (2000), Pedroso (2010), which provided the foundation for this elaboration, in addition to the GeoGebra software for the creation of some illustrations that enriched the content covered in this work. As a result of this research, it was understood that it is of utmost importance to follow the evolution and changes that the second-degree equation underwent over the years, thus providing support for student learning and facilitating their understanding and knowledge of this theme.

Keywords: Quadratic Equation; History of Mathematics; Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Áreas dos quadrados 15
Figura 2 - Ilustração do problema dos Gregos 19
Figura 3 - Ilustração do problema dos Gregos 19
Figura 4 - Ilustração do problema dos Gregos 21
Figura 5 - Triângulo de lados consecutivos 23
Figura 6 - Triângulo de Brahamagupta 32

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resolução de Bhaskara x Resolução atual 26

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12

2. UMA CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU 13

2.1. Civilização Egípcia 14

2.2. Civilização Mesopotâmica 16

2.3. Civilização Grega 18

2.4. Civilização Hindu 22

3. CONTRIBUIÇÕES DE VIÉTE E GIRARD PARA EQUAÇÃO DO 2° GRAU 27

3.1. Apresentação da Equação de Segundo grau por Viéte 27

3.2. Relação entre coeficientes e raízes 30

4. APLICAÇÕES 32

4.1. Aplicações de Brahmagupta 32

4.2. Aplicação Atual 34

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 38

REFERÊNCIAS 39

1. INTRODUÇÃO

Quando estava no ensino médio, tinha grande facilidade em resolver exercícios com equações do segundo grau. Em contrapartida, pude notar que essa facilidade não se estendia a meus colegas, que apresentavam grande dificuldade na realização das mesmas. Antes mesmo da explicação sobre o Teorema de Bhaskara, eles nem imaginavam como resolver essas questões.

Após minha entrada na faculdade de licenciatura em matemática, percebi que essa dificuldade não mudou muito. Dentro da disciplina de Estágio, tive um olhar crítico além dos alunos e de suas relutâncias perante a matéria, percebendo através das atividades propostas pelos professores regentes que essas dificuldades apresentadas por eles poderia ser devido ao não domínio dos alunos pela parte histórica das equações quadráticas, e sim, somente ao acesso a fórmula, limitando então o pensamento crítico desses alunos, fazendo com que eles não conheçam outros métodos além do mais comumente usados, a fórmula de Bhaskara.

Dentro da minha formação universitária também tive interesse em participar de programas financiados pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), que são PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) e Residência Pedagógica como bolsista. Esses programas têm a finalidade de inserir os discentes das licenciaturas em sala de aula da Educação Básica antes mesmo deles finalizarem o curso, oferecendo uma bolsa para essa iniciação à docência. Estes projetos têm como um de seus objetivos, melhorar a qualidade do ensino das escolas públicas de Educação Básica e aperfeiçoar os futuros docentes.

Durante meu período de inserção no PIBID e na Residência Pedagógica, aplicando projetos em sala de aula, pude notar que os alunos também apresentavam dificuldade em resolver equações quadráticas, e que não conheciam sua parte histórica, conhecendo apenas a fórmula de Bhaskara, não tendo assim, noção do contexto que está sendo apresentado em sala de aula ou no seu dia-dia.

Procurando sanar essas dificuldades apresentadas pelos alunos, pesquisei como as grandes civilizações antigas como a Egípcia, Mesopotâmica, Grega e Hindu resolviam as equações do segundo grau e porque resolviam dessa forma, abrangendo seu contexto cultural e social. Para a realização desse trabalho, utilizarei as pesquisas de Eves (2011), Pedroso (2010), Boyer (2003) e Andrade (2000) e entre outros, que fizeram trabalhos acerca dessa temática.

Esse trabalho traz como pergunta norteadora deste estudo: Com um conhecimento mais abrangente sobre a resolução da equação de segundo grau, bem como uma melhor contextualização histórica, pode possibilitar um melhor entendimento sobre essa matéria?

O objetivo desse trabalho é entender como cada civilização encontrava uma equação do segundo grau. Fazer uma contextualização histórica de como surgiu e de métodos para resolvê-la, nomeando os maiores estudos sobre essa temática.

A metodologia adotada nesta monografia é predominantemente qualitativa pois, de acordo com Oliveira (2005) esse tipo de pesquisa tem como objetivo ser um estudo detalhado de fatos ou objetos, grupo de pessoas e fenômenos da realidade. Nesse estudo será abordado como surgiram as equações do segundo grau, quais civilizações foram mais importantes para sua evolução e como a contextualização histórica da equação pode ajudar na aprendizagem da mesma.

Esse estudo foi estruturado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, foi traçado a evolução histórica das equações do segundo grau, desde as civilizações antigas até as contribuições fundamentais de matemáticos renomados. No segundo capítulo, foi explorado as propriedades fundamentais das equações quadráticas, investigando as relações entre seus coeficientes, raízes. Por fim, no terceiro capítulo, abordou-se duas aplicações, sendo uma de Brahmagupta, na qual, foi desenvolvido por ele em meados de 500 d.C. e a segunda foi um problema apresentado por Tedesco et. al. (2019) para show teatral sobre equações do segundo grau.

2. UMA CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

A matemática é uma linguagem universal que permeia todos os cenários do nosso mundo. Dentro dela encontramos a equação do segundo grau ocupando um lugar de grande destaque e desempenhando um papel fundamental na resolução de problemas que vão desde a determinação de trajetórias de projéteis até a análise de crescimento populacional.

As equações do segundo grau, também conhecidas como equações quadráticas, apresentam desafios intrigantes que tem cativado matemáticos, cientistas e estudantes por séculos. O seu estudo vai além da simples solução algébrica, envolve também a exploração das raízes, dos coeficientes e das propriedades geométricas associadas.

A capacidade de desvendar tais equações não apenas aprofunda nossa compreensão da matemática, mas também fornece ferramentas essenciais para resolver problemas práticos em diversos campos.

Nos tópicos a seguir abordaremos as civilizações Egípcia, Mesopotâmica, Grega e Hindu, como essas culturas aplicavam seus conhecimentos e desvendavam os mistérios por trás das equações do segundo grau.

2.1 Civilização Egípcia

Algumas civilizações antigas através da história foram pioneiras na abordarem dessa temática e são poucos os registros sobre as equações de segundo grau. Parte da matemática egípcia foi encontrada grafada em pedras e em calendários astronômicos, mas todas essas informações podem ser consideradas imprecisas, levando em conta apenas esses recursos. Felizmente, uma quantidade considerável dos papiros[1] feitos pelos egípcios resistiu ao tempo, aproximadamente 3500 anos, trazendo assim grandes contribuições para o ramo da matemática (BOYER, 2003).

Alguns historiadores ligados a matemática apontam que os Egípcios dominavam algumas técnicas para a resolução dessas equações. No decorrer dos anos, foram encontrados alguns papiros que mostravam um pouco sobre essas técnicas, como por exemplo, no Papiro de Berlim, que foi feito baseado no Papiro de Kahun[2]. Foi encontrada uma equação cuja solução da mesma é utilizada até hoje e sendo escrita da mesma maneira que já conhecemos hoje que é $x^2 + y^2 = k$, onde k é um número positivo, pelo método chamado da falsa posição, que foi criado pelos egípcios para resolver as equações do 2° grau. (BOYER, 1974).

