PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES - EFPH
PUC-GO

LAYZA FRANCO DE SOUSA

AVANÇOS E CONCEPÇÕES NO CÁLCULO DE VOLUMES: UMA ANÁLISE HISTÓRICA E DETALHADA DESDE OS PRIMEIROS PRISMAS ATÉ AS INTEGRAIS DUPLAS

GOIÂNIA
2023

LAYZA FRANCO DE SOUSA

Avanços e Concepções no Cálculo de Volumes: Uma Análise Histórica e Detalhada desde os Primeiros Prismas até as Integrais Duplas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura, pelo Curso Matemática da Pontifícia Universidade Católica. Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido Freitas Vaz.

GOIÂNIA

2023

LAYZA FRANCO DE SOUSA

CONCEITO DE VOLUME

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura, pelo Curso Matemática da Pontifícia Universidade Católica. Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido Freitas Vaz.

BANCA EXAMINADORA

____

Componente da Banca Examinadora – Mestre Jordana de Oliveira do Amaral.

____

Componente da Banca Examinadora – Mestre Kliver Moreira.

____

Componente da Banca Examinadora – Mestre Elias Rafael de Sousa.

GOIÂNIA
2023

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa é explorar o conceito de volume de maneira abrangente, tanto do ponto de vista matemático quanto pedagógico. A metodologia utilizada envolveu uma análise crítica das teorias de Davydov e Libâneo, seguida de uma exploração da evolução das fórmulas de volume, desde as simplificações iniciais até as generalizações mais complexas. A pergunta que orientou a pesquisa foi: Como podemos promover uma compreensão mais profunda do conceito de volume e sua relevância por meio de uma abordagem dinâmica de ensino? Os resultados encontrados destacam a importância da adaptação às necessidades dos alunos, o estímulo à curiosidade e autonomia, a interdisciplinaridade e a evolução do pensamento matemático. A contribuição que essa pesquisa procurou atingir foi inspirar educadores, estudantes e pesquisadores a explorar as vastas possibilidades do estudo do volume e da matemática em geral.

Palavras-Chaves: Volume; Conceito de Volume; Cálculo de Volume;

ABSTRACT

The aim of this research is to explore the concept of volume in a comprehensive way, from both a mathematical and pedagogical point of view. The methodology used involved a critical analysis of Davydov and Libâneo's theories, followed by an exploration of the evolution of volume formulas, from initial simplifications to more complex generalizations. The question that guided the research was: How can we promote a deeper understanding of the concept of volume and its relevance through a dynamic teaching approach? The results highlight the importance of adapting to students' needs, stimulating curiosity and autonomy, interdisciplinarity and the evolution of mathematical thinking. The contribution that this research sought to achieve was to inspire educators, students and researchers to explore the vast possibilities of studying volume and mathematics in general.
Keywords: Volume; Volume Concept; Volume Calculation;

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo principal a exploração e análise do conceito de volume ao longo da história da Matemática. O volume é uma medida fundamental que desempenha um papel crucial em várias disciplinas, desde a física até a engenharia, passando pela geometria e muitos outros campos. Para compreender a evolução desse conceito, é essencial mergulhar na história e no desenvolvimento das sociedades humanas, que gradualmente contribuíram para a formação e aprimoramento desse conceito.

Este estudo visa aprofundar a compreensão do conceito de volume, destacando sua relevância em diferentes campos do conhecimento e sua evolução ao longo da história da Matemática. O volume não é apenas uma medida fundamental, mas também uma ferramenta essencial para a resolução de problemas práticos e teóricos em diversas áreas. Desde a determinação da capacidade de recipientes até o cálculo de áreas de superfícies complexas, o conceito de volume desempenha um papel fundamental na solução de desafios científicos e tecnológicos. A análise histórica desse conceito permite não apenas compreender sua importância, mas também reconhecer as contribuições de diferentes civilizações e pensadores ao longo dos séculos.

Ao mergulhar na trajetória da evolução do conceito de volume, este trabalho busca contextualizar como sociedades antigas, como a Babilônia e o Egito, desenvolveram técnicas iniciais de medição de volumes para fins práticos, como a agricultura e o comércio. Além disso, explora-se a influência da Grécia Antiga na formalização da Matemática, que permitiu a abordagem mais abstrata do volume como um conceito matemático puro. Posteriormente, a pesquisa investiga o impacto da revolução do cálculo diferencial e integral nos séculos XVII, demonstrando como essa revolução matemática ampliou as possibilidades de cálculo de volumes de formas complexas e contribuiu para o avanço da ciência em geral. Essa análise histórica é fundamental para apreciar como a Matemática e o conceito de volume se entrelaçaram ao longo dos tempos, moldando o nosso entendimento e abrindo portas para inovações tecnológicas e científicas futuras.

Nesse sentido, o problema central desta pesquisa é compreender como o conceito de volume foi desenvolvido ao longo da história da humanidade, desde suas origens em sociedades primitivas até sua formalização na matemática grega e sua subsequente expansão através do cálculo diferencial e integral nos tempos modernos. Ademais, busca-se identificar os principais avanços e as contribuições de diferentes civilizações para a compreensão e aplicação do conceito de volume.

Desta feita, o objetivo geral deste estudo é investigar a evolução do conceito de volume ao longo da história da matemática e das civilizações humanas, destacando as principais contribuições e marcos históricos que moldaram esse conceito.

Para atingir o objetivo geral, especificamente, pretende-se:

1. Analisar a importância da medida de volume nas sociedades primitivas e sua relação com as necessidades humanas iniciais.
2. Investigar o desenvolvimento do conceito de volume nas civilizações antigas, com ênfase nas contribuições da Babilônia e do Egito.
3. Explorar a revolução matemática na Grécia Antiga, destacando a obra "Os Elementos" de Euclides e sua influência na formalização da geometria e do cálculo de áreas e volumes.
4. Examinar o papel da sociedade romana na preservação e disseminação do conhecimento matemático.
5. Investigar a revolução do cálculo diferencial e integral nos séculos XVII, com ênfase nas contribuições de Leibniz e Newton para o cálculo de volumes de figuras complexas.
6. Demonstrar a importância da uniformização das unidades de medida no comércio internacional e sua influência na ciência matemática.

Esta pesquisa é relevante porque permite compreender não apenas a evolução do conceito de volume, mas também como a Matemática se desenvolveu ao longo da história, influenciada por diferentes contextos culturais e sociais. Também, o estudo contribui para a apreciação da importância do volume em diversas áreas do conhecimento, incluindo a ciência e a engenharia, ao fornecer uma base histórica sólida para o entendimento desse conceito fundamental.

A metodologia utilizada neste estudo consiste principalmente em uma revisão bibliográfica de abordagem qualitativa. Realizou-se uma pesquisa extensa em fontes primárias e secundárias, incluindo livros, artigos acadêmicos e documentos históricos. A análise qualitativa dessas fontes permitirá traçar a evolução do conceito de volume ao longo do tempo e destacar as contribuições específicas de diferentes culturas e períodos históricos. A abordagem qualitativa também possibilita uma compreensão mais profunda dos contextos sociais e culturais em que o conceito de volume se desenvolveu, enriquecendo assim a pesquisa.

2 CAPÍTULO I: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

2.1 SÍNTESE HISTÓRICA

A história da matemática é um mosaico de descobertas, intuições e erros que remonta a civilizações antigas, cada uma delas contribuindo com sua própria perspectiva e abordagem. Entre as culturas que desempenharam papéis fundamentais nesse desenvolvimento destacam-se a babilônica, egípcia e grega. Cada uma delas deixou sua marca na geometria e na mensuração de volumes, lançando as bases para o que hoje entendemos como matemática. Essas civilizações não apenas desenvolveram uma compreensão teórica da geometria e do cálculo de volumes, mas também aplicaram esses conhecimentos de maneira prática, moldados pelas necessidades imediatas de suas sociedades (BOYER; MERZBACH, 2019).

A Grécia Antiga, em particular, desempenhou um papel significativo na convergência entre abstração matemática e necessidades práticas relacionadas ao volume. Problemas cotidianos, como a construção de estruturas monumentais e questões filosóficas, geraram questionamentos sobre como medir o espaço ocupado por diferentes formas. Matemáticos notáveis, como Eudoxo e Arquimedes, desempenharam um papel fundamental na busca por respostas para essas questões (BOYER; MERZBACH, 2019).

Arquimedes, um matemático grego nascido por volta de 287 a.C. em Siracusa, Sicília, é considerado um dos maiores matemáticos da Antiguidade e de todos os tempos. Seu legado vai além das contribuições puramente teóricas, pois ele também se destacou por sua engenhosidade prática. Seu contexto de educação e influências inclui seu pai, um astrônomo, e sua associação com o rei Hierão de Siracusa. Além disso, há indícios de que ele tenha passado algum tempo no Egito, possivelmente interagindo com outros matemáticos notáveis da época, como Cônon, Dositeo e Eratóstenes (BOYER; MERZBACH, 2019; ROQUE, 2012).

Uma das contribuições mais notáveis de Arquimedes à matemática e à ciência é o "Princípio de Arquimedes", que estabelece que um corpo imerso em um fluido recebe um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado. Esta ideia surgiu quando Arquimedes estava tomando banho e observou como a água se deslocava quando ele entrava na banheira, o que levou à sua famosa exclamação "Eureka!" (BOYER; MERZBACH, 2019; ROQUE, 2012).

O cálculo de volumes na Grécia Antiga não se limitou a uma atividade acadêmica; foi um exercício que uniu abstração matemática e aplicação prática. A solução de problemas do cotidiano, como medir a capacidade de recipientes ou calcular volumes de sólidos, exigiu uma abordagem sistemática e rigorosa. Foi nesse contexto que Arquimedes se destacou, desenvolvendo técnicas inovadoras para calcular volumes de figuras geométricas complexas, como a esfera e o cilindro (BOYER; MERZBACH, 2019).

Além de suas contribuições ao cálculo de volumes, Arquimedes também demonstrou sua engenhosidade na construção de máquinas de guerra durante o cerco de Siracusa pelos romanos. Ele projetou e implementou dispositivos como catapultas móveis e guindastes para afundar navios inimigos que se aproximavam das muralhas da cidade. Embora a autenticidade da história envolvendo o uso de espelhos para concentrar a luz solar e incendiar navios inimigos seja debatida, a criatividade e a habilidade prática de Arquimedes são inegáveis (BOYER; MERZBACH, 2019; EVES, 2011).

Portanto, a contribuição de Arquimedes para a matemática e a ciência vai além de suas descobertas teóricas; ela se estende à aplicação prática de princípios matemáticos em situações do mundo real. Seu trabalho, permeado pela curiosidade e pela busca incessante por soluções, ressoa através dos séculos como um exemplo da interseção entre a matemática abstrata e a vida cotidiana (ROQUE, 2012).

A história da matemática é enriquecida pelas contribuições de culturas antigas como a grega, que souberam unir a abstração matemática à resolução de problemas práticos relacionados ao volume. Arquimedes, com sua inteligência e engenhosidade, não apenas avançou a teoria matemática, mas também aplicou seus conhecimentos de maneira prática, deixando um legado duradouro que continua a inspirar estudiosos e cientistas até os dias de hoje (BOYER; MERZBACH, 2019; EVES, 2011).

A história de Arquimedes, o renomado matemático grego nascido por volta de 287 a.C. em Siracusa, Sicília, é marcado por contribuições notáveis não apenas para a matemática, mas também para a ciência e a engenharia. Uma das histórias icônicas associadas a ele é a do ourives suspeito de adulterar uma coroa de ouro para o rei Hierão. Suspeitando da presença de prata na coroa, o rei desafiou Arquimedes a resolver o problema sem danificar a joia. Foi nesse contexto que Arquimedes teve seu famoso momento "Eureka!", quando descobriu a primeira lei da hidrostática, que relaciona o empuxo a um corpo imerso em um fluido ao seu volume. Com essa descoberta, ele percebeu que poderia determinar se a coroa continha prata comparando seu volume com o de uma quantidade equivalente de ouro puro (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Arquimedes não apenas brilhou na resolução de problemas práticos, mas também fez contribuições significativas no campo da geometria. Em seu tratado "A Medida de um Círculo", ele desenvolveu um método inovador para calcular o valor de π usando uma abordagem com polígonos regulares, o que não apenas aproximou o valor de π, mas também demonstrou a capacidade de Arquimedes de utilizar métodos geométricos para abordar questões matemáticas complexas (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Ademais, Arquimedes explorou profundamente a geometria espacial em seus trabalhos "Sobre a Esfera e o Cilindro" e "Sobre Cones e Esferoides". Nesses tratados, ele investigou propriedades de esferas, cilindros e sólidos de revolução. Ele não apenas estabeleceu relações entre os volumes dessas figuras, mas também determinou com precisão as áreas de superfícies esféricas e calotas esféricas. Essas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento subsequente da matemática e da física (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Uma das obras mais destacadas de Arquimedes, "Sobre a Esfera e o Cilindro", consiste em dois livros que contêm um total de 53 proposições. Nessa obra, ele apresenta um teorema que fornece as áreas de uma esfera e de uma calota esférica. Ele estabelece que a área de uma superfície esférica é precisamente dois terços da área da superfície total de um cilindro circular reto que a circunscreve. Também, Arquimedes demonstra que o volume da esfera equivale a exatos dois terços do volume desse cilindro. Esses resultados revelaram a profundidade de seu conhecimento geométrico e seu domínio sobre o cálculo de volumes e áreas de figuras tridimensionais (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

No segundo livro de "Sobre a Esfera e o Cilindro", Arquimedes aborda o problema de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois segmentos esféricos cujos volumes estejam em uma proporção predefinida. A solução desse problema envolve uma equação cúbica, cuja solução não se encontra no texto original, mas foi posteriormente descoberta por Eutócio em um fragmento euclidiano. Esse tratado também conduz a uma discussão sobre as condições nas quais esta equação cúbica pode possuir uma raiz real positiva, demonstrando a profundidade da investigação geométrica de Arquimedes (EVES, 2011).

