PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES - EFPH

PUC-GO

ANA CECÍLIA GONÇALVES RESENDE

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE OS POLINÔMIOS PALINDRÔMICOS

Licenciatura em Matemática

Goiânia

2023

ANA CECÍLIA GONÇALVES RESENDE

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE OS POLINÔMIOS PALINDRÔMICOS

BANCA EXAMINADORA

Profª Dr. Duelci Aparecido Freitas Vaz

PUC-GO

Profª Mestre Elias Rafael de Sousa

UNIFAN

Profª Mestre Gean Henrique Godoi

SEDUC

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura, pelo Curso Matemática da Pontificia Universidade Católica. Orientador: Profª Dr. Duelci Aparecido Freitas Vaz

Goiânia

2023

RESUMO

Este trabalho aborda o estudo dos números complexos e polinômios palindrômicos, explorando sua rica história e propriedades matemáticas. O objetivo é proporcionar uma compreensão aprofundada desses temas, contribuindo para o campo da educação matemática. Inicialmente, é apresentada uma contextualização histórica dos números complexos, desde sua concepção até sua consolidação na teoria matemática. São discutidos alguns dos principais marcos e contribuições históricas que levaram ao desenvolvimento dessa área. Em seguida, é feita uma análise dos polinômios palindrômicos, uma classe especial de polinômios que apresentam simetria em relação ao seu eixo vertical. São exploradas as propriedades e características desses polinômios, incluindo a relação entre suas raízes e a simetria dos coeficientes. Um destaque do trabalho é a introdução de um método alternativo para a redução do grau dos polinômios palindrômicos com coeficientes reais. Esse método oferece uma abordagem inovadora para resolver esse problema, fornecendo uma nova perspectiva sobre a manipulação de polinômios palindrômicos. Para facilitar a compreensão dos conceitos e operações discutidos, é utilizado o software GeoGebra, que permite a visualização e a exploração interativa desses tópicos. O GeoGebra é utilizado como suporte, fornecendo ilustrações visuais e exemplos práticos das operações e conceitos abordados. Em conclusão, este estudo oferece uma abordagem dos números complexos e polinômios palindrômicos, fornecendo uma compreensão desses tópicos. Contribui para o campo da educação matemática, oferecendo um recurso valioso para estudantes e professores interessados em explorar esses conceitos de forma mais ampla.

Palavras-chave: Números Complexos, Polinômios Palindrômicos, GeoGebra, História da Matemática.

ABSTRACT

This paper explores the study of complex numbers and palindromic polynomials, delving into their rich history, mathematical properties, and applications. The aim is to provide a comprehensive understanding of these topics, contributing to the field of mathematics education. The historical context of complex numbers is initially presented, tracing their development from conception to their establishment in mathematical theory. Some key milestones and historical contributions that led to the development of this field are discussed. Next, an analysis of palindromic polynomials is conducted, focusing on this special class of polynomials that exhibit symmetry with respect to their vertical axis. The properties and characteristics of these polynomials are explored, including the relationship between their roots and the symmetry of their coefficients. A notable highlight of this work is the introduction of an alternative method for reducing the degree of palindromic polynomials with real coefficients. This innovative method offers a fresh approach to addressing this problem, providing a new perspective on manipulating palindromic polynomials. To facilitate understanding of the concepts and operations discussed, the software GeoGebra is utilized, enabling visualizations and interactive exploration of these topics. GeoGebra serves as a valuable tool, providing visual illustrations and practical examples of the operations and concepts covered. In conclusion, this study offers an in-depth approach to complex numbers and palindromic polynomials, providing a deeper understanding of these topics. It contributes to the field of mathematics education, offering a valuable resource for students and teachers interested in exploring these concepts more comprehensively.

Keywords: Complex Numbers, Palindromic Polynomials, GeoGebra, History of Mathematics.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA AOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao longo da história, a resolução de equações sempre cativou a mente dos matemáticos. Conforme discutido por Eves (2011), foi durante a busca pela solução de equações polinomiais que os números complexos foram descobertos. Durante os séculos XIV a XVII, filósofos, estudiosos e matemáticos de renome, incluindo François Viète (1540-1603), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Rafael Bombelli (1526-1572), Girolamo-(ou Gerônimo) Cardano (1501-1576) e Niccolo Fontana (Tartaglia) (1499-1557), fizeram contribuições fundamentais para a resolução de equações polinomiais de grau superior a dois. Essas descobertas levaram os matemáticos a perceber que era possível criar uma estrutura numérica, que mais tarde seria conhecida como números complexos.

Eves (2011) relata que, em meados de 1515, o professor de matemática Scipione del Ferro (1465-1526), resolveu algebricamente a equação $x^3 + mx = n$, e revelou o resultado somente a Antônio Fior. Duas décadas mais tarde, Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Por conseguinte, Fior o desafiou para uma disputa, onde perdeu já que Tartaglia conseguiu resolver também, a equação cúbica desprovida do termo quadrático, enquanto Fior sabia resolver apenas uma.

Tartaglia, de acordo com Eves (2011), percebeu que toda cúbica poderia ser reduzida a uma cúbica sem o termo quadrático, ou seja, $x^3 + px + q = 0, com$ p e q $\in \mathbb{R}$. Dessa forma suponha que $x = u + v$ é a solução da equação $x^3 + px + q = 0$.

Fazendo $x = u + v$ e elevando ambos os membros da equação ao cubo, temos que:

$$x^3 = (u + v)^3$$

$$x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$

Substituindo $x = (u + v)$ na equação anterior, temos:

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uvx$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0 \qquad \text{(I)}$$

Como,

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \text{(II)}$$

Comparando I e II, temos que:

$$p = -3uv \ \text{ e } \ q = -(u^3 + v^3)$$

Portanto,

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \ \text{ e } \ u^3 + v^3 = -q$$

Contudo u^3 e v^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto, caso este que pode ser resolvido com equações do segundo grau.

Como u^3 e v^3 são as raízes de uma equação quadrática, podemos escrever:

$$y^2 - (u^3 + v^3)y + u^3v^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Logo, pela fórmula de Bhaskara temos que:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \ \text{ e } \ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como $x = (u + v)$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Esse método resolve as equações do terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$. Contudo, a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pode ser transformada em $x^3 + px + q = 0$, basta fazer $x = y + m$ e calcular m de modo a anular o termo de 2º grau, Bombelli ao tentar resolver a equação $x^3 - 15x = 4$, obteve $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$, porém, ainda não era possível extrair raízes quadradas de números negativos, então aceitou a possibilidade e continuou os estudos.

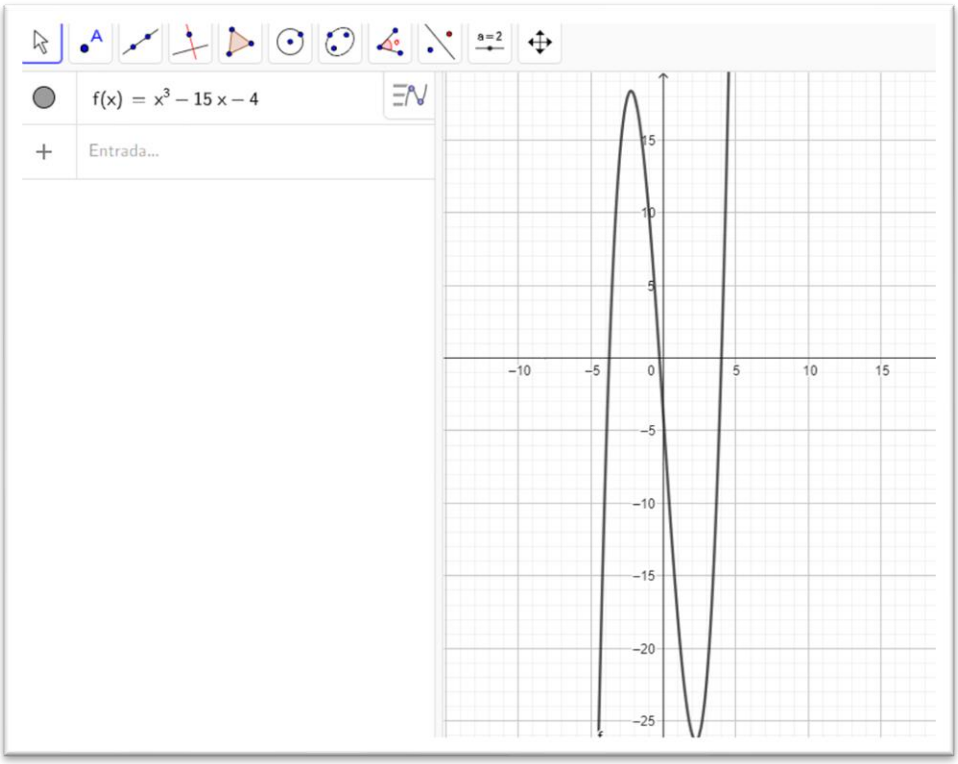
Posteriormente, foi desenvolvida a representação geométrica dos números complexos, conhecida como plano de Argand-Gauss. Essa representação consiste em duas retas perpendiculares: a reta dos números reais, horizontal, e o eixo imaginário, perpendicular, que representa a parte imaginária do número complexo.