Um exemplo interpretado por Pedroso (2010) foi *"A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado."*

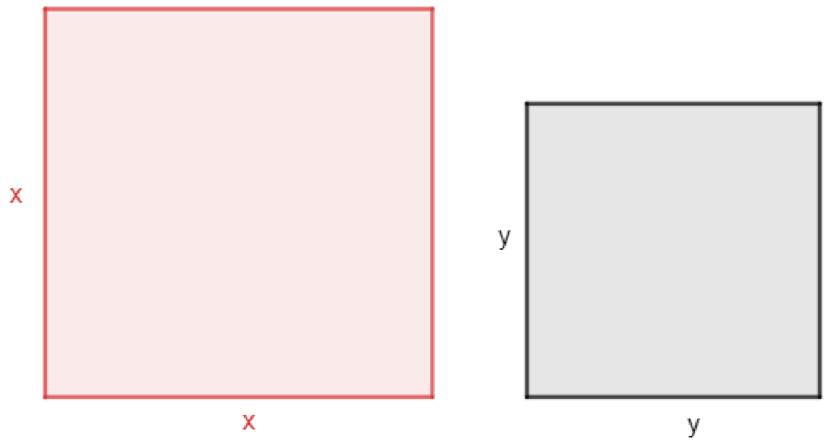
Na imagem a seguir podemos observar qual é a área do quadrado, pois para encontrar a área de um quadrado é necessário multiplicar a base pela altura, então para x temos que: $x \cdot x = x^2$ e para y temos que $y \cdot y = y^2$.

---

[1] Papiro eram folhas produzidas pelos egípcios na Antiguidade, utilizadas como superfície para a escrita. A produção dessas folhas era realizada utilizando hastes do papiro, uma planta aquática muito comum no Egito e encontrada nas margens e no delta do Nilo (SILVA, s.d.)

[2] Este documento faz parte de um lote de papiros selados encontrados em uma das residências de Kahun. Foi encontrado durante as escavações efetuadas por W. M. Flinder Petrie na cidade de Kahun, entre os anos de 1888 e 1890, juntamente com outros do mesmo período. Kahun (COELHO, 2007, p. 10)

Figura 1 *– Áreas dos Quadrados*



Fonte: *desenho criado pela própria autora com o auxílio do GeoGebra (2023).*

1. *Interpretando o exercício, temos as seguintes expressões:*

(I): $x^2 + y^2 = 100$ *e* (II): $4y = 3x$

2. *Podemos isolar o y na expressão II, obtendo o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{3}{4}x \end{cases}$$

3. *Para resolver essa equação usaremos o método de falsa posição que consiste em supormos valores para* x_0 *e* y_0 *obtendo então uma possível resposta de x e de y, com o resultado encontrado, tomando como verdadeiro* $x_0 = 4$ *e* $y_0 = 3$*, teremos:*

$$(III)\ 4^2 + 3^2 = 25$$

4. *Em seguida, pode-se dividir o 100 por 25, onde acharemos quantas vezes podemos multiplicar o* x_0 *e* y_0 *onde encontramos a igualdade correta e com os valores de solução:*

$$\frac{100}{25} = 4$$

5. *Como temos que* $25 \cdot 4 = 100$*, então temos que multiplicar toda a equação III por 4 para acharmos os reais valores para x e y, logo:*

$$4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 3^2 = 25 \cdot 4$$

6. *Podemos substituir 4 por 2^2:*

$$2^2 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 3^2 = 100$$

7. *Pela propriedade da simplificação de potências podemos colocar a potência em evidência, achando assim x e y.*

$$(2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 3)^2 = 100$$
$$8^2 + 6^2 = 100$$

8. *Substituindo os valores encontrados no sistema original temos que:*

$$\begin{cases} 8^2 + 6^2 = 100 \\ 6 = \dfrac{3}{4} * 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64 + 36 = 100 \\ 6 = 3 * 2 \rightarrow 6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 = 100 \\ 6 = 6 \end{cases}$$

Portanto, *x = 8 e y = 6* é a solução desse sistema de equações. O par ordenado *(-8,-6)* não é considerado uma solução nesse problema, pois, como o exercício trabalha com medidas de quadrados, não são utilizadas medidas negativas.

A exemplificação permitiu perceber que, o que os egípcios denominavam de equação do segundo grau, pelo fato de ter o quadrado, hoje nós chamamos de equação da circunferência.

2.2 Civilização Mesopotâmica

Segundo Boyer (2003) outra grande civilização foi a Mesopotâmica, que foi marcado por fazer uso da escrita, pela criação da roda e dos metais. Nas regiões entre os rios Tigre e Eufrates, se encontrava um povo altamente evoluído por ter conhecimento sobre construções e sobre templos decorados com cerâmica, conhecidos como Sumérios. As operações aritméticas eram tratadas pelos babilônicos, de uma forma não muito diferente do modo atual.

As primeiras aparições da equação do segundo grau na Mesopotâmia foi por volta de 1700 a.C., através dos escritos encontrados em tábuas de argila.

Um dos problemas que a civilização babilônica resolveu foi: *A diferença entre a área e o lado do quadrado é o número 870. Traduzindo esse problema para os dias atuais, a maneira de escrever essa equação é x^2- x= 870.*

Segundo Pedroso (2010, p.03), para resolver esse tipo de equação, os babilônios utilizavam o seguinte método: "*Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, (0, 5 × 0, 5 = 0, 25). Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado (870, 25 = $(29, 5)^2$) cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30), o lado do quadrado procurado"*

Para generalizar esse método atualmente é importante ter em mente que o conceito de fatoração, onde $(a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$, mas é importante lembrar que naquela época foi desenvolvido de uma maneira análoga mas, usando outros métodos. A diferença era a simbologia e a nomenclatura utilizada, pois de acordo com Boyer, 2003 *"[...] tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores*".

Posteriormente essa ideia foi apresentada por Euclides (323 a 283 a.C. aproximadamente) no livro II proposição 4 que dizia "Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos" (EUCLIDES, 2009, p. 137)

Para tanto, iremos considerar somente o coeficiente de x^2 igual a 1, o coeficiente de *x* como p e o termo independente de q. Sendo assim, usaremos a equação de acordo com que os babilônios usavam, que eram $\mathrm{x}^2 - \mathrm{px} = \mathrm{q}$, ou $x^2 = px + q$, ou $x^2 + q = px$

1°. Tome a metade de p: $\frac{p}{2}$

2°. Multiplique $\frac{p}{2}$ *por ele mesmo, sendo assim, ficando com:* $\frac{p^2}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

3°. Some o resultado encontrado dos dois lados da equação: $x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$

4°. Na primeira parte da igualdade faremos a fatoração para que fique: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$.

5°. Tire raiz dos dois lados das equações, e assim você terá: $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$

6°. Passando o $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ *para o segundo lado da equação terá:* $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$

Essa generalização é para coeficientes de $x^2 = 1$*, caso não seja, basta dividir toda equação por ele.*

Vamos dar uma olhada num exemplo prático dessa técnica matemática babilônica. Aqui está a equação $x^2 - 8x = 9$, e assumindo que p = 8 e q = 3, vamos explorar como a matemática babilônica nos ajuda a resolver essa equação.