A contribuição de Arquimedes para o cálculo de volume e área teve um impacto profundo no desenvolvimento subsequente da matemática e da física. Suas descobertas influenciaram significativamente o cálculo integral, que seria aperfeiçoado muitos séculos depois por matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Sua genialidade e criatividade em abordar questões geométricas e matemáticas transcendem as fronteiras do tempo, sendo reconhecidas e admiradas por matemáticos e cientistas em todo o mundo (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

A história de Arquimedes, o renomado matemático grego nascido por volta de 287 a.C. em Siracusa, Sicília, é marcada por contribuições notáveis não apenas para a matemática, mas também para a ciência e a engenharia. Uma das histórias icônicas associadas a ele é a do ourives suspeito de adulterar uma coroa de ouro para o rei Hierão. Suspeitando da presença de prata na coroa, o rei desafiou Arquimedes a resolver o problema sem danificar a joia. Foi nesse contexto que Arquimedes teve seu famoso momento "Eureka!", quando descobriu a primeira lei da hidrostática, que relaciona o empuxo a um corpo imerso em um fluido ao seu volume. Com essa descoberta, ele percebeu que poderia determinar se a coroa continha prata comparando seu volume com o de uma quantidade equivalente de ouro puro (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Arquimedes não apenas brilhou na resolução de problemas práticos, mas também fez contribuições significativas no campo da geometria. Em seu tratado "A Medida de um Círculo", ele desenvolveu um método inovador para calcular o valor de π usando uma abordagem com polígonos regulares, o que não apenas aproximou o valor de π, mas também demonstrou a capacidade de Arquimedes de utilizar métodos geométricos para abordar questões matemáticas complexas (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Além disso, Arquimedes explorou profundamente a geometria espacial em seus trabalhos "Sobre a Esfera e o Cilindro" e "Sobre Cones e Esferoides". Nesses tratados, ele investigou propriedades de esferas, cilindros e sólidos de revolução. Ele não apenas estabeleceu relações entre os volumes dessas figuras, mas também determinou com precisão as áreas de superfícies esféricas e calotas esféricas. Essas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento subsequente da matemática e da física (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Uma das obras mais destacadas de Arquimedes, "Sobre a Esfera e o Cilindro", consiste em dois livros que contêm um total de 53 proposições. Nessa obra, ele apresenta um teorema que fornece as áreas de uma esfera e de uma calota esférica. Ele estabelece que a área de uma superfície esférica é precisamente dois terços da área da superfície total de um cilindro circular reto que a circunscreve. Ademais, Arquimedes demonstra que o volume da esfera equivale a exatos dois terços do volume desse cilindro. Esses resultados revelaram a profundidade de seu conhecimento geométrico e seu domínio sobre o cálculo de volumes e áreas de figuras tridimensionais (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

No segundo livro de "Sobre a Esfera e o Cilindro", Arquimedes aborda o problema de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois segmentos esféricos cujos volumes estejam em uma proporção predefinida. A solução desse problema envolve uma equação cúbica, cuja solução não se encontra no texto original, mas foi posteriormente descoberta por Eutócio em um fragmento euclidiano. Esse tratado também conduz a uma discussão sobre as condições nas quais esta equação cúbica pode possuir uma raiz real positiva, demonstrando a profundidade da investigação geométrica de Arquimedes (EVES, 2011).

A contribuição de Arquimedes para o cálculo de volume e área teve um impacto profundo no desenvolvimento subsequente da matemática e da física. Suas descobertas influenciaram significativamente o cálculo integral, que seria aperfeiçoado muitos séculos depois por matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Sua genialidade e criatividade em abordar questões geométricas e matemáticas transcendem as fronteiras do tempo, sendo reconhecidas e admiradas por matemáticos e cientistas em todo o mundo (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

A história de Arquimedes, o renomado matemático grego nascido por volta de 287 a.C. em Siracusa, Sicília, é marcada por contribuições notáveis não apenas para a matemática, mas também para a ciência e a engenharia. Uma das histórias icônicas associadas a ele é a do ourives suspeito de adulterar uma coroa de ouro para o rei Hierão. Suspeitando da presença de prata na coroa, o rei desafiou Arquimedes a resolver o problema sem danificar a joia. Foi nesse contexto que Arquimedes teve seu famoso momento "Eureka!", quando descobriu a primeira lei da hidrostática, que relaciona o empuxo a um corpo imerso em um fluido ao seu volume. Com essa descoberta, ele percebeu que poderia determinar se a coroa continha prata comparando seu volume com o de uma quantidade equivalente de ouro puro (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

Arquimedes não apenas brilhou na resolução de problemas práticos, mas também fez contribuições significativas no campo da geometria. Em seu tratado "A Medida de um Círculo", ele desenvolveu um método inovador para calcular o valor de π usando uma abordagem com polígonos regulares, o que não apenas aproximou o valor de π, mas também demonstrou a capacidade de Arquimedes de utilizar métodos geométricos para abordar questões matemáticas complexas (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

Outrossim, Arquimedes explorou profundamente a geometria espacial em seus trabalhos "Sobre a Esfera e o Cilindro" e "Sobre Cones e Esferoides". Nesses tratados, ele investigou propriedades de esferas, cilindros e sólidos de revolução. Ele não apenas estabeleceu relações entre os volumes dessas figuras, mas também determinou com precisão as áreas de superfícies esféricas e calotas esféricas. Essas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento subsequente da matemática e da física (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

Uma das obras mais destacadas de Arquimedes, "Sobre a Esfera e o Cilindro", consiste em dois livros que contêm um total de 53 proposições. Nessa obra, ele apresenta um teorema que fornece as áreas de uma esfera e de uma calota esférica. Ele estabelece que a área de uma superfície esférica é precisamente dois terços da área da superfície total de um cilindro circular reto que a circunscreve. Além disso, Arquimedes demonstra que o volume da esfera equivale a exatos dois terços do volume desse cilindro. Esses resultados revelaram a profundidade de seu conhecimento geométrico e seu domínio sobre o cálculo de volumes e áreas de figuras tridimensionais (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

No segundo livro de "Sobre a Esfera e o Cilindro", Arquimedes aborda o problema de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois segmentos esféricos cujos volumes estejam em uma proporção predefinida. A solução desse problema envolve uma equação cúbica, cuja solução não se encontra no texto original, mas foi posteriormente descoberta por Eutócio em um fragmento euclidiano. Esse tratado também conduz a uma discussão sobre as condições nas quais esta equação cúbica pode possuir uma raiz real positiva, demonstrando a profundidade da investigação geométrica de Arquimedes (EVES, 2011).

A contribuição de Arquimedes para o cálculo de volume e área teve um impacto profundo no desenvolvimento subsequente da matemática e da física. Suas descobertas influenciaram significativamente o cálculo integral, que seria aperfeiçoado muitos séculos depois por matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Sua genialidade e criatividade em abordar questões geométricas e matemáticas transcendem as fronteiras do tempo, sendo reconhecidas e admiradas por matemáticos e cientistas em todo o mundo (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

Assim como Arquimedes, Eudoxo teve uma contribuição significativa para o estudo dos volumes. Eudoxo de Cnido (c. 408-355 a.C.) foi um dos mais importantes matemáticos da Grécia Antiga e é mais conhecido por seu trabalho na teoria das proporções e no cálculo de volumes. Embora muitos dos detalhes específicos de sua vida e obras tenham se perdido com o tempo, sabe-se que ele teve uma profunda influência no campo da matemática e foi uma figura central na história do desenvolvimento do cálculo de volumes, particularmente de sólidos de revolução (EVES, 2011).

A metodologia de Eudoxo para o cálculo de volumes é conhecida como o "Método da Exaustão". Este método envolve o encapsulamento de uma forma dentro de uma série de polígonos (ou poliedros) que se aproximam cada vez mais da forma desejada. À medida que o número de lados do polígono aumenta, o volume do polígono se aproxima cada vez mais do volume do sólido original. Ao levar isso ao infinito, podemos determinar o volume da forma em questão. Por exemplo, para calcular o volume de um cone ou de uma pirâmide, Eudoxo imaginava que essas formas eram feitas de uma série infinita de fatias extremamente finas (ou discos), que ao somar os volumes de todas essas fatias, ele determinaria o volume total da forma. Este método foi fundamental para o desenvolvimento posterior do cálculo integral (EVES, 2011).

No contexto da "História da Matemática", Eudoxo também é frequentemente citado por sua colaboração com Platão. Na academia de Platão, ele desenvolveu sua teoria das proporções, que foi uma tentativa de fundamentar de forma rigorosa os números irracionais. Este trabalho foi crucial para garantir a integridade da matemática grega, pois os números irracionais eram um ponto de descontentamento e confusão. Os sistemas de planetários homocêntricos de Eudoxo também desempenharam um papel importante na tentativa de explicar os movimentos aparentemente irracionais dos planetas no céu. Embora seu sistema tenha sido posteriormente substituído pelo sistema heliocêntrico de Copérnico, a abordagem de Eudoxo foi um passo importante na tentativa de modelar o universo usando princípios matemáticos (EVES, 2011).

Eudoxo de Cnido não apenas contribuiu significativamente para o campo do cálculo de volumes com seu Método da Exaustão, mas também estabeleceu bases para muitos dos conceitos fundamentais em matemática e astronomia. Seu trabalho influenciou gerações de matemáticos, incluindo Euclides, que incorporou a teoria das proporções de Eudoxo em seus "Elementos". O legado de Eudoxo na história da matemática é uma prova do profundo impacto que sua abordagem inovadora teve na evolução da disciplina (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

No Antigo Egito, uma civilização conhecida por suas realizações na arquitetura e engenharia, também desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da matemática, especialmente no que diz respeito ao cálculo de volumes. A construção de estruturas monumentais como as pirâmides de Gizé exigia um profundo entendimento da geometria e do cálculo de volumes, algo que os egípcios possuíam. Embora suas técnicas fossem fundamentadas mais em práticas empíricas do que em teorias abstratas, eram notavelmente eficazes ((EVES, 2011; BOYER; MERZBACH).

A arquitetura egípcia, incluindo as pirâmides, é um testemunho da aplicação prática dos conceitos matemáticos na construção de estruturas impressionantes. Os egípcios desenvolveram métodos para medir áreas e volumes, que eram essenciais para o planejamento e construção de suas monumentais estruturas. Suas técnicas envolviam o uso de réguas e cordas para determinar comprimentos e ângulos, bem como o cálculo de áreas de formas geométricas simples, como quadrados e retângulos (EVES, 2011; ROQUE, 2012).

Também, os egípcios tinham um sistema numérico que incluía frações unitárias, o que lhes permitia lidar com medidas fracionárias, algo importante no cálculo de volumes de objetos não completamente regulares. Suas habilidades matemáticas eram uma combinação de conhecimento prático e técnicas geométricas que se desenvolveram ao longo do tempo. Essa abordagem empírica e prática da matemática foi essencial para a realização de suas notáveis construções (EVES, 2011; ROQUE, 2012).

A história da matemática é marcada por contribuições notáveis de diferentes civilizações ao longo do tempo. Duas dessas civilizações, o Antigo Egito e a Babilônia, fizeram contribuições significativas para o cálculo de volumes, cada uma com suas abordagens distintas e notáveis.

As pirâmides do Antigo Egito são um dos exemplos mais marcantes da aplicação do cálculo de volume na engenharia e na arquitetura. Planejar e construir uma pirâmide exigia não apenas a habilidade de calcular o volume de grandes estruturas, mas também a capacidade de dividir esses volumes em blocos menores que poderiam ser manipulados com mais facilidade. Os egípcios frequentemente simplificavam o design das pirâmides em componentes mais gerenciáveis, como prismas triangulares e paralelepípedos. Ao somar os volumes das formas menores, eles podiam estimar o volume total da estrutura. Essa abordagem é uma técnica primitiva, mas eficaz, que se assemelha ao que mais tarde seria formalizado como integração no cálculo (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Além da construção de pirâmides, o cálculo de volume tinha outras aplicações práticas na sociedade egípcia. O Egito era uma sociedade agrária, e a medição precisa de terras era crucial para questões como impostos e irrigação. Nesse contexto, o conceito de volume também desempenhava um papel fundamental, especialmente quando se tratava de armazenar e distribuir recursos como grãos e água. Os egípcios desenvolveram métodos para medir áreas e volumes, que eram essenciais para o planejamento e gerenciamento de suas atividades agrícolas (EVES, 2011).

É notável que, apesar da falta de uma estrutura teórica formal, os egípcios tinham métodos eficazes para lidar com problemas complexos de volume. Um exemplo interessante é a fórmula correta encontrada no Papiro de Moscou para calcular o volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas. Essa fórmula demonstra uma precisão surpreendente da matemática egípcia, que continua a ser estudada e apreciada até hoje (EVES, 2011).

Por último, vale ressaltar que a matemática no Antigo Egito não era uma atividade acadêmica isolada, mas estava integrada em várias áreas da vida cotidiana e era transmitida principalmente através da prática. Embora carecessem da abordagem teórica e abstrata que caracterizaria a matemática grega subsequente, os egípcios eram mestres na aplicação prática de seus conhecimentos matemáticos (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Na Babilônia, outra civilização antiga notável, vemos uma evolução notável no cálculo de volume, que se distingue das abordagens mais práticas do Egito e das considerações teóricas da Grécia. Os babilônios, que floresceram entre 2000 a.C. e 1600 a.C., adotaram uma abordagem particularmente algébrica para a geometria e o cálculo de volumes, estabelecendo um marco significativo na história da matemática (EVES, 2011).