A ideia de representar os números complexos geometricamente foi extremamente importante para o desenvolvimento da teoria. Considerar as partes real e imaginária de um número complexo $a + bi$ como as coordenadas de um ponto no plano permitiu que os matemáticos se familiarizassem com a possibilidade de visualização, facilitando a interpretação geométrica de conceitos matemáticos abstratos.

A representação no plano de Argand-Gauss também possibilitou a visualização de operações com números complexos, como adição, subtração, multiplicação e divisão. Além disso, permitiu a descrição geométrica de conceitos fundamentais, como conjugado, módulo e argumento de um número complexo, que desempenham papéis importantes na teoria dos números complexos. De fato, o plano de Argand-Gauss fornece uma maneira intuitiva e elegante de visualizar conceitos complexos, sendo fundamental para a compreensão e aplicação dos números complexos na prática.

Agora que exploramos a rica história e o desenvolvimento matemático por trás da resolução de equações polinomiais e a emergência dos números complexos, é instrutivo visualizar como uma equação cúbica se parece graficamente. Uma equação cúbica pode ter até três raízes reais, e a forma da curva pode variar. A seguir, apresentamos um gráfico de uma equação cúbica típica para ilustração.

Figura 1 - Representação geométrica da função polinomial do terceiro grau $f(x) = x^3 - 15x - 4$



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Na imagem acima, podemos observar o gráfico de uma equação cúbica. É evidente que a curva tem uma forma distinta, e pode cruzar o eixo x em até três pontos, que representam as raízes reais da equação. Este gráfico é um exemplo concreto que ilustra os conceitos que foram desenvolvidos ao longo dos séculos por matemáticos notáveis. A capacidade de visualizar e entender o comportamento de polinômios foi fundamental para avanços em várias áreas da ciência e tecnologia. Como Eves (2011) aponta, o estudo de polinômios e, em particular, de números complexos, continua a ser uma área de pesquisa valiosa e fascinante na matemática moderna.

1.1 INTRODUÇÃO AO CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Na matemática, a extensão de um conjunto numérico para um novo conjunto tem sido uma prática comum ao longo da história. Os números complexos surgiram da necessidade de resolver equações que tinham raízes negativas, as quais não podiam ser resolvidas com os conjuntos numéricos já existentes. Foi necessário criar uma estrutura numérica que pudesse acomodar essas raízes, e assim surgiu o conjunto dos números complexos.

De fato, os números complexos podem ser definidos como números da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária. Essa definição permite a inclusão de números que não pertencem ao conjunto dos números reais. Ademais, os números complexos são uma extensão importante do conjunto dos números reais, que permitiu a solução de equações antes impossíveis de serem resolvidas, além de fornecer uma estrutura numérica versátil e de grande utilidade em várias áreas do conhecimento.

Exemplo. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação do segundo grau $x^2 + 4 = 0$.

$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = -4$$
$$x = \pm\sqrt{-4}$$
$$x = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$$
$$x = \pm 2 \cdot i \text{ , logo } \quad x = +2i \quad \text{ou} \quad x = -2i$$

Um outro exemplo de equação que agora tornou-se possível é a equação de segundo grau com delta negativo $\Delta < 0$.

$\Delta = x^2 + x + 1$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot b$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$

$\Delta = 1 - 4$

$\Delta = -3$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$, logo

$x' = \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot i}{2}$ e $x'' = \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot i}{2}$

2 POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

Na busca por um método para o cálculo de potências de i^n, é essencial compreender que essas potências exibem um comportamento cíclico. Especificamente, quando "i" é elevado a uma potência inteira, a solução resultante segue um padrão que se repete a cada quatro potências subsequentes. É crucial lembrar que "i" é definido como a raiz quadrada de -1, o que lhe confere propriedades únicas e distintas de outros números reais ou complexos.

A natureza cíclica das potências de i é atribuída à propriedade de i de ser uma raiz quadrada de "-1". De fato, elevando-se "i" a uma potência ímpar, resulta em um número imaginário puro com sinal oposto ao valor original de "i". Por outro lado, elevando-se "i" a uma potência par, resulta em um número real, com sinal positivo se a potência for múltipla de quatro, e negativo se for equivalente a duas módulo quatro.

É importante lembrar que:

$i = \sqrt{-1}$.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i^1 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i^1 = i \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$

Ao continuarmos a calcular as potências, as respostas sempre serão elementos do conjunto $\{1, i, -1, -i\}$, então, para encontrarmos uma potência da unidade i^n, faremos a divisão de n (o expoente) por 4, e o resto dessa divisão ($r = \{0, 1, 2, 3\}$) será o novo expoente de i.

Exemplo:

$i^{1083} = i^3 = -i$

1083	4
28	270
0	
3	

$i^{121} = i^1 = i$

121	4
01	30

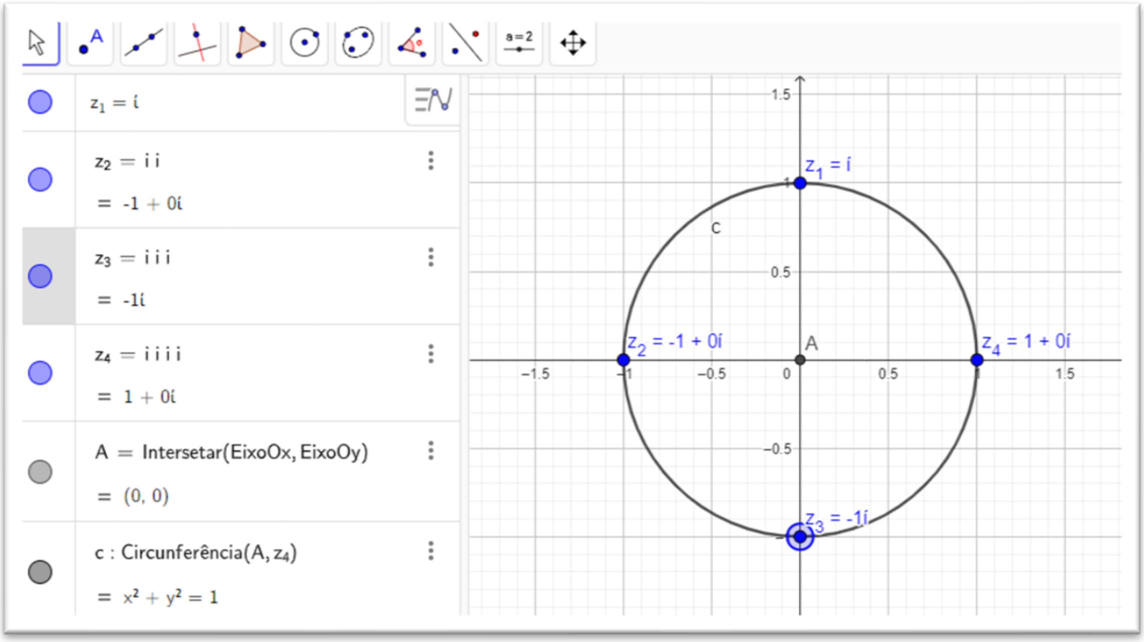
Sobre as potências de "i", é importante destacar que, ao representá-las no plano de Argand-Gauss, o resultado obtido corresponde a uma rotação de 90º no sentido anti-horário, e que cada potência subsequente resulta em uma nova rotação de 90º. É interessante notar que o módulo da potência resultante permanece o mesmo ao longo de todas as rotações.