1° tome metade de p: $\frac{8}{2} = 4$

2° multiplique o resultado por ele mesmo: $4^2 = 16$

3° some o resultado dos dois lados da equação original: $x^2 - 8x + 16 = 9 + 16$

4° faça a fatoração no primeiro membro e some o segundo membro: $(x - 4)^2 = 25$

5° tirando a raiz dos dois lados temos que: $x - 4 = 5$

6° separando os números das letras temos que: $x = 5 + 4 \rightarrow x = 9$

Olhando para a forma generalizada da resolução dos babilônios é possível perceber uma certa semelhança com a fórmula que conhecemos hoje, uma de suas diferenças é a quantidade de raízes achada. Os babilônios desconsideravam as raízes negativas devido ao fato de também estarem, trabalhando com medidas.

1.1 Civilização Grega

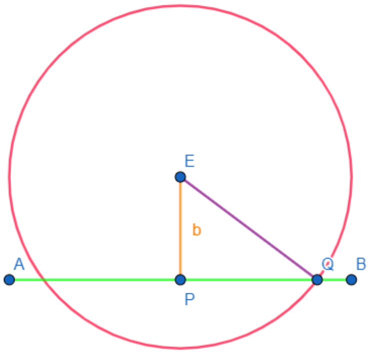
Uma das civilizações que também influenciou a matemática foi a grega (500 a 200 a.C). O contexto matemático que foi desenvolvido tanto no Egito, quanto na Mesopotâmia, era de cunho concreto e prático. Porém, na Grécia, ela era de natureza abstrata e trazia também uma independência nos modos de aplicações práticas. Foram os gregos que deram uma nova organização e reconheceram a matemática como uma ciência utilizando de demonstrações, que se tornaram a forma de garantir a validade dos resultados obtidos (SILVA, 2019, p.26).

Os gregos além de apresentarem um sistema numérico literal, eles desenvolveram um gosto pela Geometria, o que levou essa civilização a conhecer melhor esse procedimento, entre os quais se encontram a resolução para as equações de 2° grau. Os métodos de descrição passaram por alterações e atualmente são escritos assim $x^2 - ax + b = 0$, porém, antes era escrito assim

> [...] sejam AB e b os dois segmentos de reta, sendo b não maior que a metade de AB. Temos que dividir AB com um ponto Q de maneira que (AQ)(QB) = b^2. Para levar a efeito isso, marquemos PE = b na perpendicular a AB em seu ponto médio P e, com centro E e raio PB, tracemos um arco de circunferência que corta AB no ponto procurado Q. A prova é fornecida pela Proposição II 5, provavelmente ideada pelos pitagóricos para ser utilizada aqui, pois, devido a essa proposição. (EVES, 2011, p. 112).

Ilustrando o problema anterior temos as figuras 2, 3 e 4.

Figura 2 *– Ilustração do problema dos Gregos*



Fonte: desenho criado pela própria autora com o auxílio do GeoGebra (2023).

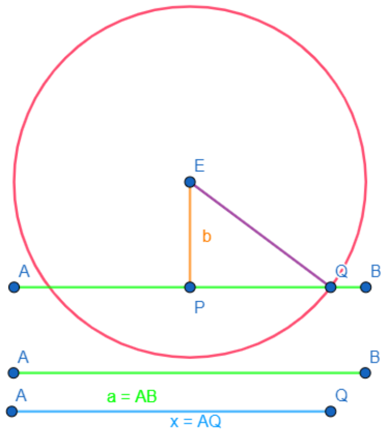
A proposição II do livro 5 de Euclides diz que “caso uma primeira seja múltipla de uma segunda, uma terceira é de uma quarta, e também uma quinta seja o mesmo múltiplo da segunda que uma sexta é da quarta, também tendo sido composta, primeira e quinta serão o mesmo múltiplo da segunda que a terceira e sexta serão da quarta” (EUCLIDES, 2009).

Eves, (2011) denota o comprimento de AB como a, e o comprimento de AQ como x. Com isso conseguimos mostrar o produto *(AQ)•(QB)* e obter $x^2 - ax + b^2 = 0$ com a seguinte expressão:

$$(AQ) \cdot (QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2 = b^2$$

Antes de chegarmos a uma conclusão e verificarmos essa expressão, é importante apresentar quais são os seguimentos necessários e quais seus respectivos valores.

***Figura 3** – Ilustração do problema dos Gregos*



Fonte: desenho criado pela própria autora com o auxílio do GeoGebra (2023).

Temos os seguintes valores de acordo com o que foi dado pelo autor:

- $PE = b$
- $AB = a$
- $AQ = x$

A fim de identificarmos os valores restantes, é necessário realizar algumas verificações.

1. *Para acharmos o valor do segmento PB basta dividirmos o valor do segmento AB por dois, tendo em vista que o ponto P é o ponto médio de AB, logo temos que* $PB = \frac{a}{2}$.
2. *O autor diz que o raio da circunferência é PB, com isso temos que o segmento* $EQ = PB$*, logo* $EQ = PB = \frac{a}{2}$.
3. *Para acharmos o valor do segmento QB, podemos subtrair o segmento AB pelo segmento AQ. Contudo temos* $AB - AQ = a - x$*, então,* $QB = a - x$.
4. *Agora precisamos encontrar somente o segmento PQ, que envolve a subtração de PB e QB, sendo assim, primeiro devemos tirar o mínimo múltiplo comum entre os dos dois elementos e em seguida subtrair da seguinte forma:* $PB - QB = \frac{a}{2} - (a - x) = \frac{a - 2a + 2x}{2} = \frac{(-a + 2x)}{2}$*, tendo por resultado* $PQ = \frac{2x - a}{2}$.

Para verificar que a expressão $(AQ) \cdot (QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2 = b^2$ é verdadeira, precisamos resolver separadamente cada uma das igualdades, nomeando a primeira por 1, a segunda por 2, a terceira por 3 a quarta por 4 e a quinta por 5.

01. $AQ \cdot QB = x \cdot (a - x)$ para a resolução desse exercício, a primeira etapa é fazer a distribuição do x para o a e para o -x, utilizando da propriedade distributiva resultando em $AQ \cdot QB = x \cdot (a - x) = ax - x^2$.