Os babilônios demonstraram um alto nível de sofisticação matemática ao lidar com conceitos complexos como o teorema de Pitágoras e a proporcionalidade em triângulos retângulos. Eles aplicavam esses princípios em situações práticas e desenvolviam métodos algébricos para resolver problemas geométricos, incluindo a determinação do volume de diferentes formas. Essa abordagem algébrica é um exemplo da capacidade dos babilônios de aplicar conceitos matemáticos em contextos do mundo real (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Uma das contribuições notáveis dos babilônios foi a divisão da circunferência em 360 partes, uma medida que teve impactos duradouros não apenas na matemática, mas também na astronomia e na medição do tempo. A descoberta de uma tabuleta babilônica que introduz uma equação cúbica em discussões sobre volumes de troncos de pirâmide destaca o nível de sofisticação alcançado na matemática babilônica (EVES, 2011).

Ademais, os babilônios dominavam relações em triângulos retângulos semelhantes e compreendiam a proporção entre os lados correspondentes. Eles sabiam que a base de um triângulo isósceles era dividida ao meio por sua altura e que ângulos inscritos em semicircunferências eram retos. Essas descobertas matemáticas indicam a profundidade de seu conhecimento geométrico e algébrico (EVES, 2011).

A história do cálculo de volume no Antigo Egito e na Babilônia ilustra como diferentes civilizações antigas desenvolveram abordagens únicas para resolver problemas matemáticos e aplicá-los em contextos práticos. Enquanto os egípcios se destacaram na aplicação prática de conceitos de volume na construção de monumentos como as pirâmides, os babilônios demonstraram uma abordagem algébrica mais sofisticada para resolver problemas geométricos e calcular volumes.

Essas contribuições notáveis dessas civilizações enriquecem a história da matemática, destacando a diversidade de abordagens matemáticas ao longo do tempo e seu impacto duradouro. Elas também servem como um lembrete de que a matemática, em suas várias formas, desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da civilização humana (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

A matemática babilônica e egípcia são duas das mais antigas tradições matemáticas conhecidas na história da humanidade. Elas fizeram contribuições significativas para o desenvolvimento da matemática, cada uma com suas abordagens únicas e notáveis.

A matemática babilônica, que floresceu entre 2000 a.C. e 1600 a.C., é conhecida por sua abordagem algébrica para resolver problemas geométricos, incluindo a determinação do volume de diferentes formas. Uma descoberta notável é uma tábua que introduz uma equação cúbica na discussão sobre volumes de troncos de pirâmide, demonstrando a sofisticação matemática alcançada pelos babilônios, que utilizaram equações algébricas, resultando em equações quadráticas ou sistemas de equações para abordar problemas geométricos complexos (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Outra conquista notável dos babilônios foi a compreensão do teorema de Pitágoras. Eles aplicaram esse teorema em situações práticas, demonstrando seu alto nível de conhecimento matemático. A habilidade de resolver problemas geométricos usando métodos algébricos distinguiu a geometria babilônica de outras tradições matemáticas antigas (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

A matemática babilônica também influenciou a astronomia e a medição do tempo. Eles dividiram a circunferência em 360 partes, uma medida que se tornou fundamental na astronomia babilônica e na medição do tempo. Essa divisão da circunferência, conhecida como graus, tinha uma ligação direta com a "milha babilônica", uma unidade de medida que evoluiu para medir o tempo. A milha-tempo era usada para medir intervalos de tempo e era composta por 12 partes, correspondendo às 12 milhas-tempo de um dia. A subdivisão da milha-tempo em 30 partes resultou em um sistema de 360 partes para um ciclo completo, que ainda é usado hoje para medir ângulos (EVES, 2011).

A matemática egípcia também fez contribuições significativas, principalmente em relação à aplicação prática de conceitos matemáticos no cotidiano. Os egípcios eram uma sociedade agrária, e a medição precisa de terras era crucial para questões como impostos e irrigação. Nesse contexto, o cálculo de volume desempenhava um papel fundamental. Os egípcios desenvolveram métodos para medir áreas e volumes, que eram essenciais para o planejamento e gerenciamento de suas atividades agrícolas (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

As pirâmides do Antigo Egito são um exemplo marcante da aplicação do cálculo de volume na engenharia e arquitetura. Planejar e construir uma pirâmide exigia não apenas a habilidade de calcular o volume de grandes estruturas, mas também a capacidade de dividir esses volumes em blocos menores que poderiam ser manipulados com mais facilidade. Os egípcios frequentemente simplificavam o design das pirâmides em componentes mais gerenciáveis, como prismas triangulares e paralelepípedos, e somavam os volumes das formas menores para estimar o volume total da estrutura. Essa técnica rudimentar se assemelha ao conceito de integração no cálculo (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Os egípcios também desenvolveram métodos para medir áreas de terras e volumes de grãos, que eram essenciais para a agricultura e a economia. No entanto, eles cometeram alguns equívocos matemáticos, como a crença errônea de que a área de um círculo correspondia à de um quadrado com um lado igual a 8/9 do diâmetro. Apesar desses equívocos, eles compreenderam corretamente conceitos como a área de um triângulo, que era metade do produto da base pela altura (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Além disso, os papiros Moscou e Rhind, documentos matemáticos egípcios, continham problemas matemáticos, incluindo questões geométricas. Muitos desses problemas derivavam de fórmulas de mensuração utilizadas para calcular áreas de terras e volumes de grãos. Os egípcios, embora não tenham evidências documentais que comprovem seu conhecimento do teorema de Pitágoras, demonstraram habilidades matemáticas notáveis na resolução de problemas práticos cotidianos (EVES, 2011).

A matemática babilônica e egípcia, cada uma em sua abordagem única, desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da matemática antiga. Enquanto os babilônios adotaram métodos algébricos e compreenderam o teorema de Pitágoras, os egípcios se destacaram na aplicação prática de conceitos matemáticos no cotidiano, principalmente na agricultura e na construção de monumentos como as pirâmides. Ambas as tradições matemáticas enriqueceram a história da matemática e deixaram um legado duradouro (EVES, 2011; BOYER; MERZBACH, 2019).

Eves (2011) ainda cita que dentro do papiro Moscou existia a fórmula correta para calcular o volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas Esta exceção é única na matemática oriental antiga e é objeto de muita especulação e foi referida por E. T. Bell como "a maior pirâmide do Egito".

Apesar de os babilônios e os egípcios terem suas limitações e cometerem erros, suas sementes deram frutos para os desenvolvimentos matemáticos posteriores, incluindo a geometria da Grécia Antiga e outros. Elas servem como um lembrete poderoso de que a matemática é tanto uma construção cultural quanto uma ciência exata, que continua evoluindo através das eras, impulsionada pelas necessidades, curiosidades e descobertas de cada geração.

Ambas as culturas mostram que a busca pelo entendimento geométrico e pelo cálculo de volumes não era apenas um exercício intelectual, mas também uma necessidade prática. Seja para calcular impostos sobre terras, projetar estruturas monumentais ou entender os movimentos celestes, a matemática dessas culturas antigas era profundamente enraizada em seus contextos sociais e culturais.

2.2 SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDA (SI)

A necessidade de medição é uma característica intrínseca à humanidade, presente em praticamente todas as atividades do cotidiano. Historicamente, diferentes culturas desenvolveram seus próprios sistemas de medidas, muitas vezes baseados em partes do corpo humano, como o cúbito, a braça, a jarda e o pé. Essas medidas antropomórficas eram amplamente aceitas, fornecendo uma maneira acessível de obter medições compreensíveis para qualquer pessoa (BOYER; MERZBACH, 2019; ROQUE, 2012).

No entanto, essa diversidade de sistemas de medidas regionais começou a apresentar desafios significativos. Devido às diferenças individuais nas dimensões do corpo humano, surgiram inconsistências e desigualdades nas transações comerciais e nas atividades cotidianas. Portanto, a necessidade de um sistema de medidas mais consistente e universal tornou-se evidente. Essa evolução não apenas buscou a praticidade, mas também estabelecer padrões comuns que transcenderiam as diferenças individuais, proporcionando uma base sólida para as atividades diárias (BOYER; MERZBACH, 2019).

Até o final do século XVIII, as unidades de medida eram estabelecidas por soberanos de países, frequentemente usando como referência partes do corpo humano ou objetos do dia a dia. Essas medidas eram predominantemente regionais e variavam consideravelmente de uma localidade para outra, tornando complicadas as transações comerciais e a comunicação entre diferentes regiões (BOYER; MERZBACH, 2019).

A introdução e a adoção generalizada do Sistema Internacional de Unidades (SI) representaram um marco significativo na evolução dos sistemas de medidas. O SI é um sistema internacionalmente reconhecido que fornece uma base uniforme para uma ampla gama de grandezas físicas, incluindo comprimento, massa e tempo, criando uma estrutura coerente para as fórmulas matemáticas relacionadas ao volume e a outras grandezas (DAMBROSIO, 2009; OLIVEIRA; FRAGOSO, 2011).

O uso padronizado de unidades como o metro cúbico (m^3) para o volume, que representa o volume de um cubo com arestas de um metro, simplificou e unificou os cálculos em diversas disciplinas. Essa uniformidade das unidades oferece uma base sólida para a resolução de problemas, permitindo que os resultados sejam interpretados de maneira consistente em campos variados do conhecimento (BOYER; MERZBACH, 2019; ROQUE, 2012).

Ademais, a coerência do SI facilita a comunicação internacional e a colaboração entre pesquisadores, engenheiros e cientistas em todo o mundo. Ao adotar um sistema comum de medidas, as barreiras linguísticas e culturais são eliminadas, promovendo a compreensão mútua e o avanço do conhecimento (DAMBROSIO, 2009; OLIVEIRA; FRAGOSO, 2011).

A adoção do SI também trouxe benefícios práticos, especialmente em campos como a matemática, a física e a engenharia. Agora, os profissionais dessas áreas podem realizar cálculos e experimentos com base em unidades consistentes e precisas, garantindo resultados confiáveis, o que é fundamental para o progresso científico e tecnológico, uma vez que erros de medição podem levar a conclusões equivocadas e impactar negativamente o desenvolvimento de novas teorias e tecnologias (BOYER; MERZBACH, 2019; ROQUE, 2012).

Também, o SI é adaptável e pode abranger novas descobertas científicas e avanços tecnológicos. Ele fornece uma estrutura sólida que permite a incorporação de unidades adicionais à medida que a ciência avança, garantindo o sistema de medidas continue relevante e preciso ao longo do tempo (BOYER; MERZBACH, 2019).

3 CAPÍTULO II: O NÚCLEO DO CONCEITO DE CÁLCULO DE VOLUME

No ensino da matemática, é essencial que os professores planejem suas atividades pedagógicas com base no núcleo conceitual central, o elemento-chave que representa a essência do conceito a ser transmitido aos alunos. Além disso, é fundamental apresentar aos estudantes um problema gerador que permita a compreensão e a exploração desse conceito. No contexto do cálculo de volume, o núcleo conceitual fundamental é a unidade cúbica de volume, atualmente representada pelo metro cúbico (m^3) e seus múltiplos e submúltiplos, de acordo com o Sistema Internacional de Medidas (SI) (BEZERRA, 2014).

A escolha desse núcleo conceitual não é arbitrária; pelo contrário, é central para a compreensão do cálculo de volume. A unidade cúbica de volume é o conceito mais geral nessa área, pois a partir dela é possível calcular o volume de uma ampla variedade de sólidos geométricos, significando que todos os outros volumes podem ser obtidos a partir dessa unidade básica, estabelecendo uma base sólida para o ensino e a aprendizagem do cálculo de volume (BEZERRA, 2014).

Além de ser fundamental para o entendimento dos volumes de sólidos geométricos, a unidade cúbica de volume também abre caminho para a compreensão de conceitos mais avançados, como a integral. Embora não seja possível explorar a integral em detalhes no contexto do ensino básico, é importante apresentar aos alunos uma introdução a esse conceito, mostrando como ele está relacionado ao cálculo de volumes de sólidos irregulares, como volumes limitados sob o gráfico de uma superfície (BEZERRA, 2014).

A abordagem do ensino, conforme orientada por Davydov (1988), deve permitir que os alunos percorram o mesmo caminho lógico-histórico que os cientistas percorreram ao determinar o objeto (conceito), o que implica dizer que os estudantes devem se apropriar dos modos de pensar que foram refinados ao longo da história da humanidade. Esse movimento proporciona aos alunos não apenas uma compreensão superficial do conceito, mas também a capacidade de captar a cultura humana de maneira mais profunda, compreendendo os motivos por trás da criação e da permanência dos conceitos nos contextos culturais e sociais (DAVYDOV, 1988).

Para atingir esse objetivo, é crucial que os professores considerem o método da ciência particular ao desenvolver experiências didáticas. No caso do ensino da matemática, é necessário levar em conta a estrutura lógico-formal da disciplina, uma vez que a matemática é, essencialmente, uma ciência do formalismo, importando que os alunos não devem apenas aprender fórmulas, mas compreender como essas fórmulas foram deduzidas logicamente. A dedução lógica desempenha um papel fundamental na matemática e é a parte criativa e reveladora dos modos de pensar matemáticos (DAVYDOV, 1988).

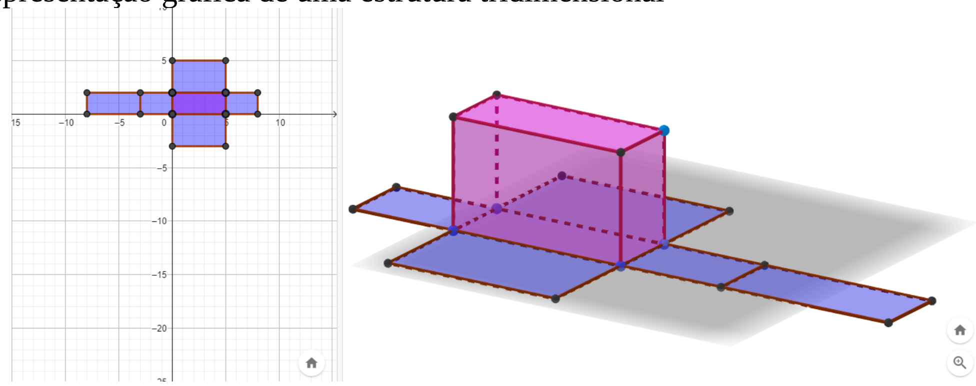
A compreensão dos nexos internos entre o objeto matemático e os contextos sociais é fundamental para o ensino de conceitos científicos. Os conceitos científicos não devem ser ensinados apenas como conhecimento empírico superficial, mas sim como compreensões mais profundas das relações internas dos objetos. Essa abordagem permite que os alunos vejam a matemática não apenas como um conjunto de fórmulas abstratas, mas como uma disciplina que tem aplicações significativas na sociedade e na cultura (DAVYDOV, 1988).