De fato, a propriedade de rotação das potências de "i" pode ser visualizada geometricamente no plano de Argand-Gauss. Cada potência de "i" corresponde a uma rotação de 90° em torno da origem, onde a direção do eixo real representa a posição inicial e a direção do eixo imaginário representa a direção da rotação. Isso pode ser percebido através das seguintes representações geométricas:

Onde

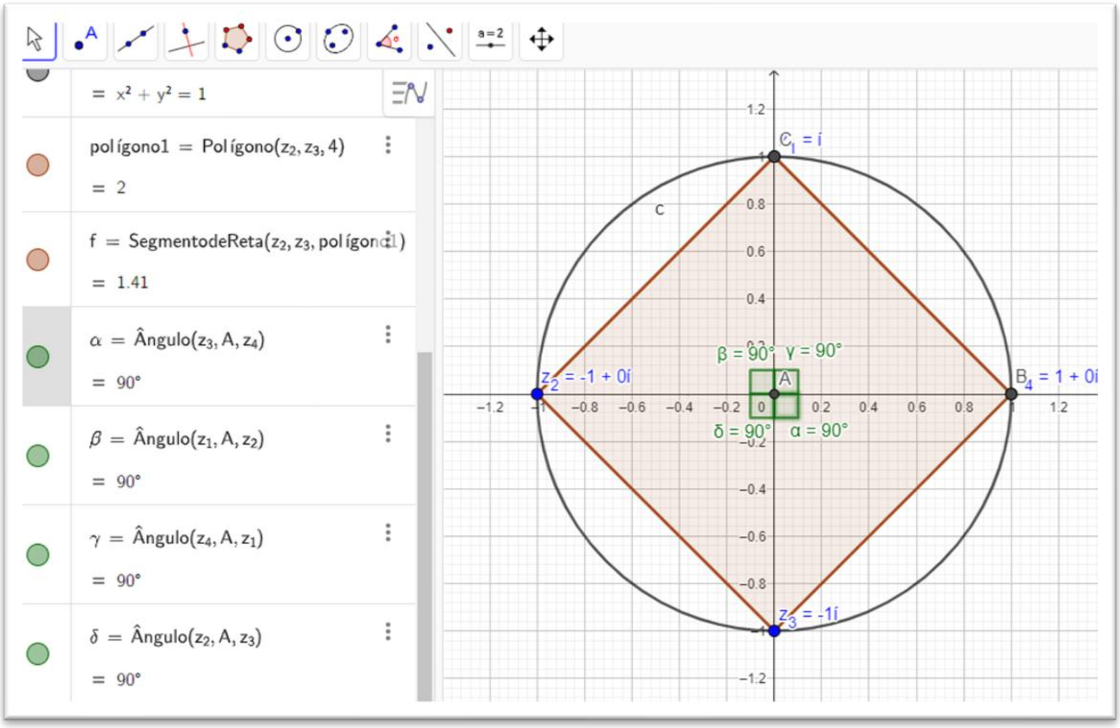
$$z_1 = i$$
$$z_2 = i \cdot i = i^2 = -1$$
$$z_3 = i \cdot i \cdot i = i^3 = -i$$
$$z_4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = i^4 = 1$$

Figura 2 - Círculo unitário, potências de "i".



Fonte: Autoral, GeoGebra, 2023.

Figura 3- Círculo unitário, potências de "i", polígono inscrito com exposição de ângulos e histórico de entrada.



Autoral: GeoGebra, 2023.

3 FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A forma algébrica dos números complexos é um conceito fundamental na teoria dos números complexos, que o descreve na forma $a + bi$, onde a e b são números reais e “i” é a unidade imaginária. Essa forma permite a realização de operações aritméticas com números complexos, como adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como a resolução de equações complexas e a representação de funções complexas. A forma algébrica também é importante na compreensão da geometria dos números complexos, que é frequentemente representada no plano de Argand-Gauss. Nesse plano, os números são representados como pontos no plano, onde a coordenada horizontal é a parte real e a coordenada vertical é a parte imaginária. A forma algébrica é essencial para a interpretação geométrica de conceitos matemáticos abstratos, como conjugado, módulo e argumento.

A forma algébrica é representada do seguinte modo: $\mathrm{z = a + bi}$

Onde a é a parte real e b a parte imaginária, com $a \epsilon \mathbb{R}$, $b \epsilon \mathbb{R}\ e\ i^2 = -1$.

Representação:$Re(z) = a$ a $Im(z) = b$

Exemplo:

a) $2 + 3i$, onde $a = 2\ e\ b = 3$
b) $1 + i$, onde $a = 1\ e\ b = 1$
c) $7 \rightarrow 7 + 0b$, onde $a = 7\ e\ b = 0$
d) $5i \rightarrow 0 + 5i$, onde $a = 0\ e\ b = 5$

Classificação:

A classificação dos números complexos é uma ferramenta importante na teoria pois permite distinguir diferentes tipos de números com propriedades distintas. Existem três principais classificações dos números complexos: número real, imaginário e imaginário puro.

Um número complexo é classificado como número real se sua parte imaginária é zero, ou seja, b = 0 na forma a + bi. Nesse caso, o número complexo reduz-se ao número real correspondente, o que significa que ele pertence ao conjunto dos números reais.

Um número complexo é classificado como imaginário se sua parte real é zero e sua parte imaginária é diferente de zero, ou seja, b ≠ 0 na forma a + bi. Nesse caso, o número complexo não pertence ao conjunto dos números reais, mas pode ser representado como um múltiplo da unidade imaginária i.

Um número complexo é categorizado como imaginário puro quando sua parte real é igual a zero e sua parte imaginária é diferente de zero, isto é, quando $a \neq 0$ e $b = 0$, na forma $a + bi$. Nessa circunstância, o número complexo pode ser expresso como um múltiplo da unidade imaginária "i", evidenciando, dessa maneira, uma propriedade singular em relação a outros números complexos.

Exemplo:

1) Seja $z = (3 - 5m) + (2k + 3)i$. Determine o valor de "m" e "k" de modo que:

a) z seja real.

Para isso, é necessário que a parte imaginária seja igual a zero ($b = 0$),

$$2k + 3 = 0$$

$$2k = -3$$

$$m = \frac{-3}{2}$$

$$k = -\frac{3}{2}$$

Portanto,

$k = -\frac{3}{2}$ e $m \epsilon \mathbb{R}$

b) z seja imaginário puro.

Conforme citado acima, para ser imaginário puro devemos ter, $b \neq 0 \; e \; a = 0$.

$b \neq 0$	$a = 0$
$2k + 3 \neq 0$	$3 - 5m = 0$
$2k \neq -3$	$-5m = -3$
$k \neq -\frac{3}{2}$	$m = \frac{3}{5}$

Portanto, $k \neq -\frac{3}{2}$ e $m = \frac{3}{5}$.

Igualdade

Dois números complexos são iguais se, e somente se, têm partes reais iguais e partes imaginárias iguais.

Considerando os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos que:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \;\; e \;\; b = d$$

Exemplo:

1) $z = 3 + (k-5)i$ e $w = (x^2 - 6) - 2i$ são iguais, calcule k e x.

$$3 = x^2 - 6 \qquad\qquad k - 5 = -2$$
$$-x^2 = -6 - 3 \qquad\qquad k = -2 + 5$$
$$x^2 = 9 \qquad\qquad k = 3$$
$$x = \pm 3$$

$\therefore x = \pm 3$ e $k = 3$.

4 OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA

4.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NA FORMA ALGÉBRICA

Para realizarmos ambas as operações utilizamos a mesma regra: adicionamos ou subtraímos número real com número real e número imaginário com número imaginário.

$a)$ $z = 6 + 4i$ e $w = -1 + 2i$

$z + w = 5 + 6i$

$b)$ $z = 5 + i$ e $w = -1 + 3i$

$z - w = 5 + i - (-1 + 3i)$

$z - w = 5 + i + 1 - 3i$

$z - w = 6 - 2i$

4.1.1 Multiplicação de números complexos na forma algébrica

Para realizarmos a multiplicação de dois números complexos, vamos aplicar a propriedade distributiva. Seja os números complexos $\boldsymbol{z_1} = a + bi$ e $\boldsymbol{z_2} = c + di$

Logo,

$z_1 . z_2 = (a + bi)(c + di)$, aplicando a propriedade distributiva

$z_1 . z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$, mas, como vimos, $i^2 = -1$

$z_1 . z_2 = ac + adi + bci - bd$

$z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo:

Considerando os números complexos $z = 2 + 3i \; e \; w = 3 - 2i$, temos que:

$z \cdot w = 2.3 + (-2i).2 + 3.3i + 3i.(-2i)$

$z \cdot w = 6 - 4i + 9i - 6i^2$

$z \cdot w = 6 + 5i - 6.(-1)$

$z \cdot w = 6 + 5i + 6$
$z \cdot w = 12 + 5i$

Propriedade

Outra propriedade da multiplicação dos números complexos. Dado um determinado número complexo $z = a + bi$, ao multiplicar esse número pela unidade imaginaria "i" sucessivamente, obtêm-se a repetição de resultados, como é possível observar no exemplo abaixo:

$$z_1 = 2 + 4i \tag{I}$$

$$z_2 = i.z_1 = -4 + 2i \tag{II}$$

$$z_3 = i.z_2 = -2 - 4i \tag{III}$$

$$z_4 = i.z_3 = 4 - 2i \tag{IV}$$

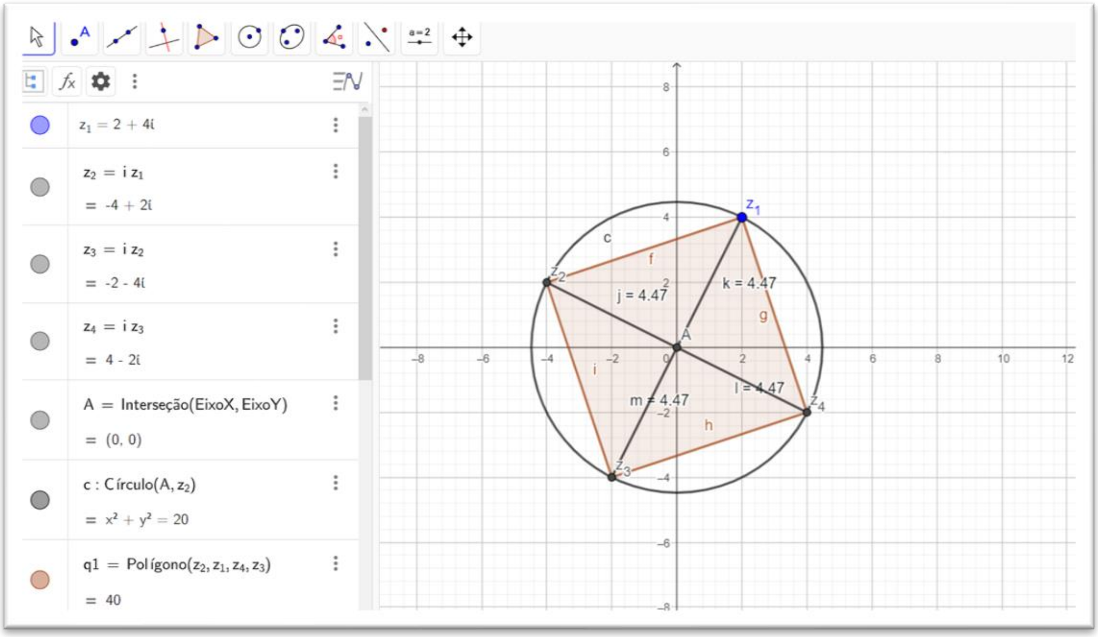
$$z_5 = i.z_4 = 2 + 4i \tag{V}$$

$$z_6 = i.z_5 = -4 + 2i \tag{VI}$$

A análise dos exemplos apresentados revela que, a partir da quarta multiplicação, os resultados passam a se repetir, como pode ser observado a partir da equação (V).

Pode-se observar que cada multiplicação sucessiva está associada a uma rotação de 90°, mantendo o valor absoluto o que é ilustrado na imagem a seguir.

Figura 4 - Ilustração da propriedade de multiplicação dos números complexos.



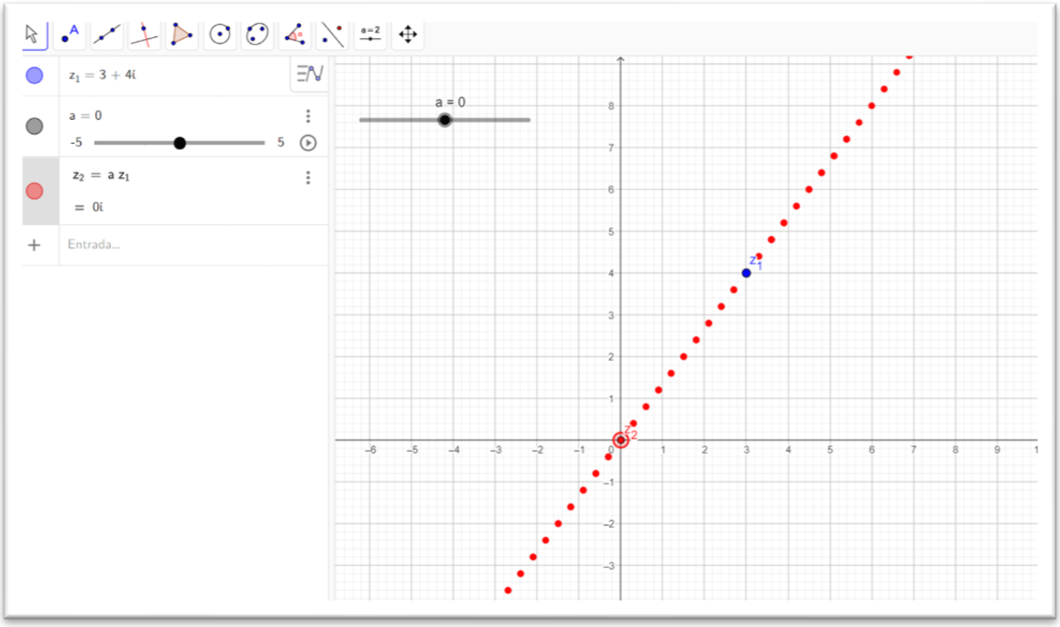
Autoral: GeoGebra, 2023.

Outra propriedade dos números complexos:

Ao multiplicar um número complexo z_1 por um número real puro, equivale a obter pontos de uma reta que passa por z_1 e pela origem $(0,0)$.

No exemplo a seguir, $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$ é multiplicado por números imaginários puros que variam do intervalo $a = [-5,5]$, é possivel observar que o resultado obtido da multiplicação é um conjunto de pontos que passa pela origem e o ponto z_1.

Figura 5 - Demonstração geométrica da multiplicação de números complexos por um imaginário puro.

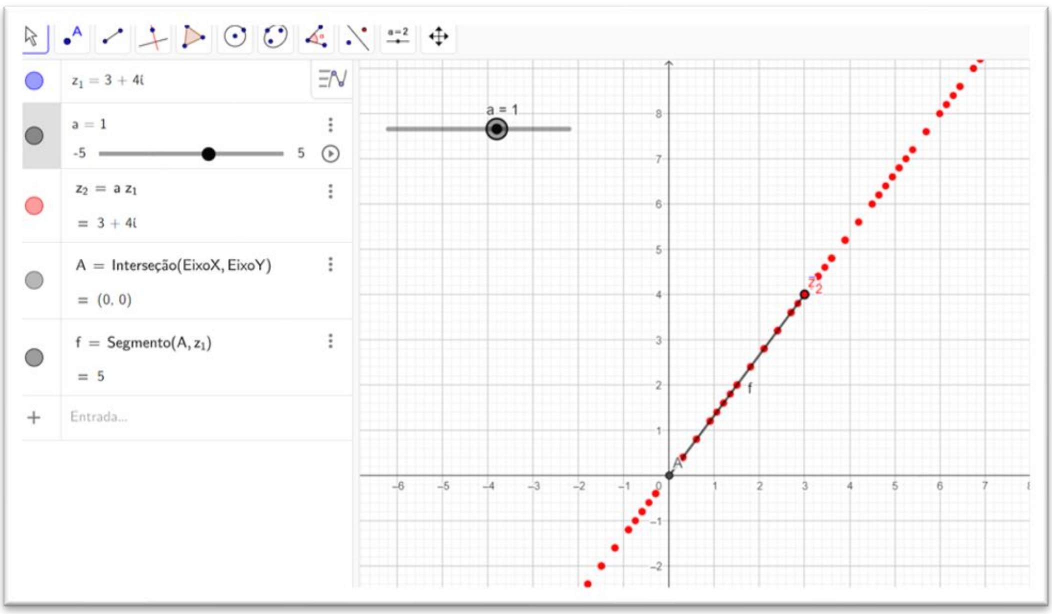


Autoral: GeoGebra, 2023.

Outro ponto a ser observado é que quando

- $a = [0,1]$ ele fica em cima do segmento $f$de z_1
- $a = [-\infty, 0[$ ele fica menor que z_1
- $a =]1, +\infty]$ ele fica maior que z_1

Figura 6- Demonstração geométrica da multiplicação de números complexos por um imaginário puro.



Autoral: GeoGebra, 2023.

4.1.2 Divisão na forma algébrica

Antes de falarmos de divisão, precisamos entender bem o que é o conjugado de um número complexo. O conceito é simples, para encontrarmos o conjugado de um número complexo, basta trocarmos o sinal da parte imaginária**.**

$$z = a + bi \ \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Para realizarmos a divisão de dois números complexos, precisamos multiplicar a fração pelo conjugado do denominador para que fique bem definido o que é a parte real e o que é a parte imaginária.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}, onde\ z_2 \neq 0.$$

Exemplo:

a) $z = 2 - 3i\ e\ w = 3 - i$, calcular $z \div w$:

$$\frac{2-3i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i-9i-3i^2}{9+3i-3i-i^2} = \frac{6-7i+3}{9+1} = \frac{9-7i}{10} = \frac{9}{10} - \frac{7i}{10}$$