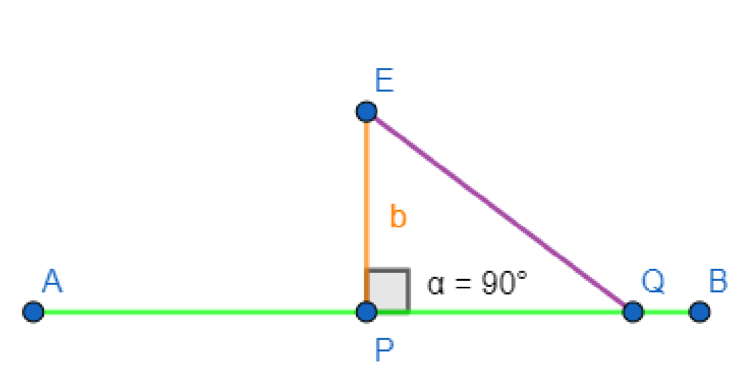
02. $(PB)^2 - (PQ)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(a-2x)^2}{2}$ a primeira etapa para a resolução desse exercício seria resolver o quadrado do segundo membro e fazer suas devidas operações, achando assim o resultado da seguinte forma:

$$(PB)^2 - (PQ)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(a-2x)^2}{2} = \frac{a^2}{4} - \frac{(a^2-4ax+4x^2)}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2-4ax+4x^2}{4} = \frac{a^2-a^2+4ax-4x^2}{4} = \frac{-4ax+4x^2}{4} = \frac{4}{4} \cdot ax - x^2 = 1 \cdot ax - x^2 = ax - x^2.$$

Até o seguinte momento, verificamos que a igualdade $AQ \cdot QB = (PB)^2 - (PQ)^2$ está correta e ambas valem $ax - x^2$.

03. Como vimos anteriormente, que PB = EQ, então podemos afirmar que $(PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2$. Porém é necessário ter uma analogia diferente das questões resolvidas anteriormente para determinar a seguinte equação $(EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2$. Para isso verificaremos a seguinte imagem.

***Figura 4** – Ilustração do problema dos Gregos*



Fonte: desenho criado pela própria autora com o auxílio do GeoGebra (2023).

Com a ajuda do software GeoGebra, identificamos o ângulo do triângulo que foi criado, mas para tirar a prova primeiro voltamos no enunciado dado pelo autor onde foi indicado que o segmento PE traçado sobre o ponto médio P de AB, é perpendicular a AB, portanto, isso indica de o ângulo entre o segmento AB e PE é 90°.

Com essa definição podemos usar o Teorema de Pitágoras, que diz que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Logo, temos que os catetos são "*PE*" e "*PQ*" e a hipotenusa é denominada por "*EQ*", sendo assim temos:

$$(PE)^2 + (PQ)^2 = (EQ)^2$$

Somando o oposto aditivo de *(PQ)²* dos dois lados da equação temos a seguinte solução:

$$(PE)^2 + (PQ)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2$$
$$(PE)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2$$

04. O valor de $EQ = b$, logo $(EQ)^2 = b^2$.

Sendo assim temos que $(AQ) \cdot (QB) = b^2$, onde AQ ≠ QB, então, $ax - x^2 = b^2$ pela Proposição II do livro 5 de Euclides citada anteriormente. Organizando a equação, $x^2 - ax + b = 0$, conseguimos encontrar a equação do segundo grau através de um problema geométrico.

1.2 Civilização Hindu

Outra civilização que teve uma grande importância para as equações do segundo grau foram os hindus. Na Índia surgiram os matemáticos que mais trouxeram contribuições para o ramo da Matemática, em especial nas equações quadráticas como Brahmagupta (598 d.C. – 668 d.C.). Porém, o diferencial veio de Bhaskara, que utilizando os conhecimentos da época, escreveu a obra "*Lilavati*" que ajudou a concluir posteriormente os estudos sobre as equações de 2° grau, e com isso levou o crédito para a fórmula que leva seu nome até os dias de hoje (RODRIGUES E SILVA, 2004, p 05).

O indiano Brahmagupta inicialmente usou triângulos com lados inteiros e consecutivos para encontrar uma equação diofantina[3], que hoje chamamos de Equação de Pell[4]. Através dessa descoberta, ele se deparou com outros triângulos, que posteriormente teriam seu nome, sendo chamados então de Triângulo de Brahmagupta. Suas características eram ter áreas inteiras e lados também inteiros e consecutivos.

---

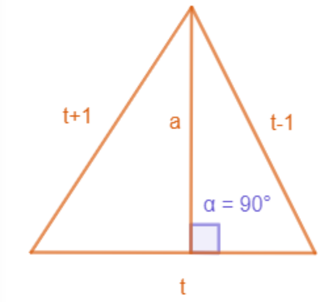
[3] Equações Diofantinas são equações polinomiais, em várias incógnitas, com coeficientes inteiros (ou racionais) das quais se buscam soluções restritas ao conjunto dos números inteiros (FREITAS, 2015, p. 115)

[4] John Pell (1610 1685) matemático inglês, definiu x e y de maneira recorrente, tomando o conjugado $x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$. Brahmagupta para solucionar estes tipos de equações, quase mil anos antes, no século VII, desenvolveu um brilhante método anunciado no seu manuscrito Brahmasphutasiddhanta, o Samasa Bhāvanã ou Princípio da Composição que consiste em gerar infinitas soluções inteiras para as equações do tipo: $x^2 - Ny^2 = \lambda$, onde N e λ são inteiros N > 0, N livre de quadrados. (FALCÃO, 2021, p. 23)

> [...]é possível que Brahmagupta tenha usado a conhecida fórmula de Heron[5] para o cálculo da área de um triângulo em função dos lados a, b, c e do semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$ dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, para encontrar os oito primeiros triângulos com área e lados inteiros e consecutivos, listados a seguir pelos ternos: (3,4,5); (13,14,15): (51,52,53); (193,194,195); (723,724,725); (2701, 2702, 2703)(10083, 10084, 10085); (37633, 37634, 37635).(FALCÃO, 2021, p. 74)

Para começar a desvendar esse triângulo desenha-se uma figura no qual contenha lados inteiros e consecutivos, como já dizia Falcão (2021), t – 1, t, t + 1 ≥ 4 e altura *a*.

Figura 5 *– Triângulo de lados consecutivos*



Fonte: desenho criado pela própria autora com o auxílio do GeoGebra (2023).

Primeiro para acharmos o semiperímetro temos $p = \frac{t-1+t+t+1}{2} = \frac{3t}{2}$ e para área temos $S = \frac{at}{2}$ tendo em vista que a área do triângulo é $\frac{base \cdot altura}{2}$. Observando as duas equações, ainda não é possível concluir que *S* e *t* são inteiros, mas caso seja, também concluímos que *a* é racional. Por meio das contas a seguir, provaremos que *a* é inteiro e múltiplo de 3.