Portanto, o ensino do cálculo de volume deve ser fundamentado no conhecimento científico, indo além do conhecimento empírico superficial, o que envolve revelar aos alunos não apenas as fórmulas e procedimentos, mas também os motivos que levaram à criação dessas fórmulas e sua relevância nos contextos sociais e culturais. A compreensão dos nexos internos entre os objetos matemáticos e a ciência particular deve ser enfatizada para que os alunos desenvolvam uma visão mais profunda e significativa da matemática (DAVYDOV, 1988).

3.1 VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO

O volume é um conceito fundamental na matemática e na física, referindo-se à quantidade de espaço tridimensional que um objeto ocupa no espaço. Para compreender melhor esse conceito, pode-se recorrer a um exemplo simples, como um paralelepípedo reto retângulo, conforme demonstrado na Figura 1 (DA SILVA, 2019).

Figura 1 Representação gráfica de uma estrutura tridimensional



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

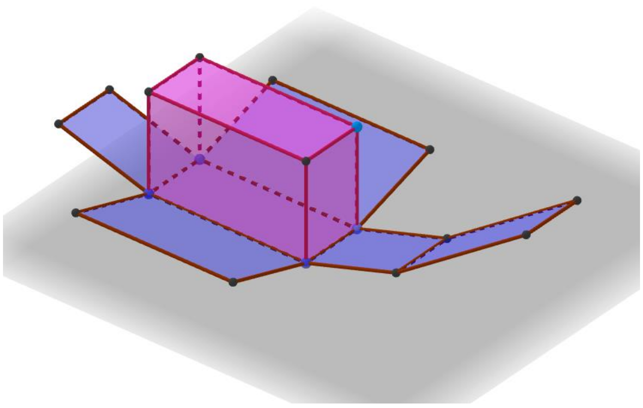
O paralelepípedo reto retângulo é um sólido geométrico com seis faces retangulares, onde cada par de faces opostas é paralelo e congruente. Esse sólido é caracterizado por três dimensões lineares: comprimento, largura e altura. O volume desse paralelepípedo é calculado multiplicando-se essas três dimensões. Essa é uma representação visual simples do cálculo de volume, onde a quantidade de espaço ocupada pelo sólido é o resultado da multiplicação das suas medidas lineares (DA SILVA, 2019).

Para calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo, utiliza-se a seguinte fórmula: Volume = Comprimento x Largura x Altura. Essa fórmula é uma aplicação direta do conceito de volume e é fundamental para a compreensão e resolução de problemas envolvendo sólidos semelhantes (ZANATTA, 2010).

Além de ser um conceito essencial na geometria, o cálculo de volume também desempenha um papel importante em outras áreas da matemática, bem como em disciplinas como física e engenharia. A capacidade de determinar o volume de diferentes sólidos é fundamental para resolver problemas práticos relacionados à medição de objetos tridimensionais, cálculo de densidade de materiais e muitas outras aplicações (MEDEIROS, 2014).

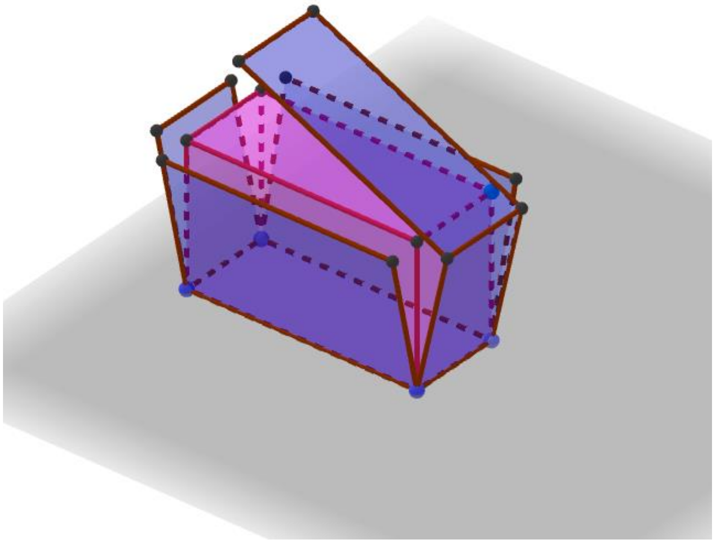
Portanto, o conceito de volume é central para a compreensão da geometria e tem aplicações significativas em diversos campos do conhecimento. A ilustração com um paralelepípedo reto retângulo é um exemplo simples, mas eficaz, para ajudar os estudantes a visualizarem e compreenderem como o cálculo de volume funciona na prática (ZANATTA, 2010; MEDEIROS, 2014).

Figura 2 Diagrama tridimensional de uma estrutura com projeções planares



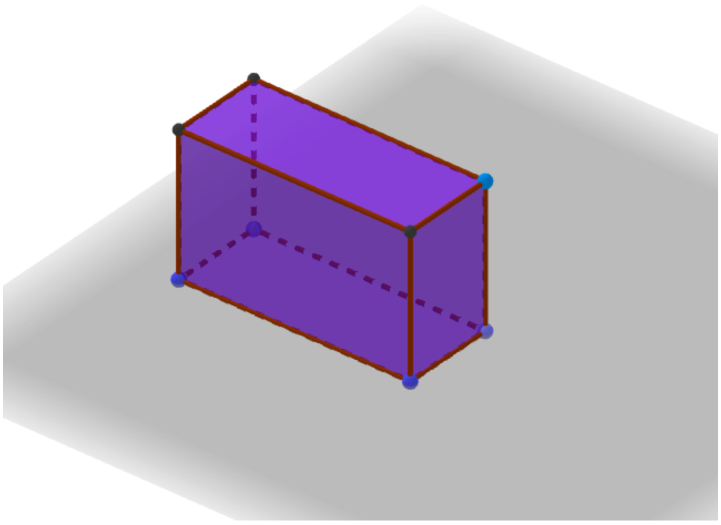
Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Figura 3 Diagrama tridimensional de uma estrutura com projeções planares



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Figura 4 Diagrama tridimensional de uma estrutura com projeções planares totalmente fechada



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Um paralelepípedo é uma figura geométrica que possui duas medidas principais associadas: a área da superfície e o volume. A área da superfície refere-se à quantidade de material necessária para construir a caixa, enquanto o volume indica a capacidade interna da caixa (DA SILVA, 2019).

A área da superfície de um paralelepípedo pode ser vista como a quantidade de papel ou tinta necessária para cobrir todas as faces externas da caixa. Ela é expressa em unidades quadradas, como metros quadrados ou centímetros quadrados, e desempenha um papel fundamental em aplicações como o cálculo de material para revestimentos ou embalagens (ZANATTA, 2010).

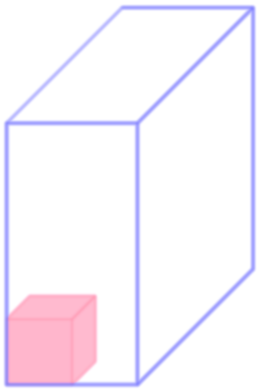
Por outro lado, o volume de um paralelepípedo indica o espaço tridimensional que a caixa é capaz de conter. É expresso em unidades cúbicas, como metros cúbicos ou centímetros cúbicos. Além disso, o volume pode ser convertido em unidades de capacidade, como litros ou mililitros, quando se deseja determinar a quantidade de líquido que a caixa pode armazenar (MEDEIROS, 2014).

Para calcular o volume de um paralelepípedo, é adotada uma abordagem sistemática usando uma unidade padrão de medida. Através dessa unidade padrão, é possível determinar a capacidade total do paralelepípedo, multiplicando as dimensões do sólido, significando que o volume é calculado multiplicando-se o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo (DA SILVA, 2019).

Uma estratégia visual interessante para compreender o cálculo de volume é utilizar um cubo rosa como unidade padrão de volume, permitindo entender como o espaço é ocupado progressivamente. À medida que mais cubos são adicionados lateralmente, a largura da estrutura aumenta. A adição contínua de cubos em diferentes direções, incluindo empilhamento vertical, expande o sólido em comprimento, largura e altura. Essa representação visual clara demonstra a formação e as dimensões de um paralelepípedo (ZANATTA, 2010).

Portanto, o cálculo de volume em um paralelepípedo é uma habilidade matemática essencial que envolve multiplicar suas dimensões lineares. Uma abordagem visual usando unidades de cubo ajuda a visualizar claramente como o espaço é preenchido e como o volume é calculado, proporcionando uma compreensão sólida desse conceito (MEDEIROS, 2014).

Figura 5 Paralelepípedo com um cubo como unidade padrão de medida



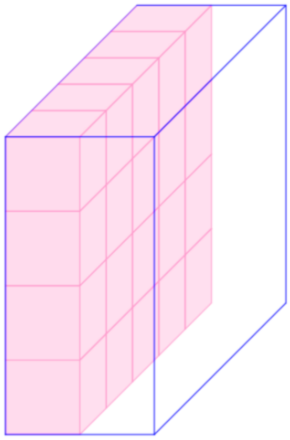
Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

A visualização do espaço ocupado dentro de um paralelepípedo por meio do uso de cubos como unidades de medida é uma estratégia eficaz e intuitiva para compreender o cálculo do volume desse sólido geométrico. Essa abordagem, baseada na divisão do espaço em unidades menores, permite uma compreensão mais tangível do conceito de volume (DA SILVA, 2019).

Ao aplicar essa lógica a um paralelepípedo com dimensões específicas, como duas unidades de largura, cinco unidades de comprimento e quatro unidades de altura, é possível calcular seu volume pela contagem dos cubos necessários para preencher completamente o espaço interno do sólido. Nesse exemplo, o processo de cálculo começa com a colocação de cinco cubos ao longo do comprimento do paralelepípedo. Em seguida, para preencher a altura, são necessárias quatro fileiras de cubos. Cada uma dessas fileiras é composta por quatro cubos, resultando em um total de 20 cubos. No entanto, é importante observar que ainda falta uma coluna inteira de cubos para completar o paralelepípedo (DA SILVA, 2019).

Essa abordagem de preenchimento do espaço com cubos não apenas demonstra visualmente como o volume é calculado, mas também ressalta a importância das dimensões do paralelepípedo no processo. As unidades de medida, nesse caso, os cubos, são utilizadas para quantificar o espaço de forma sistemática e organizada, tornando o cálculo do volume uma tarefa mais acessível e compreensível (ZANATTA, 2010).

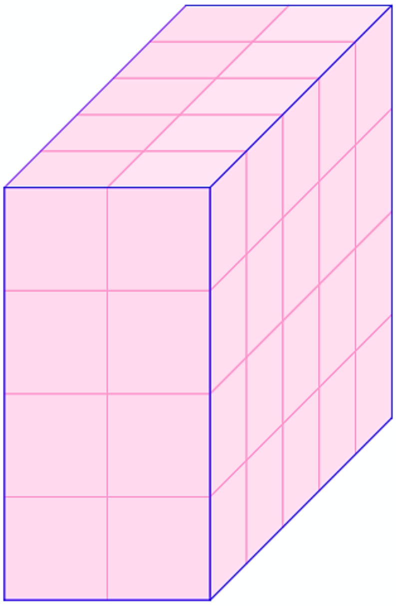
Figura 6 Paralelepípedos com uma fileira de cubos



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Para preencher o paralelepípedo, é necessário adicionar uma coluna inteira de cubos. Ao fazer isso, acrescentam-se 20 cubos à contagem original, totalizando 40 cubos.

Figura 7 Paralelepípedo com a área completa de cubos



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Uma forma eficaz e conveniente de calcular a quantidade total de cubos que preenchem o interior de um paralelepípedo é por meio da multiplicação das dimensões do sólido. Essa abordagem simplifica o processo de determinar o volume do paralelepípedo sem a necessidade de contar cada cubo individualmente. Por exemplo, ao considerar um paralelepípedo com quatro cubos de altura e cinco colunas de comprimento, percebe-se que há 20 cubos em cada camada, como ilustrado na figura 7 (DA SILVA, 2019).

Ao levar em conta duas camadas desse paralelepípedo, o cálculo se torna ainda mais evidente. Com 20 cubos por camada, multiplicar essa quantidade por duas resulta em um total de 40 cubos que ocupam o espaço interno do paralelepípedo. Essa multiplicação das dimensões é uma estratégia prática para encontrar o volume de sólidos sem a necessidade de contar unidades individuais, demonstrando como as dimensões estão relacionadas à capacidade interna do paralelepípedo (DA SILVA, 2019).

Para ilustrar ainda mais essa abordagem de cálculo de volume, considere um paralelepípedo com dimensões diferentes, como oito cubos de altura, sete de comprimento e oito de altura. Ao multiplicar essas três dimensões - altura, comprimento e largura - obtém-se o volume total do paralelepípedo, que, nesse caso, seria igual a 448 cubos. Esse método destaca a multiplicação das três dimensões como uma maneira eficaz de determinar o volume do sólido, usando a unidade padrão, o cubo, como base para quantificar o espaço ocupado (DA SILVA, 2019).