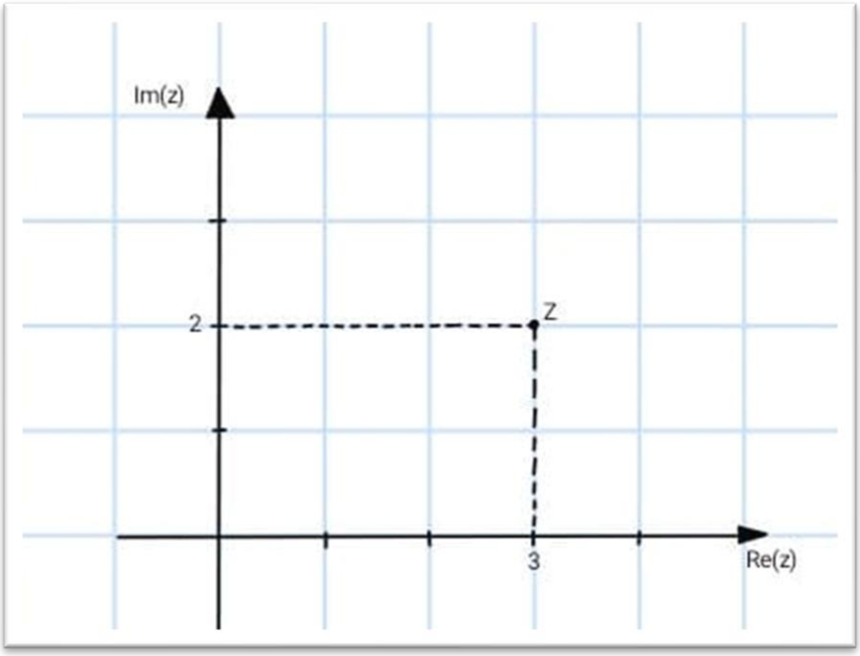
5 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

5.1 PLANO COMPLEXO OU PLANO DE ARGAND-GAUSS

Conhecido como plano complexo ou plano de Argand-Gauss, ele permite a representação na forma geométrica de um número complexo, esse plano é uma identificação como plano cartesiano para representar números complexos. O eixo horizontal é conhecido como eixo da parte real Re(z), e o eixo vertical é conhecido como eixo da parte imaginária Im(z). Então o número complexo representado por a + b*i* gera o ponto no plano complexo formado pelo par ordenado (a, b).

Exemplo: Representação do número 3 + 2*i* na forma geométrica Z (3,2).

Figura 7 - Plano de Argand-Gauss.



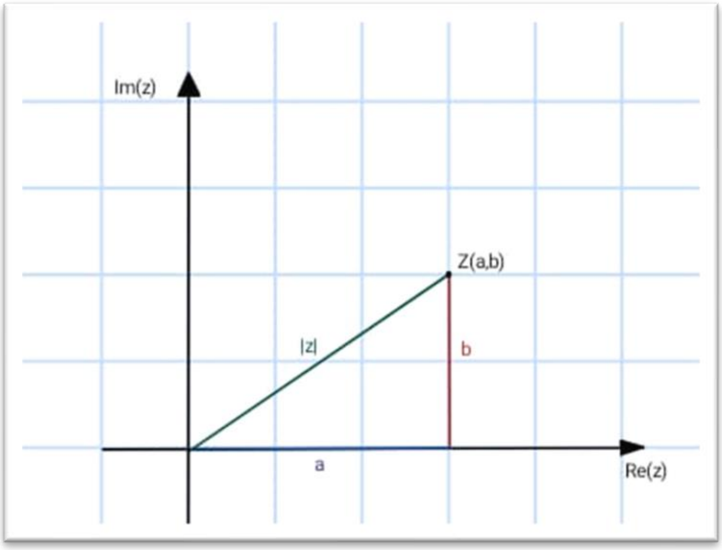
Autoral. Squid, 2023.

5.2 MÓDULO E ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O módulo de um número complexo, geometricamente, é a distância do ponto (a, b) que representa esse número no plano complexo até a origem, ou seja, o ponto (0,0).

Um número complexo $z = a + bi$ é representado por um par ordenado dentro do plano de Argand-Gauss.

Figura 8 - Plano Argand Gauss com módulo.



Autoral. Squid, 2023.

Ao analisarmos a situação, observamos que |z|, corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo. Portanto, podemos calcular esse valor aplicando o Teorema de Pitágoras, o qual estabelece que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo: Cálculo do módulo de $z = 1 + 3i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

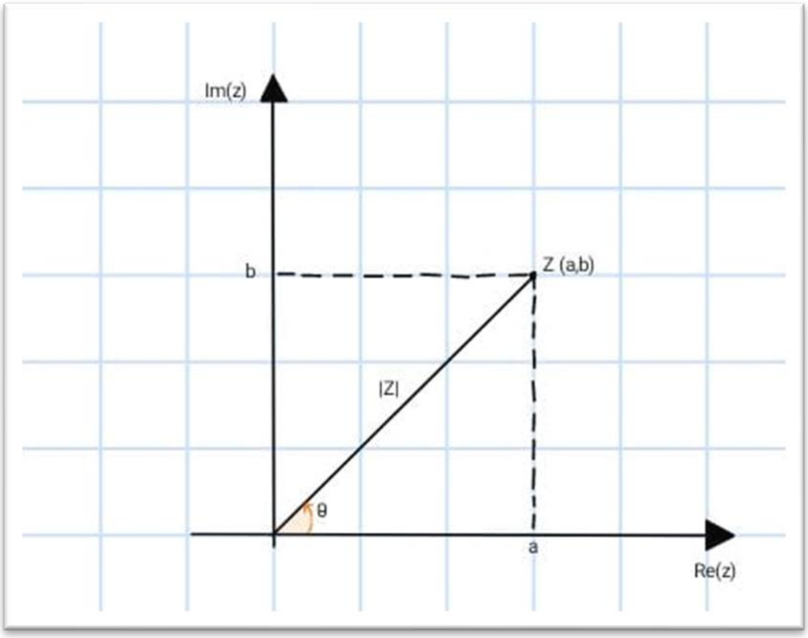
$$|z| = \sqrt{1 + 9}$$

$$|z| = \sqrt{10}$$

5.3 O ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O argumento de um número complexo, geometricamente, é o ângulo formado pelo eixo horizontal e o seguimento |z|.

Figura 9 - Plano Argand Gauss com módulo, ângulo e ponto



Autoral. Squid, 2023.

Para encontrar o valor do ângulo, temos que:

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad (I)$$

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} \qquad (II)$$

O ângulo $\theta = \arg z$

Portanto, $a + bi = |z|cos\theta + i|z|sen\theta \ \rightarrow z = |z|(cos\theta + isen\theta)$:
Um exemplo usando o número complexo $z = 2 + 2i$:

$$|\mathrm{z}| = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$|z| = \sqrt{4 + 4}$$

$$|z| = \sqrt{8} \rightarrow |z| = 2\sqrt{2}$$

Conhecendo-se o |z|, é possível calcular o $sen\theta$ e $cos\theta$.

Calculando o cosseno através da fórmula (I)

$$cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizando a fórmula (II) para o cálculo do Seno

$sen\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Como

$sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = 45°$

$$\frac{180}{45} = \frac{\pi}{x}$$

$$180x = 45\pi$$

$$x = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = 45°$

5.4 EXEMPLOS GEOMÉTRICOS DAS QUATRO OPERAÇÕES NO PLANO DE ARGAND-GAUSS:

Sejam os números complexos $Z = 2 + i$ e $U = 6 + i$.

5.4.1 Representação geométrica da soma de um número complexo

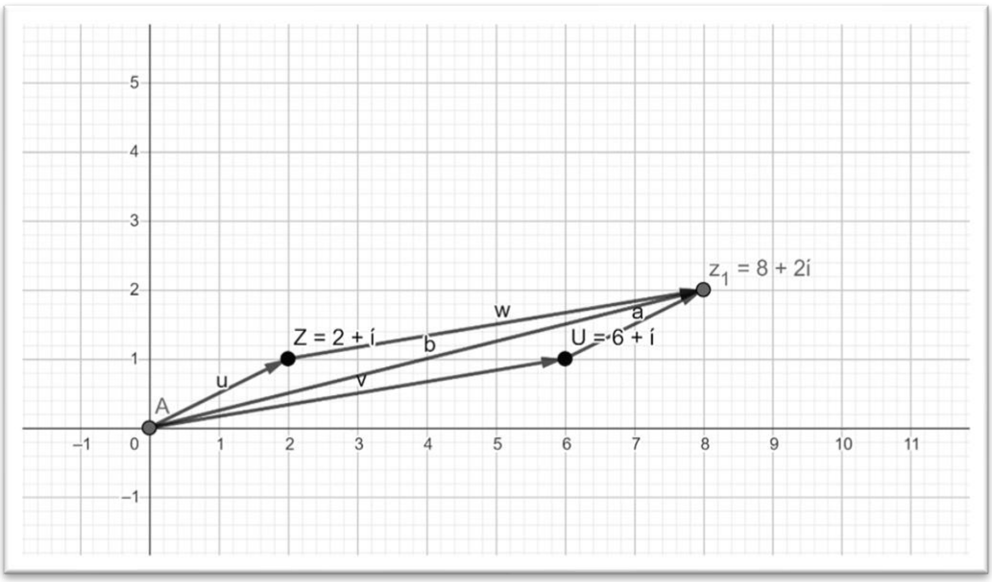
a) Adição: $Z + U$

$$Z + U = (2 + i) + (6 + i)$$

$$Z + U = (2 + 6) + (1 + 1)i$$

$$Z + U = 8 + 2i$$

Figura 10 - Representação geométrica da soma de dois números complexos.