Substituindo os dados na Fórmula de Heron temos a seguinte equação:

$$S = \sqrt{\frac{3t}{2}\left[\frac{3t}{2} - (t-1)\right]\left[\frac{3t}{2} - t\right]\left[\frac{3t}{2} - (t+1)\right]}$$

Quando multiplicamos todas as partes temos:

$$S = \sqrt{\left[\frac{9t^2}{4} - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t}{2}\right]\left[\frac{9t^2}{4} - \frac{3t^2}{2} - \frac{3t}{2} - \frac{3t^2}{2} + t^2 + t\right]}$$

[5] é a fórmula para determinar a área, (ABC), de um triângulo a partir de seus lados a, b e c. Assim, considerando que s é o semiperímetro do triângulo, temos: $(ABC)\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (FERNANDES, 2021, p. 51)

$$S = \sqrt{\left[\frac{9t^2 - 6t^2}{4} + \frac{6t}{4}\right]\left[\frac{9t^2 - 12t^2 + 4t^2}{4} - \frac{6t}{4} + \frac{4t}{4}\right]}$$

$$S = \sqrt{\left[\frac{3t^2 + 6t}{4}\right]\left[\frac{t^2 - 2t}{4}\right]}$$

$$S = \sqrt{\left[\frac{3t^4 - 6t^3 + 6t^3 - 12t^2}{16}\right]}$$

$$S = \sqrt{\frac{3t^4 - 12t^2}{16}}$$

$$S = \sqrt{\frac{t^2}{4}\left[\frac{3t^2 - 12}{4}\right]}$$

$$S = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{3(t^2 - 4)}{4}}$$

$$S = \frac{t}{2}\sqrt{3\left(\frac{t^2}{4} - \frac{4}{4}\right)} \; ou \; S = \frac{t}{2}\sqrt{3\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]}$$

Substituindo $S = \frac{at}{2}$ obtemos:

$$\frac{at}{2} = \frac{t}{2}\sqrt{3\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right)}$$

$$\frac{a^2t^2}{4} = \frac{t^2}{4} \cdot 3\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right)$$

$$a^2t^2 = t^2 \cdot 3\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]$$

Dividindo os dois lados da equação por t^2, temos:

$$a^2 = 3\left(\frac{t^2}{4} - 1\right) \quad \text{(I)}$$

Quando chegamos na equação I é importante observar que a igualdade é estabelecida quando *t* é igual a *2x*, então podemos escrever *t* = *2x*, onde *x* é um número inteiro. Substituindo *t* = *2x* na equação I, obtemos:

$$a^2 = 3\left[\frac{(2x)^2}{4} - 1\right]$$

$$a^2 = 3\left(\frac{4x^2}{4} - 1\right)$$

$$a^2 = 3(x^2 - 1)$$

Com essas operações é possível verificar que a^2 é um múltiplo de 3, com isso, podemos concluir também que é um número inteiro. Se *a* for múltiplo de 3, conseguimos resolver a equação, portanto, se *a* não for múltiplo de 3, a equação entra em contradição, não podendo ser resolvida. Logo, podemos substituir *a* = 3y.

$$(3y)^2 = 3(x^2 - 1)$$

$$9y^2 = 3(x^2 - 1)$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 3, temos:

$$3y^2 = (x^2 - 1)$$

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

Chegamos então na forma já conhecida e citada anteriormente, Equação Diofantina “do tipo $x^2 - Ny^2 = 1,$, onde x, y são inteiros” (FALCÃO, 2021, p. 24)

Já Bhaskara (1114-1185) mesmo com todo o talento que tinha, também não conseguiu resolver de fato o desenvolvimento das equações de segundo grau. Apesar de todos os hindus terem um gosto especial pela matemática, nenhum deles foi tão habilidoso quanto Bhaskara, que resolveu diversos problemas e criou várias obras, tendo como uma de suas principais *Lilavati* (nome de sua filha), e *Vija-Ganita*. Obras que tinham conteúdos relacionados a aritmética, álgebra, equações lineares e quadráticas, e também de geometria.

> Muitos dos problemas de Bhaskara no *Lilavati* e o *Vija-Ganita* evidentemente provinham de fontes hindus anteriores, pois isso não é surpreendente que o autor tenha seus melhores momentos ao tratar a análise indeterminada. Com relação à equação de Pell $x^2 = 1 + py^2$, proposta antes por Brahmagupta, Bhaskara deu soluções particulares para os cinco casos p = 8, 11, 32, 61 e 67. Para $x^2 = 1 + py^2$, por exemplo, ele deu a solução x = 1.776.319.046 e y = 22.615.390. Esse é um notável feito de cálculo, e sua verificação só por si dará trabalho ao leitor. Os livros de Bhaskara estão cheios de outros exemplos de problema diofantinos (BOYER, 2003, p. 152)

No entanto para começarmos a falar de Bhaskara e de sua forma de resolução, é importante conhecer a forma na qual os hindus escrevia naquela época.

De acordo com Pedroso (2010), *ya* (abreviação de *yavattavat*) era a primeira incógnita; *ka* (*kalaka* ou "negro") era a segunda incógnita e *v (varga)* significa "quadrado", um ponto sobre o número indicava que ele era negativo; *bha (bhavita)* significava "produto"; *k(a)* representava *karana* ("irracional" ou "raiz"), *ru* representava *rupa* (número "puro" ou "comum"), o primeiro membro da equação era escrito em uma linha e o segundo membro na linha abaixo.

Para exemplificar a ideia de Pedroso (2010) temos o seguinte exemplo: $\begin{matrix} ya\ v\ 1\ ya\ \dot{1}0 \\ ru\ \dot{9} \end{matrix}$ que traduz-se por $x^2 - 10x = -9$.

Pedroso (2010) traz o seguinte problema e resolução que Bhaskara fazia naquela época:

> A raiz quadrada do número de abelhas de um enxame voou rumo a um jasmineiro, enquanto $\frac{8}{9}$ do enxame permaneceu atrás; e uma abelha fêmea ficou voando em torno de um macho que se encontrava preso numa flor de lótus para a qual foi atraído à noite por seu doce odor. Diga-me adorável mulher, qual é o número de abelhas. (PEDROSO, 2010, p. 07).

A seguir, temos a tabela adaptada pela autora a partir de Pedroso, (2010, p. 6) na qual se tem pela esquerda como Bhaskara escrevia e na direita uma versão atual.

Tabela 1 *– Resolução de Bhaskara x Resolução atual*

Seja *ya v* 2 o número de abelhas do enxame	Seja $2x^2$ o número de abelhas do enxame
A raiz quadrada da metade desse número é *ya* 1 k(a) metade ya v 2 ya 1	$\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$
Oito nonos de todo o enxame é *ya v* $\frac{16}{9}$	Oito nonos de todo enxame é $\left(\frac{16}{9}\right)x^2$
A soma da raiz quadrada com a parte fracionária e o casal de abelhas é igual à quantidade total de abelhas deste enxame, isto é, *ya v* 2 ya 1 ya v 16 nonos ru 2 ya v 2	$x + \left(\frac{16}{9}\right)x^2 + 2 = 2x^2$

Reduzindo-se ao mesmo denominador os dois membros da equação e eliminando o denominador, a equação transforma-se em ya 9 ya v 16 ya 18 ya v 18 *ya v* 18 *ya v* 16 *ya* 9 *ru* 18	$\frac{9x + 16x^2 + 18}{9} = \frac{18x^2}{9}$ $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$
Após a subtração a equação torna-se ya v 18 ya v $\dot{1}6$ ya $\dot{9}$ ya v 16 ya 9 ru 18 ya v $\dot{1}6$ ya $\dot{9}$ ya v 2 ya $\dot{9}$ ru 18	$18x^2 - 16x^2 - 9x =$ $16x^2 + 9x + 18 - 16x^2 - 9x$ $2x^2 - 9x = 18$
Portanto *ya* é 6 ya 1 6	Portanto $x = 6$
Donde *ya v* 2 é 72 ya v 2 ru 2 bha ru v 6 ru 72	Donde $2x^2 = 2 \cdot 6^2 = 72$

Fonte: Adaptação da tabela pela autora de Pedroso (2010, p. 6)

Nota-se que Pedroso (2010) transformou a linguagem de Bhaskara em uma linguagem matemática mais atual. Uma das diferenças entre as linguagens é que antes Bhaskara não utilizava o sinal de igualdade, já hoje, nós utilizamos com muita frequência.