É importante ressaltar que, ao se referir ao volume de sólidos geométricos, as unidades de medida são sempre cúbicas, como metros cúbicos ou centímetros cúbicos, ocorrendo devido à natureza tridimensional do cálculo de volume, que envolve as três dimensões do sólido e, portanto, resulta em uma unidade cúbica para descrever a capacidade interna do paralelepípedo ou qualquer outro sólido (DA SILVA, 2019).

3.2 VOLUME DE UM PRISMA

O cálculo do volume de um prisma é um procedimento fundamental na geometria espacial e pode ser abordado de maneira eficaz considerando diferentes tipos de bases. Uma abordagem útil para calcular o volume de um prisma é começar considerando um prisma com uma base triangular. Essa abordagem permite compreender a relação entre a área da base e a altura do prisma. Observando que um prisma com uma base em forma de paralelogramo é essencialmente equivalente a um paralelepípedo retângulo, uma vez que o paralelogramo da base pode ser transformado em um retângulo com a mesma área. Portanto, o volume pode ser calculado utilizando a mesma fórmula usada para o paralelepípedo retângulo, ou seja, multiplicando a área da base pela altura do prisma (DANTAS; MATHIAS, 2017).

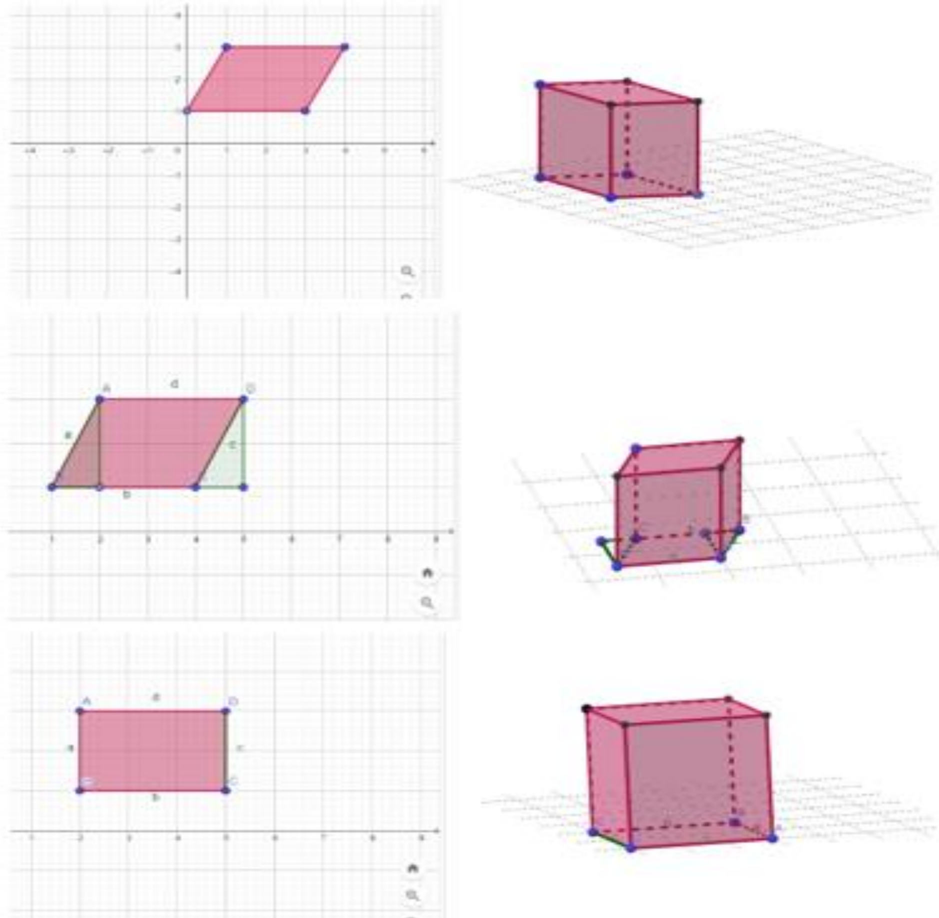
Essa abordagem demonstra a versatilidade do cálculo de volumes em prismas, independentemente da forma da base, desde que a base seja claramente definida e sua área possa ser calculada. Além disso, essa relação entre a base e a altura do prisma é fundamental para compreender como as mudanças na geometria da base afetam o volume do sólido. Portanto, os alunos podem aplicar esse princípio a diferentes situações envolvendo prismas com bases de formas variadas (DANTAS; MATHIAS, 2017).

A equivalência entre um prisma com base em um paralelogramo e um paralelepípedo retângulo destaca a importância de compreender as propriedades geométricas dos sólidos. Essa abordagem não se limita apenas ao cálculo de volumes de prismas, mas também pode ser aplicada a outros sólidos, como cilindros, que também têm bases com formas diversas. A compreensão dessa equivalência é essencial para desenvolver habilidades de cálculo de volume em uma variedade de contextos geométricos (DANTAS; MATHIAS, 2017).

A utilização desse método de cálculo de volume em prismas é valiosa no ensino da geometria espacial. Permite que os alunos visualizem a relação entre a base e a altura de um prisma e compreendam como essa relação está intrinsecamente ligada ao cálculo do volume. Ademais, essa abordagem pode ser facilitada com o auxílio de ferramentas tecnológicas, como o software GeoGebra, que oferece uma representação dinâmica e interativa dos sólidos geométricos, tornando o aprendizado mais envolvente e eficaz (BULLMANN; NEHRING, 2017).

Em um contexto de ensino, é importante considerar a interpretação de enunciados que envolvem o cálculo de volume de sólidos, pois essa compreensão é fundamental para resolver problemas relacionados à geometria espacial. Os alunos muitas vezes encontram desafios na interpretação desses enunciados, e é essencial abordar suas dificuldades. O uso de exemplos práticos e a exploração de diferentes tipos de bases em prismas podem contribuir para melhorar a compreensão dos conceitos relacionados ao volume e à geometria espacial (DA SILVA; ZANON; VIEIRA, 2022).

Figura 8 Paralelogramo sendo transformado em prisma



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023**.**

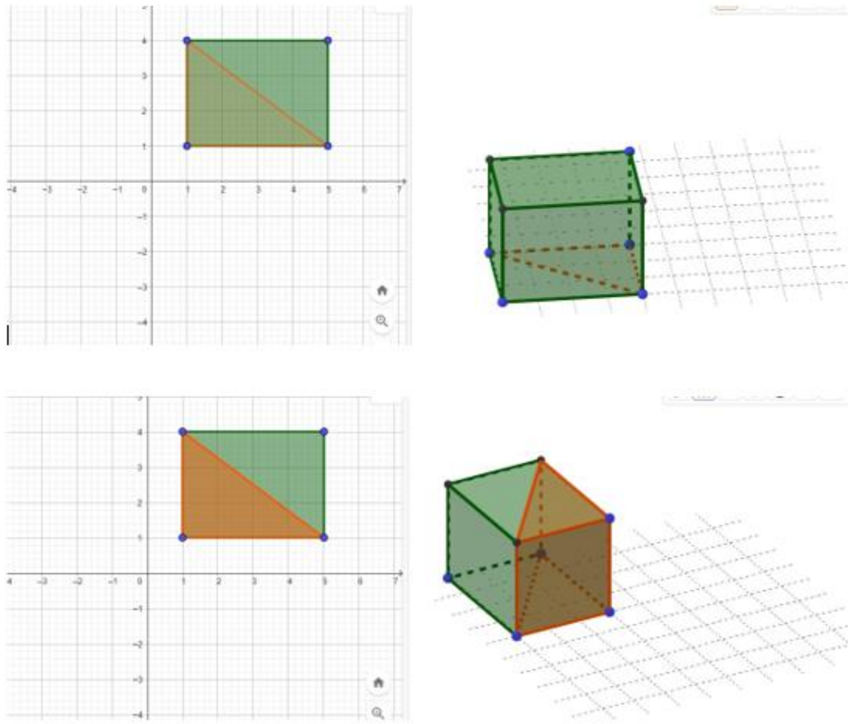
O cálculo do volume de um prisma de base triangular é um procedimento que pode ser abordado de maneira eficiente utilizando o raciocínio geométrico. Essa abordagem parte do princípio de que a base triangular de um prisma é equivalente à metade de um paralelogramo com a mesma área. Portanto, o volume desse prisma triangular pode ser calculado utilizando a mesma fórmula aplicada a prismas de base retangular: a área da base multiplicada pela altura do prisma, dividida por dois (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Essa interpretação do cálculo de volume em prismas de base triangular é essencial para compreender a relação entre a geometria da base e a altura do sólido. Ao reconhecer que a base triangular é metade de um paralelogramo, os alunos podem aplicar a mesma fórmula utilizada em prismas de base retangular, o que simplifica o processo de cálculo. Essa abordagem proporciona uma maneira clara e eficaz de calcular o volume de prismas triangulares (DANTAS; MATHIAS, 2017).

No contexto do ensino de geometria espacial, é importante apresentar aos alunos essa abordagem para o cálculo de volumes em prismas com bases diferentes, ampliando sua compreensão dos conceitos geométricos e os capacita a resolver problemas relacionados a esses sólidos de maneira mais abrangente. Também, o uso de representações visuais e práticas, como o software GeoGebra, pode enriquecer o processo de aprendizado e permitir que os alunos explorem as relações geométricas de forma interativa (BULLMANN; NEHRING, 2017).

A interpretação correta dos enunciados que envolvem o cálculo de volume de sólidos, incluindo prismas de base triangular, é fundamental para o sucesso no ensino e aprendizado da geometria espacial. Muitas vezes, os alunos encontram dificuldades na interpretação desses problemas. Portanto, é importante abordar essa questão, promovendo a discussão e a compreensão dos enunciados, ajudando aos alunos a relacionar conceitos matemáticos com situações do mundo real e a aplicar suas habilidades de cálculo de volume de maneira contextualizada (DA SILVA; ZANON; VIEIRA, 2022).

Figura 9 Paralelepípedo repartido ao meio



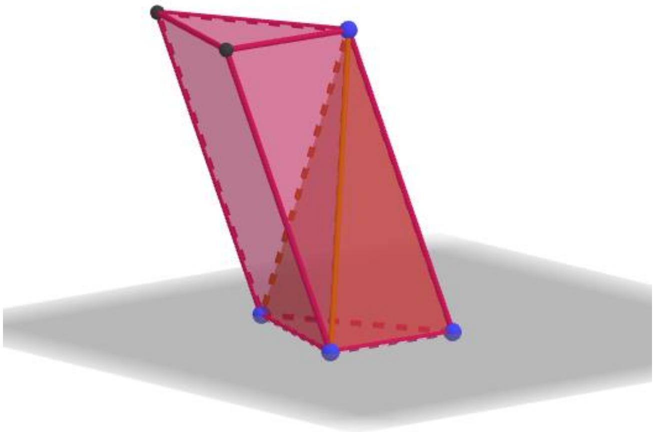
Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

3.3 VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

A habilidade de decompor um prisma em pirâmides triangulares é fundamental para a dedução da fórmula geral do volume, uma vez que simplifica o processo ao trabalhar com formas mais básicas e facilmente compreendidas.

É necessário entender que qualquer prisma pode ser particionado em pirâmides triangulares. Então, o foco recai sobre uma pirâmide específica cuja base é um triângulo. A abordagem principal consiste em construir um prisma que possua a mesma base e a mesma altura da pirâmide triangular em questão. Ao fazer isso, cria-se uma relação direta entre o volume da pirâmide e o volume do prisma.

Figura 10 Pirâmide que se transforma em prima



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

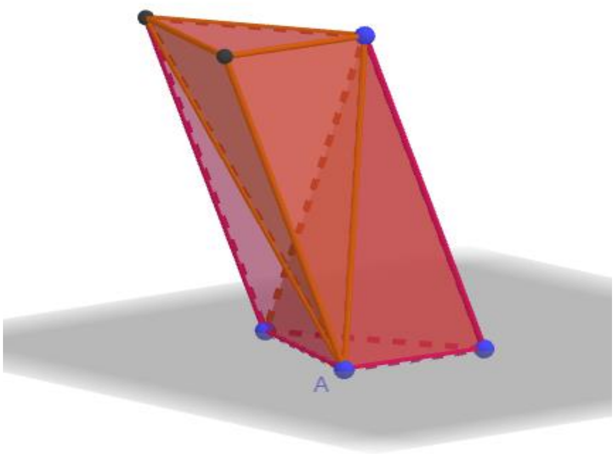
A decomposição de prismas em pirâmides menores é um conceito fundamental na geometria espacial, e sua compreensão contribui para o cálculo de volumes de sólidos mais complexos. Ao analisar um prisma na figura 10, com uma base triangular e altura coincidente com a da pirâmide, é possível identificar a possibilidade de dividir esse prisma em pirâmides menores. Esse processo começa com a pirâmide original e, ao traçar uma nova pirâmide usando o triângulo superior que converge para o vértice A, observa-se que essa segunda pirâmide é geometricamente idêntica à primeira (DANTAS; MATHIAS, 2017).

A decomposição de prismas em pirâmides é uma estratégia valiosa no ensino e aprendizado da geometria espacial. Ela permite aos estudantes compreenderem a relação entre sólidos tridimensionais complexos e sólidos mais simples, como pirâmides. Essa abordagem facilita o cálculo de volumes e o desenvolvimento de habilidades Também, a decomposição em pirâmides destaca a importância da visualização espacial na resolução de problemas geométricos (DANTAS; MATHIAS, 2017).

A utilização de estratégias de ensino que envolvem a decomposição de prismas em pirâmides pode ser enriquecida pelo uso de tecnologia, como o software GeoGebra. Esse software permite a criação de representações visuais interativas, que auxiliam os alunos a compreenderem os conceitos geométricos de forma dinâmica. Ao explorar a decomposição de prismas em pirâmides por meio do GeoGebra, os estudantes podem visualizar as transformações dos sólidos e desenvolver uma compreensão mais profunda da geometria espacial (BULLMANN; NEHRING, 2017).