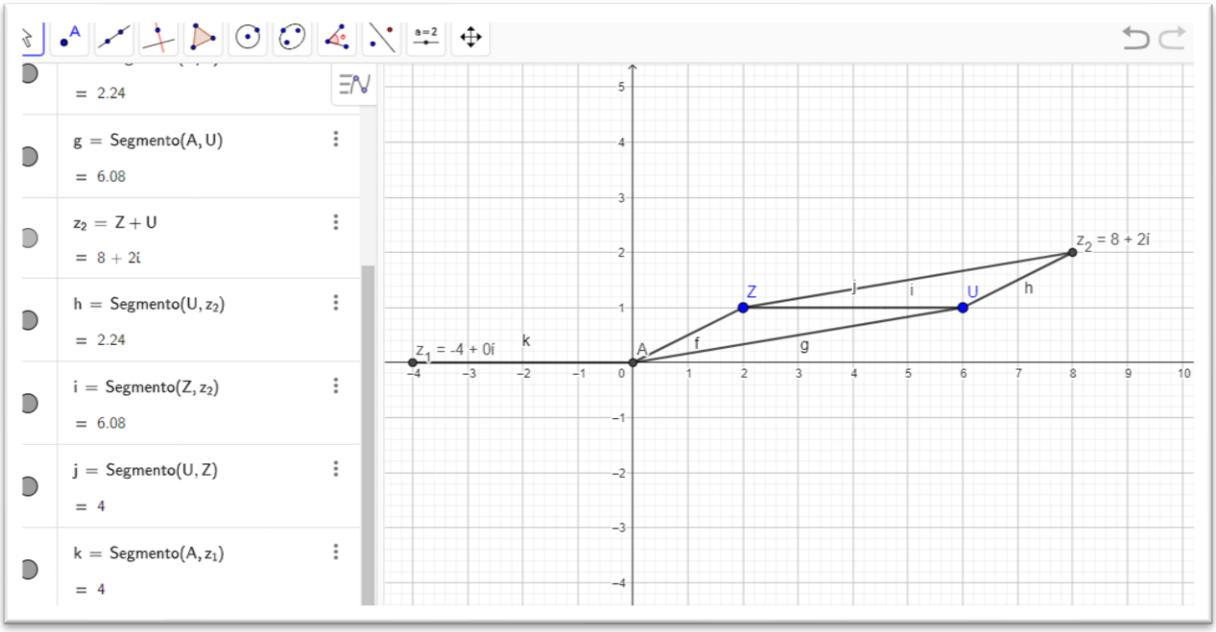
Autoral. Geogebra, 2023.

5.4.2 Representação geométrica da subtração de um número complexo.

b) Subtração: $Z - U$

$Z - U = (2 - 6) + (i - i)$
$Z - U = -4 + 0i$

Figura 11 - Subtração de dois números complexos.



Autoral. GeoGebra, 2023.

5.4.3 Representação geométrica da multiplicação de um número complexo

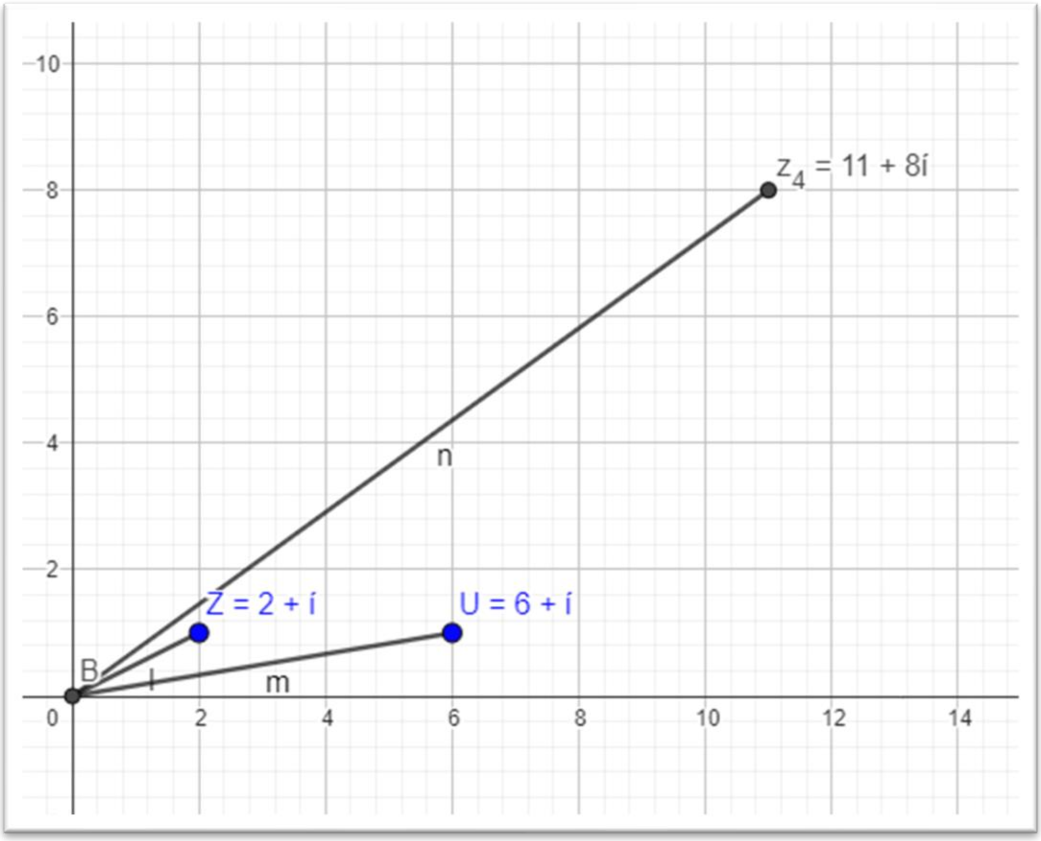
c) Multiplicação: Z.U

$Z.U = 12 + 2i + 6i + i^2$

$Z.U = (12 - 1) + 8i$

$Z.U = 11 + 8i$

Figura 12- Multiplicação de dois números complexos



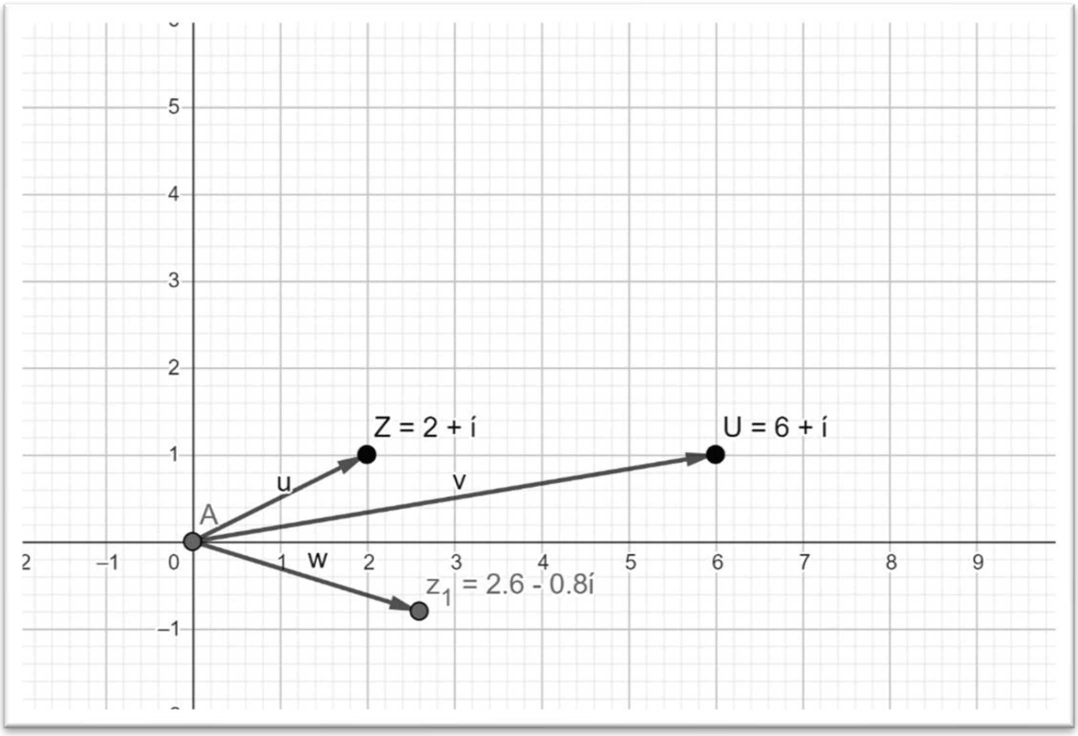
Autoral. GeoGebra, 2023.