3. CONTRIBUIÇÕES DE VIÉTE E GIRARD PARA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

3.1 Apresentação da Equação de Segundo Grau por Viéte

Ao longo dos anos vários matemáticos contribuíram para a resolução das equações de segundo grau, entre eles está François Viète (1540-1603) que propôs mudanças nas variáveis que transformam uma equação inicial em uma equação incompleta. Ele também foi o primeiro a introduzir a notação algébrica sistematizada, além de ter uma contribuição significativa para a teoria das equações.

Segundo Amaral (2016), Viéte

> [...] foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou-se membro do parlamento da Bretanha, ou seja, ele não era de fato um matemático, mas seus momentos de lazer eram dedicados à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições significativas à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, porém, seu marco foi na Álgebra, onde suas contribuições foram cruciais por se aproximarem das ideias que são utilizadas hoje. (AMARAL, 2016, p. 18).

Viéte descreveu de forma inédita em sua obra, uma distinção clara entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida, ou seja, as incógnitas. Ele ainda utilizou uma vogal para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Em sua época a Álgebra árabe já havia passado por aperfeiçoamentos, tanto por suas resoluções das equações cúbicas e quadráticas, quanto pelo uso parcial da simbologia nas equações. Viète desenvolveu também um método novo para a solução delas, onde notou possíveis relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação, mas seu trabalho ficou retido porque ele não aceitava que seus coeficientes ou raízes tivessem resultados negativos. (AMARAL, 2016, p. 18).

O método de Viète para a resolução de equações do 2.º grau pode ser descrito da seguinte forma com os termos atuais.

$$\textit{Seja } ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$$

Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$
$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0.$$

Reescrevendo esta igualdade como uma equação na variável "v", temos:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Viète converteu essa equação em uma equação quadrática incompleta, fazendo o coeficiente de $''v''$ se anular, igualando a expressão $2au + b = 0$, sendo assim temos então $2au = -b \rightarrow u = -\frac{b}{2a}$, ou seja, escolhendo $u = -\frac{b}{2a}$. Obtendo assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

Adicionando o oposto aditivo de $a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$, temos:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - b\left(\frac{-b}{2a}\right) - c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - b\left(\frac{-b}{2a}\right) - c$$

$$av^2 = -\frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - c$$

Tirando o mínimo múltiplo comum de toda equação temos que:

$$\frac{4a^2v^2}{4a} = \frac{(-b^2 + 2b^2 - 4ac)}{4a}$$

Como todos os lados da igualdade tem o mesmo denominador, logo, os numeradores também se igualam.

$$4a^2v^2 = -b^2 + 2b^2 - 4ac$$

Em seguida, multiplicaremos o oposto multiplicativo de $4a^2$ de ambos os lados da equação:

$$4a^2v^2 \cdot \frac{1}{4a^2} = (-b^2 + 2b^2 - 4ac) \cdot \frac{1}{4a^2}$$

$$v^2 = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Chegando então, após a algumas manipulações a:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$v = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$. Logo temos que:

$$x = u + v = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Um destaque importante feito por ele fora as manipulações algébricas que se realizam, de forma progressiva e não tão complexas de entender se seguirmos os passos descritos por Viète.

3.2 Relação entre coeficientes e raízes

Outro nome citado quando o assunto são as equações do segundo grau é Albert Girard (1595 – 1632). Na literatura encontram-se poucas informações sobre sua vida, tem-se que nasceu em St. Mihiel, na França, mas que viveu a maior parte da sua vida na Holanda. Ingressou na universidade Leiden aos 22 anos e foi voluntário no serviço militar. A pouca literatura existente aponta que Girard escreveu trabalhos de trigonometria e aperfeiçoou algumas obras de Viéte e Stevin; porém seu destaque maior foi na álgebra (ANDRADE, 2000, p.99).

O seu trabalho mais importante foi escrito em francês e publicado em Amsterdã em 1629, com o título Invenção Nova em Álgebra. Essa obra é de cunho algébrico, e conta com muitos teoremas e definições acompanhadas por exemplos e suas devidas explicações. Ele apresenta a ideia de que "*toda a equação completa de grau n tem o número de soluções igual ao seu grau*". (ANDRADE, 2000). Ou seja, se uma equação tem grau 24, ela terá até 24 soluções, nunca mais que isso. Este era seu teorema principal, no qual foi nomeado como *Teorema Fundamental da Álgebra*.

Ainda sobre a ideia citada anteriormente, referente a relação que existe entre os coeficientes de uma equação e suas respectivas soluções, onde o termo independente de uma equação de grau *n* é, sem considerar o sinal, igual ao produto de todas as raízes (positivas ou negativas, reais ou imaginárias) (ANDRADE, 2000). Logo, para ilustrar esse teorema, resolveremos uma equação do segundo grau, para obtermos suas soluções.

Temos a seguinte equação $I: x^2 - 8x - 9 = 0$

$$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$$

Substituindo os valores

$$x = \frac{\left[-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}\right]}{2 \cdot 1} = \frac{\left(8 \pm \sqrt{64 + 36}\right)}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

$$x' = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x'' = \frac{8 - 10}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Temos que nosso conjunto de soluções para essa equação é [9 e -1], se multiplicarmos as duas raízes: $1 \cdot 9 = 9$. Sendo assim é possível mostrar que o teorema de Girard está certo.

Foi o uso deste resultado que permitiu a Girard ampliar as várias soluções de equações de grau 3, 4. A resolução dessas equações, por este processo obrigava, na maioria dos casos, a resolver equações do 2° grau. Na resolução das equações do 2° grau, Girard apresentou apenas o algoritmo (já conhecido de toda a comunidade matemática) sem dar qualquer explicação ou demonstração, muito provavelmente por já ser do conhecimento geral. (ANDRADE, 2000, p.99).

Para provarmos que a teoria de Girard é verdadeira, tomaremos para $x_1 = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$ e $x_2 = \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$, multiplicando uma pela outra conseguimos a seguinte expressão que chamaremos de P.

$$P = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a} \cdot \frac{\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$$

$$P = \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2 - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a^2}$$

$$P = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$P = \frac{c}{a}$$

O teorema de Girard, muitos anos depois foi provado como verdadeiro, onde dizia que a multiplicação das soluções deveria dar o termo independente, a diferença é que ele desconsiderava o sinal, pelo fato daquela época não se importar muito com números negativos.

Além desse método de achar o termo independente através da multiplicação, hoje também usamos o da soma, que consiste em achar dois números que se somados, encontramos o coeficiente angular. Lembrando que os números da soma e do produto devem ser o mesmo pois serão as soluções daquela equação do segundo grau.