A interpretação de enunciados que envolvem a decomposição de prismas em pirâmides também é um ponto crucial no processo de aprendizado. Muitas vezes, os alunos enfrentam desafios na compreensão desses problemas. Portanto, é importante promover discussões e atividades que ajudem os estudantes a desenvolverem suas habilidades de interpretação e resolução de problemas geométricos relacionados a essa temática. A comunicação eficaz entre professores e alunos é fundamental para esclarecer dúvidas e facilitar o entendimento dos enunciados (DA SILVA; ZANON; VIEIRA, 2022).

Figura 11 Pirâmide que se transforma em prima vista por outro angulo



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Uma observação perspicaz na geometria espacial revela que o prisma em questão, ilustrado na figura 11, contém três pirâmides de tamanhos e formas idênticas. Essa relação entre o prisma e as pirâmides contidas nele é de fundamental importância para compreender a interligação entre seus volumes (DANTAS; MATHIAS, 2017).

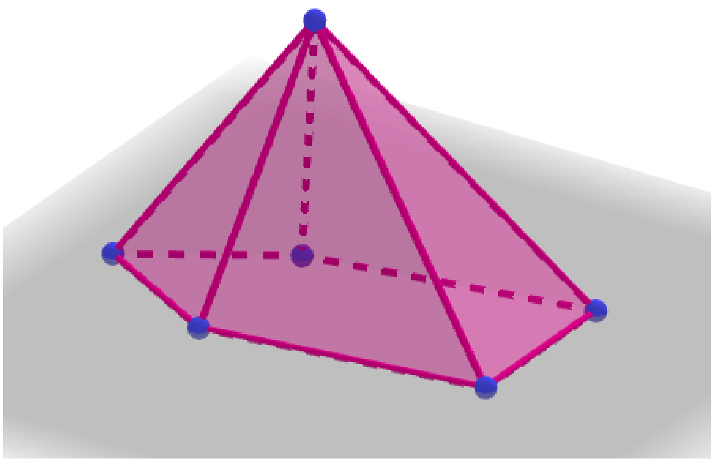
Dentro do prisma representado na figura 11, podem ser identificadas três pirâmides: uma rosa, uma vermelha e uma laranja, todas compartilhando a mesma base triangular e a mesma altura. Como resultado, essas pirâmides têm volumes idênticos. A pirâmide laranja, situada entre as pirâmides rosa e vermelha, pode ser visualizada como uma divisão de um quadrilátero em dois triângulos congruentes. Quando comparamos a pirâmide rosa, cuja base é um desses triângulos, com a pirâmide vermelha, notamos que ambas são congruentes em forma e tamanho. Da mesma forma, a pirâmide laranja é congruente às outras duas (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Portanto, podemos concluir que as três pirâmides dentro do prisma são geometricamente idênticas em todos os aspectos, o que nos leva à dedução de que o volume do prisma é exatamente três vezes o volume de uma única pirâmide. Essa observação desempenha um papel crucial na compreensão da relação entre o volume de uma pirâmide e o de um prisma com base e altura idênticas (DANTAS; MATHIAS, 2017).

O volume da pirâmide inicial está intrinsecamente relacionado ao volume do prisma que a envolve. Precisamente, o volume da pirâmide é exatamente um terço do volume do prisma. Quando consideramos uma pirâmide de base triangular, seu volume pode ser determinado como um terço do volume do prisma que possui a mesma base e altura. O volume do prisma é calculado simplesmente multiplicando-se a área de sua base pela altura. Portanto, o volume da pirâmide triangular será igual à área da base multiplicada pela altura e, em seguida, dividida por três (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Para compreender melhor a fórmula que permite calcular o volume de uma pirâmide, independentemente de sua forma ou inclinação, é importante focar na relação fundamental entre seus volumes. Tomando como exemplo uma pirâmide com base pentagonal, ilustrada na figura 8, é essencial ressaltar que a escolha da base pentagonal é meramente ilustrativa, pois o conceito se aplica a pirâmides com bases de qualquer formato. É relevante notar que a pirâmide considerada não é regular e apresenta uma inclinação oblíqua (DANTAS; MATHIAS, 2017).

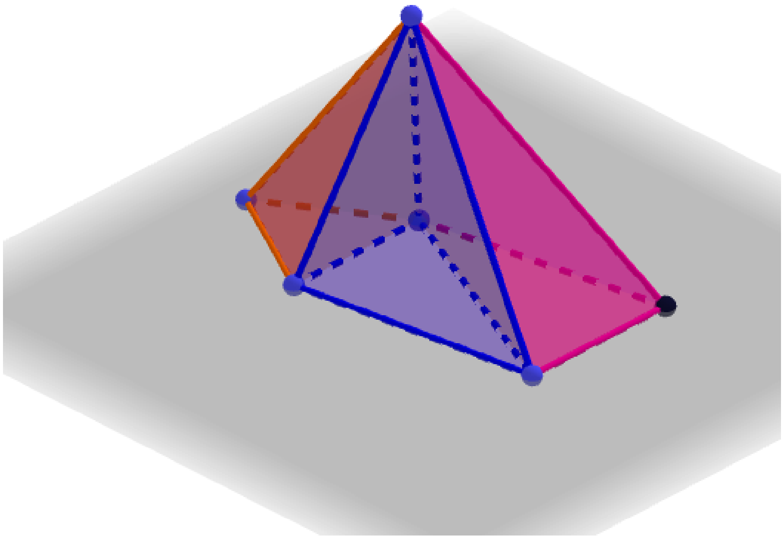
Figura 12 Pirâmide repartida em três pirâmides de base triangular



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Um ponto importante a ser destacado é que qualquer pirâmide pode ser subdividida em pirâmides menores com bases triangulares. Ao dividir o polígono da base em triângulos, é possível decompor a pirâmide original em várias pirâmides de base triangular, sem que esses triângulos tenham interseção de pontos internos.

Figura 13 Pirâmide repartida em três pirâmides de base triangular com cores diferentes



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Quando se aborda o cálculo do volume de uma pirâmide, uma estratégia eficaz para simplificar o problema é a divisão do polígono de sua base em triângulos justapostos, ou seja, triângulos que não compartilham pontos internos em comum. Essa abordagem é universal e pode ser aplicada a pirâmides de diferentes formas de base. Por exemplo, uma pirâmide pentagonal pode ser decomposta em três pirâmides menores, cada uma delas com base triangular. Esse método visual permite compreender que, independentemente da forma da base, uma pirâmide pode ser particionada em pirâmides triangulares (DANTAS; MATHIAS, 2017).

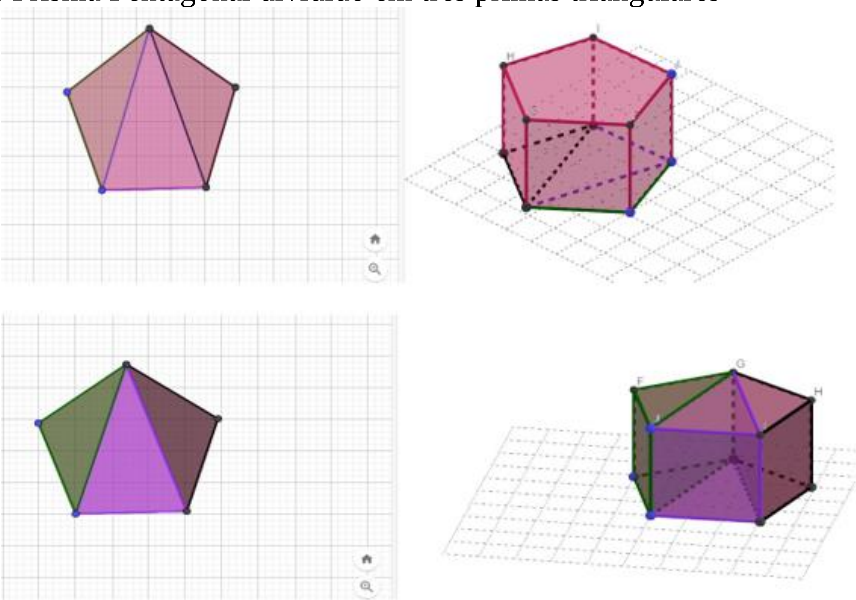
Ao considerar uma pirâmide pentagonal, torna-se evidente que ela pode ser decomposta em três pirâmides menores: uma roxa, uma amarela e uma rosa. A soma dos volumes dessas três pirâmides menores resulta no volume da pirâmide pentagonal original. É crucial notar que, embora essas pirâmides menores compartilhem algumas de suas faces com a pirâmide original, elas não têm interseções em seus pontos internos, o que torna essa abordagem válida e precisa (DANTAS; MATHIAS, 2017).

A relação entre o volume de uma pirâmide e o de um prisma com a mesma base e altura é uma propriedade geral que se aplica a pirâmides de qualquer forma de base. Essa relação pode ser representada por uma fórmula simples: o volume da pirâmide é igual à área da base multiplicada pela altura e, em seguida, dividida por três. Essa fórmula se baseia na capacidade de decompor qualquer pirâmide em pirâmides menores de bases triangulares. Cada uma dessas pirâmides menores tem um volume igual a um terço do volume de um prisma com a mesma base e altura, o que sustenta a validade dessa relação (DANTAS; MATHIAS, 2017).

3.4 VOLUME DE UM PRISMA QUALQUER

O volume de qualquer prisma pode ser determinado por meio de uma abordagem de decomposição. Em outras palavras, é possível desmembrar um prisma com base pentagonal, por exemplo, em três prismas menores, cada um com base triangular.

Figura 14 Prisma Pentagonal dividido em três primas triangulares



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

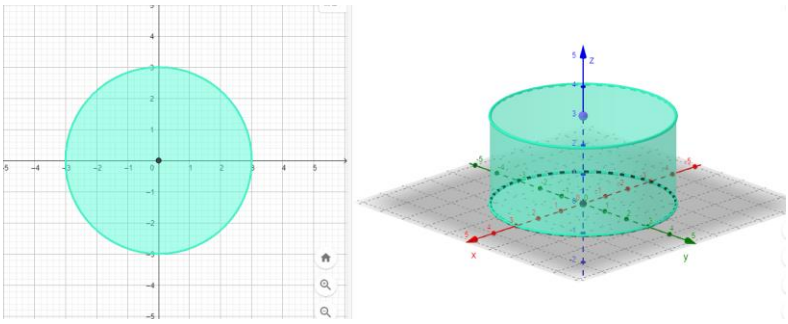
V= B1xh+B2Xh+B3xH= (B1+B2+B3)xh= Bxh

Essa estratégia de decomposição permite chegar à conclusão de que o volume de qualquer prisma e pirâmide pode ser calculado multiplicando a área da sua base pela altura.

3.5 VOLUME DO CILINDRO

A fórmula do volume de um cilindro, V = πr²h, é uma maneira de calcular o espaço que o cilindro ocupa. No entanto, é interessante pensar em como pode ser representada a base circular do cilindro como uma forma mais simples, como um polígono de lados retos.

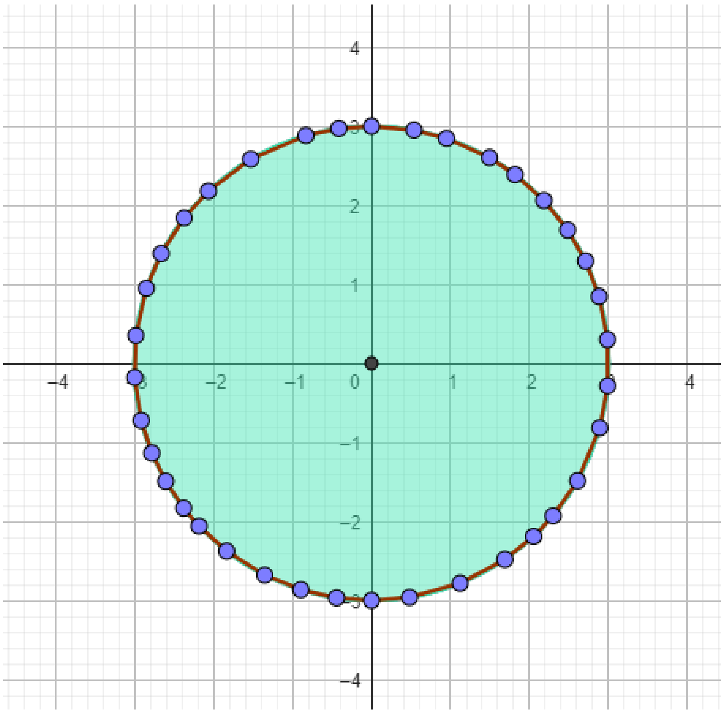
Figura 15 Cilindro



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Para fazer isso, deve-se imaginar um polígono regular com muitos lados que inscrevem o círculo da base do cilindro. Quanto mais lados esse polígono tiver, mais se parecerá com um círculo perfeito.