5.4.4 Representação geométrica da divisão de números complexos

d) Divisão: $\frac{U}{Z}$

$$\frac{6+i}{2+i} = \frac{6+i}{2+i} . \frac{2-i}{2-i} = \frac{12-6i+2i-i^2}{4-2i+2i-i^2} = \frac{13-4i}{4} = \frac{13}{4} - \frac{4i}{4} = 2{,}6 - 0{,}8i$$

Figura 13 - Divisão de dois números complexos.



Autoral. GeoGebra, 2023.

6 FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A forma trigonométrica dos números complexos, também conhecida como forma polar, é uma representação matemática alternativa e notável para os números complexos. Diferente da forma cartesiana, que utiliza as coordenadas retangulares (x, y) para expressar números complexos, a forma trigonométrica emprega coordenadas polares $(|z|, \theta)$ para denotar a posição de um número complexo no plano complexo. A adoção dessa representação permite uma compreensão mais profunda e uma manipulação mais eficiente de números complexos em contextos analíticos e geométricos.

Os números complexos, que consistem em uma parte real e uma parte imaginária, são expressos na forma cartesiana como $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária. Para converter essa representação para a forma trigonométrica, precisamos determinar o módulo $(|z|)$ e o argumento (θ) do número complexo. O módulo é a distância do número complexo à origem no plano complexo, calculada por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. O argumento é o ângulo entre o eixo real e a linha que liga a origem ao ponto representando o número complexo no plano complexo, medido no sentido anti-horário a partir do eixo real.

Com o módulo e o argumento calculados, podemos expressar o número complexo na forma trigonométrica: $z = |z|\big(\cos(\theta) + i.sen(\theta)\big)$. Essa representação facilita operações como multiplicação e divisão de números complexos, assim como a potenciação de números complexos e radiciação.

6.1 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

6.1.1 Multiplicação na forma trigonométrica

Sejam $Z_1 = |Z_1|(cos \propto +i.sen \propto)$ e $Z_2 = |Z_2|.(cos\theta + i.sen\theta)$ dois números complexos na forma trigonométrica.

O produto é obtido multiplicando os módulos, somando os argumentos e calculando o seno e cosseno, conforme a fórmula dada.

Dado Z_1 e Z_2, tal que:

$Z_1 = |Z_1|(cos \propto +i.sen \propto)$

$Z_2 = |Z_2|.(cos\theta + i.sen\theta)$

$Z_1.Z_2 = |Z_1|(cos \propto +i.sen \propto).|Z_2|.(cos\theta + i.sen\theta)$

$Z_1.Z_2 = |Z_1|.|Z_2|(cos \propto .cos\theta - sen \propto .sen\theta + isen \propto .cos\theta + icos \propto .sen\theta)$

$Z_1.Z_2 = |Z_1||Z_2|.[\cos(\propto +\theta) + isen(\propto +\theta)]$

Exemplo:

$Z_1 = 2(\text{cos}45° + \text{isen}45°)$ e $Z_2 = \sqrt{3}(\text{cos}30° + \text{isen}30°)$

$Z_1.Z_2 = 2\sqrt{3}(cos75° + isen75°)$

6.1.2 Divisão na forma trigonométrica.

Para divisão é necessário dividir os módulos e subtrair os argumentos.

$$\frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}} = \frac{|Z_1|}{|\boldsymbol{Z_2}|}.[\text{Cos}(\propto -\theta) + isen(\propto -\theta)]$$

De fato,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|(cos \propto +i.sen \propto)}{|Z_2|(cos \propto +i.sen \propto)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}.\frac{(cos \propto +isen \propto)(cos\theta - isen\theta)}{(cos\theta + isen\theta)(cos\theta - isen\theta)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}.\frac{(cos \propto .cos\theta + sen \propto .sen\theta + isen \propto .cos\theta - icos \propto .sen\theta)}{cos^2\theta + sen^2\theta}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}.[\cos(\propto -\theta) + isen(\propto -\theta)]$$

Exemplo:

$$Z_1 = 3(cos2\pi + isen2\pi)\ e\ \ Z_2 = 2(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3}{2}\left(cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right) \qquad\qquad 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

7 RADICIAÇÃO E POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

A utilização das fórmulas de De Moivre facilita a potenciação e a radiciação de números complexos na forma trigonométrica. Essa fórmula permite elevar um número complexo na forma trigonométrica a uma potência e obter o resultado também na forma trigonométrica. Além disso, ela pode ser usada para calcular raízes de números complexos.

Vejamos como se procede a radiciação desses números:

Considere um número complexo qualquer $z = a + bi$. A forma trigonométrica de z é:

$$z = |z|(cos\theta + i.sen\theta)$$

7.1 FÓRMULA DE DE MOIVRE

Considerando $Z_j = |Z_j|\left(cos\theta_j + isen\theta_j\right),\ 1 \leq j \leq n$

Aplicando o produto para o caso geral, temos que:

$$Z_1.Z_2 \ldots Z_n = |Z_1|.|Z_2| \ldots |Z_n|.[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n), \forall\ n\ \epsilon\ N$$

Demonstração

Adotando $p = |z|$

e utilizando o princípio da indução finita,

i) Caso $n = 1$

De fato, pois

$Z_1 = |p|(cos\theta_1 + isen\theta_1),$ representação polar do número complexo.

ii) Supondo que $n = k$ é verdadeiro, temos que:

$$Z_1 . Z_2 \dots Z_k = p_1 . p_2 \dots p_k . [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k)] \quad \text{(I)}$$

Vamos provar que a equação também é válida para $n = k + 1$

$Z_1 . Z_2 \dots Z_k . Z_{k+1} = p_1 . p_2 \dots p_k [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k)] \cdot Z_{k+1}$, pela hipótese de indução $Z_{k+1} = p_{k+1} . (cos\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1})$, segue que

$$Z_1 . Z_2 \dots Z_k . Z_{k+1} = p_1 . p_2 \dots p_k . [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k)] . |p_{k+1}|(cos\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1}) =$$

$$Z_1 . Z_2 \dots Z_k . Z_{k+1} = p_1 . p_2 \dots p_k . [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) .] p_{k+1}(cos\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1}) =$$

$$p_1 . p_2 \dots p_k . p_{k+1} [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) . cos\, \theta_{k+1} - sen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) . sen\theta_{k+1} + isen\theta_{k+1} \cos\, (\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) + isen(cos\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k) cos\theta_{k+1}] =$$

$$= p_1 . p_2 \dots p_k . p_{k+1} [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k + \theta_{k+1}) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_k + \theta_{k+1})] =$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, temos que

$$Z_1 . Z_2 \dots Z_n = p_1 . p_2 \dots p_n . [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n)], \forall\, n \in N$$

Em particular, se $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ e $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$, temos a 1ª fórmula de De Moivre:

$$z^n = (cos\theta + isen\theta)^n = p^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

7.2 POTENCIAÇÃO

Ao elevar ambos os lados da equação a um expoente “n’” onde "n" pertence ao conjunto dos números naturais positivos (N^*), é possível aplicar a operação de potência ao número complexo "Z". Dessa forma, obtemos $Z^n = |z|^n . (cosn\theta + isen(n\theta))$ em que |z| representa o módulo de "z" e θ é o argumento de "z" no plano complexo.

A propriedade mencionada demonstra que, ao elevar um número complexo, na forma trigonométrica, à potência "n", eleva-se seu módulo à enésima potência, enquanto o argumento é multiplicado por "n". Essa representação polar do número complexo $Z^n = |z|^n . (cosn\theta +$

$isen(n\theta))$ indica as diversas representações que um número complexo pode assumir no plano complexo, dependendo do valor do expoente "n".

Essa observação é relevante, pois evidencia a relação entre as operações de potenciação e as propriedades trigonométricas dos números complexos. Essas propriedades são fundamentais para a compreensão do comportamento dos números complexos e suas representações no ciclo trigonométrico, proporcionando uma visão mais abrangente e aprofundada desses números no contexto matemático.

i. Se: $|z| = 1$

Exemplo: $|z| = 1 \; e \; n = 2$

$$1^2 = |1|^2.(cos2\theta + isen2\theta) = (cos2\theta + isen2\theta)$$

ii. Se $|z| > 1$

Ao elevar um número complexo a um expoente "n", observa-se um comportamento interessante: o módulo desse número complexo resultante diminui à medida que "n" aumenta, enquanto o ângulo é multiplicado por "n". Esse fenômeno é conhecido como "espiral de aproximação" ou "atrator" em referência ao padrão formado no plano complexo.

Essa espiral de aproximação é visualmente evidenciada por uma sequência de pontos que formam uma trajetória em espiral em direção à origem do plano complexo. À medida que "n" aumenta, os pontos da espiral se aproximam cada vez mais da origem.