Usaremos $x_1 = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$ e $x_2 = \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$ para demonstração e chamaremos de S a seguinte expressão.

$$S = \left[\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a} + \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}\right]$$

$$S = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Então usando novamente a equação I temos que se somarmos as duas soluções:

$$S = -1 + 9 = -8$$

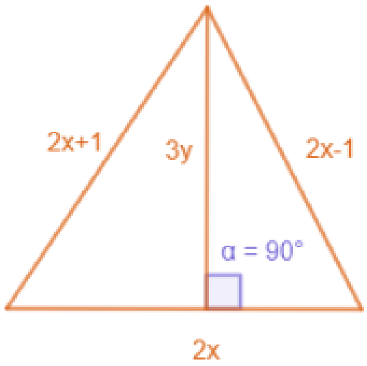
4. APLICAÇÕES

Nesse capítulo será evidenciada a aplicação do matemático Brahmagupta e uma aplicação atual, a fim de verificar quão diferentes os problemas podem ser e, quão diferentes podem ser as formas de se resolver equações do segundo grau.

4.1 Aplicação de Brahmagupta

Para primeira aplicação, precisamos voltar na equação de Brahmagupta, onde usaremos o seguinte triângulo de Brahmagupta com as medidas em função de *x* e *y*, para achar as medidas dos lados do seguinte triângulo.

Figura 6 *– Triângulo de Brahmagupta*



Fonte: desenho recriado pela própria autora com o auxílio do GeoGebra. In: Falcão, 2021.

Primeiro substituiremos o *a* por *3y* (devido fato de *a,* anteriormente já ter sido nomeado como a altura do triângulo) na equação $a^2 = 3(x^2 - 1) \rightarrow (3y)^2 = 3[(x^2 - 1)] \rightarrow 9y^2 = 3x^2 - 3$. Dividindo toda a equação por 3 encontramos a seguinte equação: $3y^2 = x^2 - 1$.

Organizando a equação temos:

$$3y^2 = [(x^2 - 1)]$$

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

Para *y =1* obtemos o seguinte resultado:

$$x^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$$

$$x^2 - 3 \cdot 1 = 1$$

$$x^2 = 1 + 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x = 2$$

Ao realizar a substituição de x = 2 nos lados do triângulo de Brahmagupta, encontramos os seguintes valores:

$$2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$2x = 2 \cdot 2 = 4$$

Conclui-se que para *y = 1* e *x = 2* os lados do triângulo são números consecutivos, sendo eles 3, 4 e 5.

É importante ressaltar que não são todos os números usados na substituição por *y* que é possível obter um resultado inteiro. Por exemplo, se dermos para *y* o valor de 2 conseguimos o seguinte resultado para *x:*

$$x^2 - 3 \cdot 2^2 = 1$$

$$x^2 - 6 = 1$$

$$x^2 - 6 + 6 = 1 + 6$$

$$x^2 = 1 + 6$$

$$x^2 = 7$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{7}$$

$$x^2 = \sqrt{7}$$

Substituindo o valor encontrados nos lados do triângulo, achamos os seguintes valores:

$$2x + 1 = 2 \cdot \sqrt{7} + 1 = 2\sqrt{7} + 1$$

$$2x - 1 = 2 \cdot \sqrt{7} - 1 = 2\sqrt{7} - 1$$

$$2x = 2 \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

O que hoje aproximando os valores conseguiríamos:

$$2\sqrt{7} + 1 \cong 6{,}29$$

$$2\sqrt{7} - 1 \cong 4{,}29$$

$$2\sqrt{7} \cong 5{,}29$$

É importante lembrar que Brahmagupta queria os lados inteiros e consecutivos de um triângulo, e também ter em mente que para esses problemas dos triângulos de Brahmagupta não é admitido números negativos devido fato de estar se tratando de medida.

4.2 Aplicação Atual

Tedesco et. al. (2019) apresentaram um relato de experiência que continha um teatro no qual os personagens viajavam no tempo para ver como os povos antigamente resolviam as equações do segundo grau. Dentro desse trabalho foi revelado um questionamento feito pelo pai de um personagem que dizia: "Tobias - *Olha só, quero obter o maior lucro possível, mas se eu cobrar R$ 4,50 pela pipoca, não vendo nenhuma! No dia em que cobrei R$ 3,50 pela pipoca,* *vendi 20 saquinhos e obtive uma receita de R$ 70,00. Já no dia que cobrei R$1,50, vendi 60 saquinhos e obtive uma receita de R$ 90,00*".

Para encontrar essa receita máxima, precisamos primeiro nomear cada parte. Chamaremos de "p" o valor da pipoca em reais, e o receita de "R" (em reais). Sabemos que quando o preço da pipoca é R$4,50 a receita é R$0,0, quando é R$3,50, a receita é R$70,00 e quando o preço é R$1,50 a receita é de R$90,00. Então temos os três seguintes pontos na seguinte forma (*p, R*):

a) (4.5, 0)
b) (3.5, 70)
c) (1.5, 90)

Podemos usar esses pontos para obter uma equação do segundo grau na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, onde *a, b* e *c* são coeficientes a serem determinados:

$$R(p) = ap^2 + bp + c$$

Com essa equação formada, podemos substituir os valores encontrando as seguintes equações:

a) Quando $p = 4{,}5$ e $p = 0$

$$0 = a(4{,}5)^2 + b(4{,}5) + c$$
$$0 = 20{,}25a + 4{,}5b + c \quad \text{(I)}$$

b) Quando p = 3.5 e R = 70

$$70 = a(3.5)^2 + b(3.5) + c$$
$$70 = 12.25a + 3.5b + c \quad \text{(II)}$$

c) Quando p = 1.5 e R = 90

$$90 = a(1.5)^2 + b(1.5) + c \rightarrow$$
$$90 = 2.25a + 1.5b + c \quad \text{(III)}$$

Agora, podemos montar um sistema de equações para que achemos os valores de *a, b* e *c*. Para isso, podemos subtrair uma equação pelas outras, eliminando então uma incógnita *c*, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 20.25a + 4.5b + c \ = 0 \\ 12.25a + 3.5b + c \ \ = 70 \\ 2.25a + 1.5b + c \ = 90 \end{cases}$$

Subtraindo a I pela II, termo a termo:

$$20.25a - 12.25a + 4.5b - 3.5b + c - c = 0 - 70$$

$$8a + b = -70$$

Subtraindo a equação II pela III:

$$20.25a - 2.25a + 4.5b - 1.5b + c - c = 0 - 90$$

$$18a + 3b = -90$$

Chegando então ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 8a + b = -70 \\ 18a + 3b = -90 \end{cases}$$

Com as duas seguintes equações, conseguimos achar o valor das incógnitas *a* e *b*:

a) $8a + b = -70$ (IV)

b) $18a + 3b = -90$ (V)

Utilizando o método da substituição[6], então primeiro precisamos isolar uma das incógnitas, onde optarei por isolar b da equação IV e em seguida a substituir na equação V.

$$8a + b = -70 \ \rightarrow \ b = -70 - 8a$$

$$18a + 3b = -90$$

$$18a + 3(-70 - 8a) = -90$$

$$18a - 210 - 24a = -90$$

$$-6a - 210 + 210 = -90 + 210$$

$$-6a = 120$$

$$\frac{-6a}{-6} = \frac{120}{-6}$$

$$a = -20$$

[6] Consiste em escolher uma das equações e isolarmos uma das incógnitas, para determinar o seu valor em relação a outra incógnita.