Figura 16 Base do cilindro de um círculo



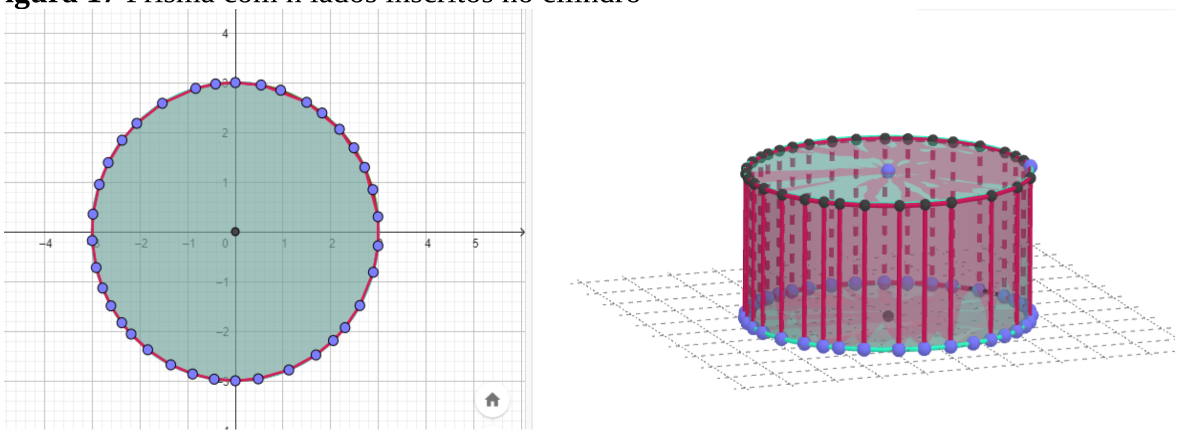
Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

A precisão na estimativa da área de um círculo está diretamente relacionada ao número de lados de um polígono usado para aproximar essa área. Quanto maior o número de lados do polígono, mais precisa será a estimativa da área do círculo. Essa relação entre a precisão da estimativa e o número de lados do polígono é um conceito relevante na geometria e na matemática em geral (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Para calcular o volume de um cilindro, é necessário considerar a área da base do cilindro. Novamente, a precisão dessa estimativa está relacionada ao número de lados do polígono que é usado para aproximar a área da base. À medida que o número de lados do polígono aumenta, a estimativa do volume do cilindro se torna mais precisa. No contexto do cálculo integral, esse princípio é essencial, pois é através da divisão do objeto em infinitos elementos infinitesimalmente pequenos que se obtém a precisão necessária nas estimativas (DANTAS; MATHIAS, 2017).

No limite, quando o número de lados do polígono tende ao infinito, a forma do polígono se torna uma representação extremamente próxima do círculo, significando que a estimativa do volume do cilindro se torna excepcionalmente precisa quando consideramos um número infinito de lados. Essa convergência para a forma ideal é fundamental no cálculo integral, onde a área sob uma curva ou o volume de um objeto é calculado precisamente através dessa abordagem de infinitas subdivisões (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Figura 17 Prisma com n lados inscritos no cilindro



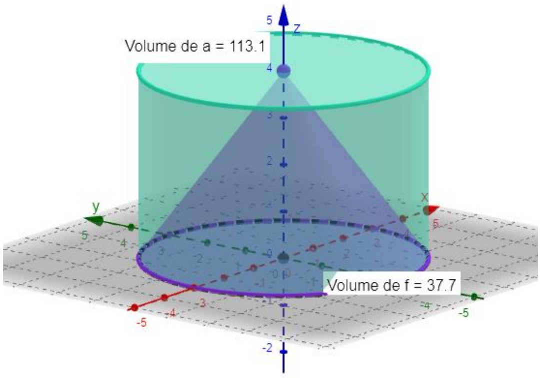
Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

3.6 VOLUME DE UM CONE

A fórmula do volume de um cone, $V = (1/3)\, \pi r^2 h$, é uma ferramenta matemática que permite calcular o espaço tridimensional ocupado por um cone. O volume do cone, representado por "V," é calculado usando essa fórmula. No entanto, o termo "1/3" na fórmula desempenha um papel fundamental.

O "1/3" indica que está sendo calculado um terço do volume de um cilindro imaginário que teria a mesma base e altura do cone. Em essência, deve-se pensar no cone como representando um terço do volume do cilindro. A base do cone corresponde à base do cilindro, e a altura do cone é a mesma que a do cilindro.

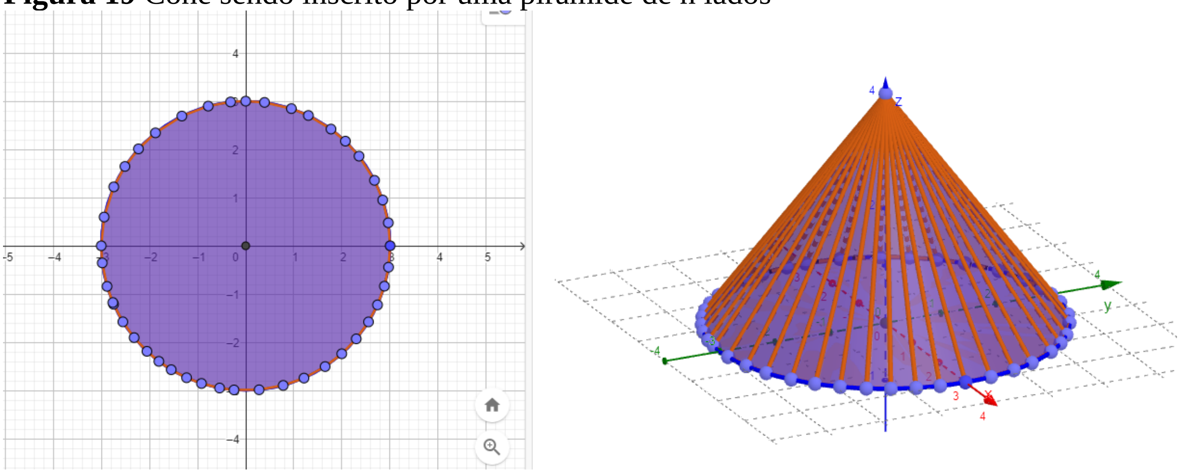
Figura 18 Demonstração de que o cone tem 1/3 do volume do cilindro



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Agora, para entender como a base circular do cone pode ser representada por um polígono com muitos lados, pode-se aplicar um conceito de aproximação como já demonstrado anteriormente. Imagine um polígono regular com muitos lados que se inscrevem na base do cone. À medida que é aumentado o número de lados desse polígono, ele começa a se assemelhar cada vez mais a um cone perfeito.

Figura 19 Cone sendo inscrito por uma pirâmide de n lados



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Quanto mais lados o polígono tiver, mais precisa será a estimativa do volume do cone. Onde é multiplicada a área da base pela altura do cone e divido o resultado por três (1/3 $\pi r^2 h$) para obter o volume do cone.

À medida que é aumentado o número de lados do polígono (ou seja, é aproximado o polígono de um cone real), a estimativa do volume do cone se torna mais precisa. No limite, à medida que o número de lados tende ao infinito, o polígono se torna uma representação cada vez mais próxima do cone, tornando nossa estimativa do volume do cone extremamente precisa.

3.7 VOLUME DE UMA ESFERA

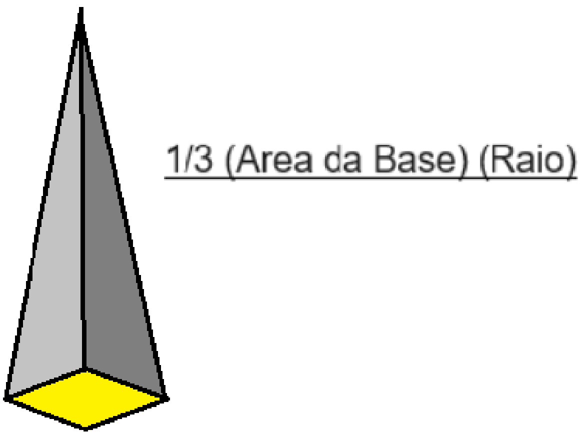
A fórmula $4/3\pi R^3$ fornece o volume de uma esfera, mas de onde vem essa fórmula? Primeiro, deve-se desenhar uma esfera perfeita e em seguida a preencher com volume. Em seguida, divide-se a esfera em pirâmides de tamanhos iguais, todas com bases quadradas.

Figura 20 Esfera sendo repartida em n pirâmides

Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

O volume de cada pirâmide é igual a um terço da área da base multiplicada pela altura. A altura de todas as pirâmides que compõem a esfera é, na verdade, igual ao raio, o que simplifica a equação para um terço da área da base multiplicada pelo raio. Ao substituir o raio por "r" e a área da base por "b", é numerada as bases, começando com a base um. Assim, a equação se torna "base um vezes r dividido por três". Para encontrar o volume da esfera, é calculado o volume de todas as pirâmides e somado seus volumes.

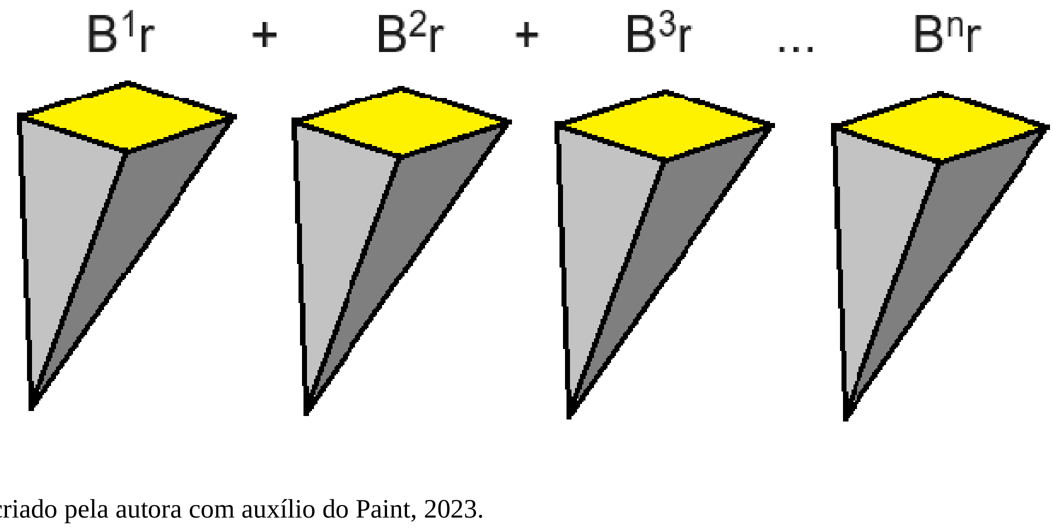
Figura 21 Pirâmide de base quadrada retirada da esfera



Fonte: criado pela autora com auxílio do Paint, 2023.

Ao alinhar as pirâmides desde o início até a última, onde não se sabe quantas pirâmides existem, representa-se a última como "base n vezes r dividido por três". A soma de todas as pirâmides leva à fórmula simples e completa para o volume da esfera.

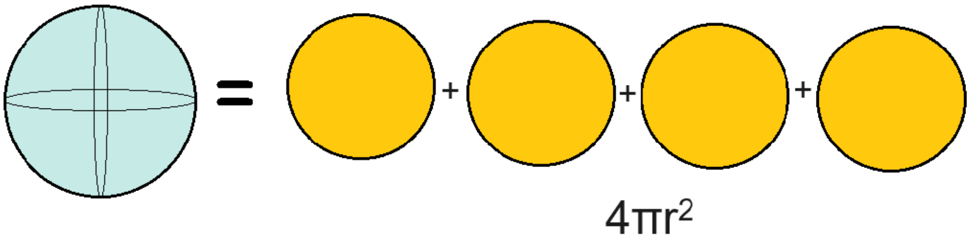
Figura 22 Soma das pirâmides de base quadrada



Fonte: criado pela autora com auxílio do Paint, 2023.

Em seguida, ao aplicar a álgebra, deve-se começar por fatorar um terço e fatorando o raio, resultando em R dividido por três multiplicado pela soma de todas as bases. Agora, é necessário voltar a atenção para a soma de todas as bases, que são as bases das pirâmides que compõem a esfera. Nota-se que essas bases, na realidade, representam a área de superfície da esfera. Portanto, a soma de todas as bases equivale à área de superfície, que é igual a $4\pi r^2$. Para compreender por que a área de superfície é $4\pi r^2$, imagine a esfera e considere sua circunferência máxima. A partir dessa circunferência, é possível criar um círculo, e o fato surpreendente é que a área de superfície da esfera corresponde exatamente a quatro vezes a área desse círculo.

Figura 23 Divisão de esfera em quatro círculos



Fonte: criado pela autora com auxílio do Paint, 2023.

Cada círculo possui uma área de πr^2, e ao combiná-los, obtém-se $4\pi r^2$. Agora, retornando à fórmula simples, substitui-se a soma de todas as bases por $4\pi r^2$. Em seguida, combina-se os termos para obter o cubo e, finalmente, reorganiza-se a equação para obter $4/3\pi r^3$. Portanto, a fórmula $4/3\pi r^3$ proporciona o volume de qualquer esfera, independentemente do seu tamanho.

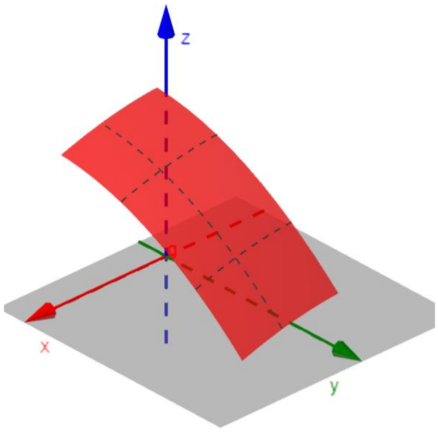
3.8 GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE VOLUME POR INTEGRAL

No contexto da generalização do conceito de volume, os estudiosos se deparam com superfícies que diferem dos sólidos tradicionais da geometria plana, apresentando formas curvilíneas e desafiadoras. Nesse cenário, surge a necessidade de calcular o volume sob uma curva vermelha em relação ao plano XY. Para abordar essa tarefa, os matemáticos têm empregado uma estratégia que envolve a subdivisão da base em retângulos. Inicialmente, consideram-se seis unidades retangulares, mas o objetivo é aproximar essa subdivisão para a infinitude (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Cada um desses retângulos forma um volume delimitado dentro da superfície curvilínea, e a técnica empregada consiste na soma sucessiva desses volumes retangulares. Esse processo progressivo de adição de retângulos tem como finalidade obter uma estimativa cada vez mais precisa do volume contido na região localizada abaixo da superfície curva e acima do plano XY. Dessa forma, os matemáticos buscam aproximar o cálculo do volume da superfície curvilínea por meio dessa estratégia de subdivisão e soma (DANTAS; MATHIAS, 2017).

O conceito de subdividir a base em retângulos e adicionar sucessivamente seus volumes é fundamental para lidar com superfícies complexas em cálculos de volume. À medida que o número de retângulos utilizados na subdivisão aumenta, a precisão da estimativa do volume também se aprimora. Esse princípio é essencial em contextos matemáticos mais amplos, como o cálculo integral, onde a convergência para infinitas subdivisões é uma estratégia crucial para calcular áreas e volumes sob curvas e superfícies curvilíneas (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Figura 24 Superfície que difere os sólidos na geometria



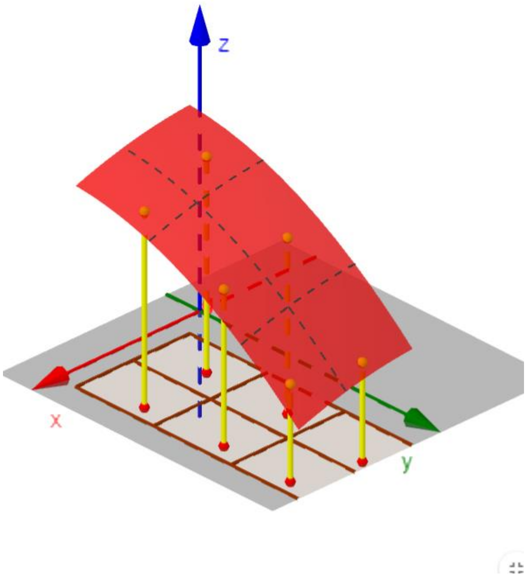
Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

No contexto do cálculo de volume para superfícies complexas, uma abordagem fundamental envolve a utilização dos valores contidos nos retângulos que compõem a subdivisão da base. Nesse contexto, as alturas dos retângulos desempenham um papel crucial e estão destacadas em amarelo, sendo intrinsecamente vinculadas à função de duas variáveis que define a superfície, representada como f(x, y). Para obter essas alturas, são escolhidos pontos no interior dos retângulos, e ao avaliá-los por meio da função f, obtêm-se as alturas correspondentes (DANTAS; MATHIAS, 2017).

A estratégia adotada nesse processo consiste na aplicação da fórmula clássica do volume, ou seja, a base multiplicada pela altura. No contexto específico, os retângulos atuam como a base, enquanto as alturas são derivadas da função f(x, y). O resultado desse produto fornece uma primeira aproximação do volume desejado, que é obtida pela soma sucessiva dos volumes dos paralelepípedos formados pelos retângulos (DANTAS; MATHIAS, 2017).

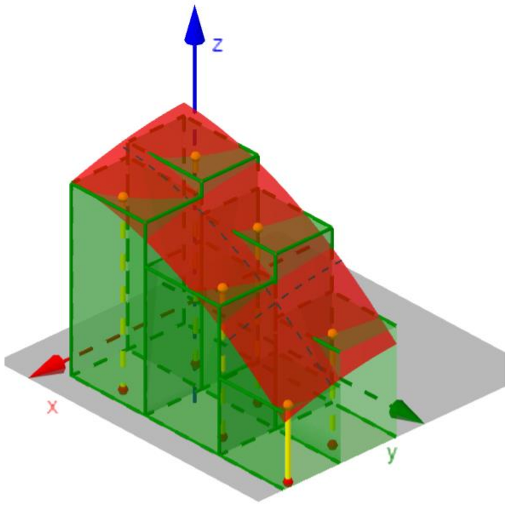
No entanto, reconhece-se que esse método inicial pode apresentar imprecisões em sua estimativa, uma vez que a aproximação é feita com base nos retângulos originais. Para mitigar essas imprecisões e alcançar uma estimativa mais precisa do volume, propõe-se uma abordagem refinada. Essa estratégia envolve a subdivisão progressiva dos retângulos em unidades menores, conforme ilustrado nas figuras associadas ao processo. A subdivisão progressiva visa melhorar a precisão do cálculo, permitindo uma aproximação mais acurada do volume desejado. Dessa forma, as imprecisões inerentes ao método original são controladas e reduzidas significativamente (DANTAS; MATHIAS, 2017).

Figura 25 Demonstração da altura dada pela função f



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

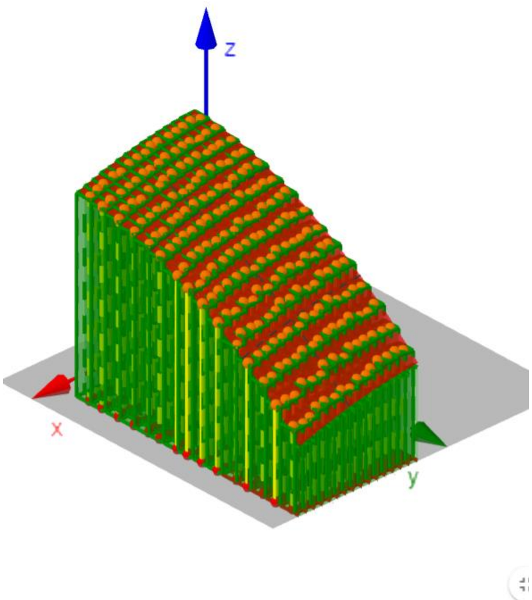
Figura 26 Representação dos retângulos sendo dispostos



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

A representação atual corresponde à figura anterior, na qual os retângulos foram dispostos. Observa-se que eles não se encaixam perfeitamente, ultrapassando ligeiramente as bordas e, em alguns casos, ficando parcialmente abaixo da superfície. Essas discrepâncias evidenciam a presença de erros, atribuíveis ao reduzido número de retângulos inicialmente considerado. Como solução, a abordagem propõe aumentar a quantidade de retângulos, visando aprimorar a precisão da aproximação. A nova figura apresentada abaixo ilustra essa tentativa de correção, buscando uma representação mais fiel e precisa da região desejada.

Figura 27 Representação do aumento no número de retângulos, resultando em diversos paralelepípedos inscritos na superfície



Fonte: criado pela autora com auxílio do GeoGebra, 2023.

Na representação acima, observa-se um significativo aumento no número de retângulos, resultando em diversos paralelepípedos inscritos na superfície. Essa ampliação na quantidade de unidades retangulares busca uma aproximação mais precisa do volume desejado, melhorando gradualmente a precisão do cálculo.

O processo consiste em refinamentos sucessivos, conforme mais retângulos são adicionados, aprimorando a estimativa volumétrica. Essa abordagem representa a generalização do conceito de volume, permitindo o cálculo do volume sob qualquer superfície e, por conseguinte, o volume de qualquer sólido. A fórmula que encapsula essa generalização é a integral dupla, proporcionando uma ferramenta matemática para o cálculo preciso do volume em uma ampla gama de contextos.

$$\text{Volume} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \int_a^b \int_c^d f(x_m, y_n)dx_m dy_n$$

Essa fórmula representa a interligação entre a álgebra e a geometria. Na expressão, a função f(x,y) representa a altura, enquanto dx e dy denotam as dimensões da base, que é um retângulo. A área da base é, portanto, $dx \times dy$, e a soma dupla indica que a soma ocorre nas direções tanto de x quanto de y. Ao aplicar essa abordagem, obtém-se o volume desejado. Essa relação matemática oferece uma conexão profunda entre as operações algébricas e as propriedades geométricas, permitindo a análise e o cálculo de volumes para uma variedade de formas e superfícies.

Esta possibilidade representa um grande salto nas ciências a partir do século XVII, principalmente. É uma síntese revelada por ideias provenientes dos gregos que agora retomadas apontam novas possibilidades de aplicação em vários campos científicos, como a física, a química, a biologia, entre outras.

Compreende-se que essa ideia aqui apresentada, traz consigo uma gênese histórica, um núcleo conceitual que pode ser utilizado em diversas frentes. A ideia de área, por exemplo segue o mesmo modelo, a ideia de úmero pode ser revelada a partir da ideia de relação entre grandezas, ou seja, a ideia é núcleo para discussão de vários modelos.

Entende-se que estes conceitos generalizados podem ser trabalhados nas séries finais do ensino básico, utilizando-se de modos mais intuitivos, esperando que o aluno adquira uma maturidade intelectual, no campo da álgebra e da geometria, mas podem contribuir significativamente para uma formação conceitual teórica qualificada.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A jornada pelo conceito de volume proporcionou uma imersão profunda no ponto de interseção entre a teoria matemática e a prática pedagógica. A análise crítica das teorias de Davydov e Libâneo enfatizou a importância de considerar as diversas formas de aprendizado dos alunos e adaptar as estratégias de ensino para atender às suas necessidades individuais. A aplicação dessas teorias na explanação dos conceitos de volume promoveu uma abordagem mais dinâmica e participativa, incentivando a curiosidade e a autonomia dos estudantes.

Ao explorar a evolução das fórmulas de volume, desde as simplificações iniciais até as generalizações mais complexas, o objetivo não foi apenas transmitir conhecimento, mas também cultivar o pensamento crítico e a capacidade de abstração. A incorporação de exemplos práticos, experimentos visuais e situações palpáveis enriqueceu o processo de aprendizagem, proporcionando aos alunos uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

A introdução da integral dupla como uma ferramenta para generalizar o cálculo de volumes destacou a continuidade do pensamento matemático. Esse passo além das fórmulas tradicionais amplia as perspectivas dos alunos, encorajando-os a perceber a matemática não apenas como um conjunto de regras, mas como uma linguagem flexível e poderosa para descrever e compreender o mundo que os cerca.

A interdisciplinaridade emerge como um tema subjacente, demonstrando como os conceitos matemáticos de volume estão intrinsecamente conectados a outras disciplinas, como física, engenharia e até mesmo artes visuais. Essa abordagem holística não apenas enriquece a compreensão dos alunos, mas também reforça a relevância do estudo da matemática em suas vidas cotidianas e futuras carreiras.

Por fim, este trabalho não representa uma conclusão, mas sim um ponto de partida para futuras investigações e desenvolvimentos. A busca constante por métodos de ensino mais eficazes, a exploração de novas aplicações práticas dos conceitos de volume e a adaptação contínua às mudanças nas teorias educacionais são essenciais para garantir um progresso contínuo na área da educação matemática.

Portanto, encerra-se esta pesquisa com a consciência de que a compreensão do conceito de volume transcende as fórmulas e os cálculos, adentrando em uma apreciação mais profunda da beleza e da universalidade da matemática. Que este trabalho possa servir de inspiração para educadores, estudantes e pesquisadores, incentivando-os a continuar explorando as vastas possibilidades que o estudo do volume e da geometria oferece, enriquecendo, assim, o cenário educacional e científico como um todo.

5 REFERÊNCIAS

BEZERRA, Renata Camacho. **Cálculo de volume nos sólidos geométricos:** trabalhando com o cotidiano do educando. 2014.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

BULLMANN, Cátia Luana; NEHRING, Catia. Aprendizagem da Geometria Espacial: uma Abordagem com o uso do Software GeoGebra e os Registros de Representação Semiótica. In: **VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA-2017**. 2017.

DA SILVA, Bruno Duarte. CÁLCULO DO VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO NA PROPOSIÇÃO DAVYDOVIANA. **Anais do Seminário de Educação, Conhecimento e Processos Educativos**, v. 3, 2019.

DA SILVA, Lais Scorziello Feitosa; ZANON, Thiarla Xavier Dal-Cin; VIEIRA, Rônei Sandro. “Professora, não entendi o problema!” Conversando sobre a interpretação de enunciados que envolvem volume de sólidos. **TANGRAM-Revista de Educação Matemática**, v. 5, n. 4, p. 25-47, 2022.

DAMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática e história da Matemática.** Etnomatemática: novos desafíos teóricos e pedagógicos. Brasil: Editora da UFF, 2009.

DANTAS, Sérgio Carrazedo; MATHIAS, Carmen Vieira. Formas de revolução e cálculo de volume. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 1, p. 142-155, 2017.

DAVYDOV, V.V. **Problemas do Ensino desenvolvimental**: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Trad. José Carlos Libâneo. Educação Soviética, n° 8, agosto, 1988.

DOMINGUES. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

ED ACADEMY, Funções De Várias Variáveis - Integral Dupla: O Teorema de Fubini. Youtube, 29 de junho 2022. Disponível em: https://youtu.be/IsAIo-GrPOk?si=fOsYbk7swO7O84Bc

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

LIBÂNEO, J. C. **A teoria do ensino desenvolvimental e o planejamento de ensino.** Educativa 19 (2): 363-387, 2016.

LIBÂNEO, J.C. **Didática**. Editora Cortez. São Paulo. 1990.

MATHEMATICS ONLINE. **Volume Da Esfera, Como Chegar Na Fórmula** – Animação. Youtube, 9 de junho 2011. Disponível em: https://youtu.be/xuPl_8o_j7k?si=qeiebKMTBEgM1Kyb

MEDEIROS, Leonardo Andrade. **Área e volume da esfera**. 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MENDES, C. **Unidade de Volume- GeoGebra**. Youtube, 13 de agosto 2020. Disponível em: https://youtu.be/T2HBj8FDEjM?si=vniMev8PIx1vy7du

MOTINAGA, E.H.R. **Volume do Prisma e da Pirâmide.** Youtube, 11 de novembro 2022. Disponível em: https://youtu.be/xuPl_8o_j7k?si=qeiebKMTBEgM1Kyb

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; FRAGOSO, Wagner da Cunha. História da Matemática: história de uma disciplina. **Rev. Diálogo Educ**, p. 625-643, 2011.

REVISANDO MATEMÁTICA. **Utilizando o GeoGebra para mostrar o volume de um paralelepípedo**. Youtube, 12 de agosto 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SOUZA, E.M**. Dedução da fórmula para o volume. Youtube,** 2 de setembro 2020. Disponível em: https://youtu.be/xuPl_8o_j7k?si=qeiebKMTBEgM1Kyb

ZANATTA, Rodrigo Bonadiman. **Uma nova visão no ensino de volume de paralelepípedos e no cálculo da densidade de materiais.** 2010.