Para acharmos o valor de *b* basta substituirmos o valor de *a* em qualquer uma das equações anteriores, optarei por substituir na equação IV.

$$8a + b = -70$$
$$8(-20) + b = -70$$
$$-160 + b = -70$$
$$-160 + 160 + b = -70 + 160$$
$$b = 90$$

Agora que achamos as variáveis *a* e *b* podemos substituir na equação I ou II, na qual optarei para substituir na equação I.

$$20{,}25a + 4{,}5b + c = 0$$
$$20{,}25(-20) + 4{,}5(90) + c = 0$$
$$-405 + 405 + c = 0$$
$$c = 0$$

Sendo assim então temos a seguinte equação:

$$R(p) = -20p^2 + 90p$$

Ao observar os coeficientes é possível notar que $a = -20$, portanto a < 0 , logo, de acordo com Smole & Diniz (2005) podemos calcular o vértice de R(p).

Para sabermos qual é a maior receita que Tobias pode receber, precisamos saber qual é o ponto máximo dessa equação, e para achá-la usamos a fórmula, $V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-90}{2\cdot(-20)} = \frac{-90}{-40} = \frac{9}{4} = 2.25.$$

$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{90\text{^}2 - 4\cdot(-20)\cdot 0}{4\cdot(-20)} = -\frac{8100}{-80} = \frac{810}{8} = 101{,}25$$

Ou seja, para que que Tobias tenha uma receita máxima, ele deve vender cada saquinho de pipoca por R$2,25 reais, atingindo uma receita máxima de R$101,25.

Uma das maiores diferença que podemos encontrar nessas duas aplicações e que de início as antigas civilizações usavam mais problemas geométricos para a resolução de equações do segundo grau, já hoje, podemos incluir as equações em qualquer tipo de problema, sejam eles algébricos ou geométricos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática se desdobra em vários ramos que se configuraram na forma como os conhecemos atualmente, cheios de fórmulas e conceitos, que sofreram diversas alterações e foram estudados ao longo dos anos, formando assim sua história. Ao longo desse trabalho, foi descrito o que foi necessário para que a equação do segundo grau passasse por diversas mudanças ao longo do tempo para chegar no modelo que utilizamos hoje dentro de sala de aula.

Vários matemáticos foram citados nesse trabalho, tendo papéis diferentes e de suma importância nessa evolução, desde o oriente até o ocidente houve estudiosos que trabalharam ao longo dos anos para chegar à equação que utilizamos até hoje, nomeada aqui no Brasil, como Fórmula de Bhaskara.

Para encontrar as equações do segundo grau, algumas civilizações utilizaram do método geométrica já outras do método algébrico, despertando curiosidade e beleza a cada uma de suas resoluções.

Porém não foi possível mencionar todos os matemáticos que ajudaram na evolução da resolução das equações de segundo grau, no entanto, foi destacado os aspectos e as civilizações mais importantes dessa evolução.

A elaboração deste trabalho oportunizou a construção histórica das equações do segundo grau, se situando no tempo e no espaço, conhecendo onde cada contribuição aconteceu e a importância dessa construção para o ensino das equações do segundo grau.

Hoje em dia, nota-se que o ensino de Matemática nas escolas está bastante centrado na aplicação de regras e fórmulas, ou seja, a abordagem educacional é predominantemente mecânica, raramente permitindo uma perspectiva diferente do que está estabelecido nos livros didáticos durante a maioria das aulas de matemática.

Através deste trabalho, foi possível ampliar o entendimento da equação quadrática, proporcionando uma valiosa oportunidade para explorar mais a fundo sua história, a qual é apresentada de diversas maneiras através de diferentes textos e civilizações. Esse panorama inclui os variados métodos de resolução desenvolvidos por distintos matemáticos.

Dessa forma, torna-se evidente que é possível utilizar a História da Matemática como um suporte para o estudo da disciplina, especialmente no caso da equação quadrática. Isso implica concentrar-se nos seus aspectos geométricos e algébricos, levando em consideração o seu desenvolvimento histórico e as contribuições deixadas por diversos povos em épocas diversas.

Por fim, com esse trabalho eu consegui responder à pergunta norteadora descrita na introdução, através dos estudos feitos. Consegui perceber que a história das equações do segundo grau é importante para o entendimento de como chegamos as diversas fórmulas que temos hoje. Cada matemático ou pensador descrito aqui apresentou uma ideia de resolução que contribuiu para evolução das equações do segundo grau e também da matemática.

Pretendo aplicar esses conhecimentos adquiridos no trabalho para meus alunos em sala de aula, mostrando a evolução das equações do segundo grau, e não só para esse conteúdo, mas também para todos os outros, pois é importante que os alunos saibam de ondem saiu cada coisa e onde podem chegar, através de suas aplicações.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. T. do. **Método de Viète para Resolução de Equações do 2° Grau**. Revista do Professor de Matemática. nº 13. Disponível em http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm. Acesso em 03 de outubro de 2023

ANDRADE, B.C. **A evolução histórica da resolução das equações do 2° grau**. Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2000.

ANDRADE, W.C. **Uma abordagem histórica da equação do 2º grau**. In. Revista do Professor de Matemática, nº43, 2000.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2003.

BOYER, C.B. **História da Matemática**: Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

COELHO, L. C. . **A Organização Familiar no Antigo Egito: um Estudo Através de Fontes do Reino Médio (2040-1640 a.C.).** In: VII Jornada de História Antiga: Vida, Morte e Magia no Mundo Antigo. Rio de Janeiro : Editora da UERJ, 2007. v. 1. p. 97-104.

EUCLIDES, **Os Elementos**. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp. 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FALCÃO, O.G. **Dos Triângulos de Brahmagupta aos Triângulos Aritméticos**. Universidade Federal da Paraiba, 2021.

FERNANDES, T.A. **Fórmulas do tipo Heron.** Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2021.

FREITAS,C.W.A., **Equações Diofantinas**. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2015.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

PEDROSO, H.A. **Uma breve história da equação do 2º grau.** Revista Eletrônica de Matemática. 2010.

RODRIGUES, H.O. e SILVA, J.R. **Fórmula de Bhaskara e resolução de equação do 2º grau inspirados em procedimentos do papiro de Moscou e Rhind**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Pernambuco. 2004.

SILVA,D. N. **Papiro**. Mundo Educação, s.d. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/historiageral/papiro.htm
Acesso em: 08 de dez. 2023.

SILVA, J.B. de A. **Equações de 2º grau: sua história e abordagens didáticas.** Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2018.

SMOLE, K.C. e DINIZ, M.I.S.V. **Matemática – Ensino Médio** – Volume 1 – 1ª série – 5. Ed – São Paulo: Saraiva, 2005.

TEDESCO, M. F. G; OLIVEIRA, J. C. da S; LUZ, B. F. **Teatro e História da Matemática: Uma possibilidade para o ensino de funções e equações do segundo grau.** Revista da Pró-Reitoria de Extensão do IFRS. Dezembro. 2019.