A compreensão dessa propriedade é essencial para explorar as características dinâmicas dos números complexos e sua relação com a operação de potenciação. Além disso, a observação da formação da espiral e seu comportamento convergente contribui para a compreensão dos conceitos fundamentais da teoria dos números complexos.

Exemplo: $|z| = 2 \; e \; n = 2$

$$2^2 = |2|^2.(cos2\theta + isen2\theta)|4|.(cos2\theta + isen2\theta)$$

iii. Se $|z| < 1$

Exemplo: $|z| = \frac{1}{2} \; e \; n = 2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 . (cos2\theta + isen2\theta)$$

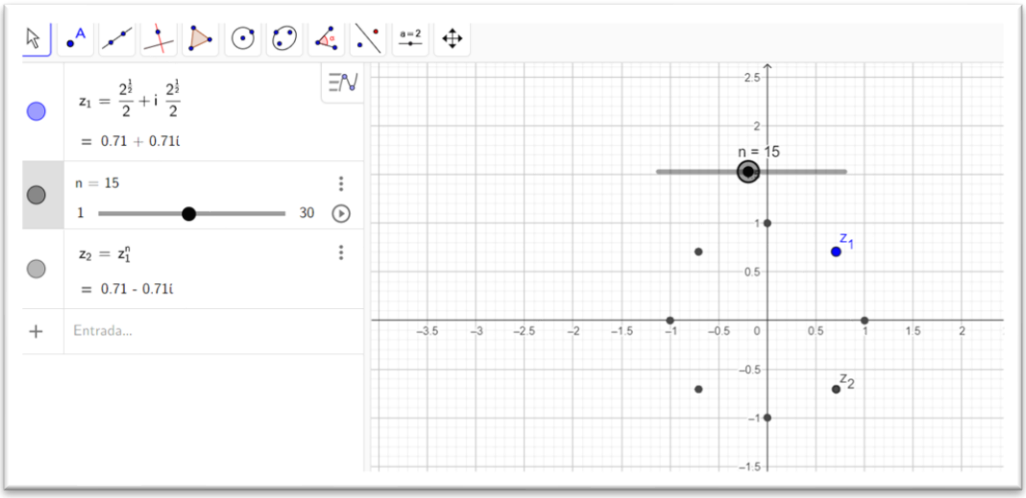
$$\frac{1}{4} = \left|\frac{1}{4}\right| . (cos2\theta + isen2\theta)$$

Exemplo Geométrico de $|z| = 1$

Potências de n quando o $|z| = 1$.

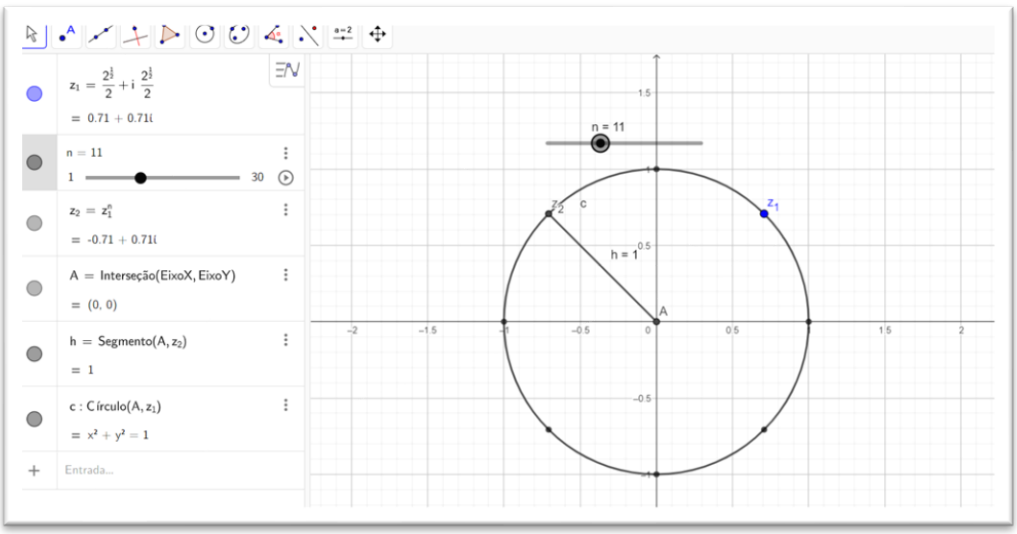
Dado o número complexo $z_1 = 2\sqrt{2} + i.2\sqrt{2}$ elevado a uma potência n onde n compreende o intervalo $[1\ ,30]$, obtem-se uma circunferência de módulo $|1|$.

Figura 14 - Representação geométrica das potências de "n" em um número complexo.



Autoral. GeoGebra, 2023.

Figura 15 - Representação geométrica das potências de "n" em um número complexo, círculo unitário.



Autoral. GeoGebra, 2023.

7.3 RADICIAÇÃO

As raízes de índice “n”, onde $n \geq 2$, são dadas pela segunda fórmula de De Moivre.

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k \in \{0,1,2,3,\dots,n-1\}$

Após $k = n - 1$, os valores começam a repetir. Então, de $zero$ até $n - 1$, portanto, é possível observar “n” raízes distintas.

Exemplo: Determine as raízes quadradas de 2i.

Solução: Primeiro devemos escrever o número complexo na forma trigonométrica.

Todo do número complexo é da forma z = a + bi. Assim, temos que:

$$z = 2i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Sabemos também que:

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{2} = 0$$

Com os valores de seno e cosseno podemos concluir que:

$$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$$

Assim, a forma trigonométrica de $z = 2i$ é dada por $z = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2}\right)$

Agora, vamos calcular as raízes quadradas de “z” utilizando a fórmula de De Moivre.

$$z_k = \sqrt[2]{|2|}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)+i.sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)\right]; k \in \{0,1\}$$

Como queremos as raízes quadradas de "z", obteremos duas raízes distintas $z_0\ e\ z_1$;

Para $k = 0$.

$$z_0 = \sqrt[2]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2}+\frac{2.0.\pi}{2}\right)+i.sen\left(\frac{\pi/2}{2}+\frac{2.0.\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[2]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.sen\frac{\pi}{4}\right)$$

Para $k = 1$, teremos:

$$z_1 = \sqrt[2]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2}+\frac{2.1.\pi}{2}\right)+i.sen\left(\frac{\pi/2}{2}+\frac{2.1.\pi}{2}\right)\right] = \sqrt[2]{2}\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i.sen\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i.sen\frac{5\pi}{4}\right)$$

7.3.1 Raízes enésimas de um número complexo

As raízes enésimas (n) de um número complexo $z = p(cos\theta + isen\theta)$ possuem seus afixos sobre uma circunferência com centro na origem e raio $r = \sqrt[n]{p}$, onde r é o módulo das raízes. Estas raízes dividem a circunferência em "n" partes iguais ($\frac{360°}{n}$). O menor argumento das raízes é dado por $\frac{\theta}{n}$, já o argumento das raízes seguintes é obtido somando-se a $\frac{\theta}{n}$ o valor de $\frac{360°}{n}$.

O Teorema da raiz complexa conjugada afirma que se P é um polinômio em uma variável com coeficientes reais, e se $a + bi$ é uma raiz de P, então o seu conjugado $a - bi$ também é uma raiz de P.

Exemplo:

1- Determinar as raízes sextas do número $z = 32\sqrt{3} + 32i$

Resolução

- Colocar na forma trigonométrica

$$p\left(32\sqrt{3}, 32\right)$$

Onde $32\sqrt{3} = x$ e $32 = y$ e ambos estão no 1° quadrante.

$$p = \sqrt{\left(32\sqrt{3}\right)^2 + 32^2}$$

$$p = \sqrt{32^2.(3+1)} = 32.2 = 64$$

$$sen\theta = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$cos\theta = \frac{32\sqrt{3}}{64} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30º\ ou\ \frac{\pi}{6}rad$$

Colocando na forma trigonométrica, temos:

$$z = 64(cos30° + isen30°)$$

O módulo das 6 raízes é dado pelo raio da circunferência $r = \sqrt[n]{p} \rightarrow r = \sqrt[6]{64} = 2$

O menor argumento, é $\frac{\theta}{n}$, portanto, $\frac{30°}{6} = 5°$, que são dívidas em 6 partes iguais de $\frac{360°}{6} = 60º$

Outros argumentos são

$$5° + 60° = 65°$$

$$65° + 60° = 125°$$

$$125° + 60° = 185$$

$$185° + 60° = 245°$$

$$245° + 60 = 305°$$

Ao colocarmos na forma trigonométrica, as 6 raízes são:

$$R_1 = 2(cos5° + i.sen5°)$$

$$R_2 = 2(cos65° + i.sen65°)$$

$$R_3 = 2(cos125° + i.sen125°)$$

$$R_4 = 2(cos185° + i.sen185°)$$

$$R_5 = 2(cos245° + i.sen245°)$$

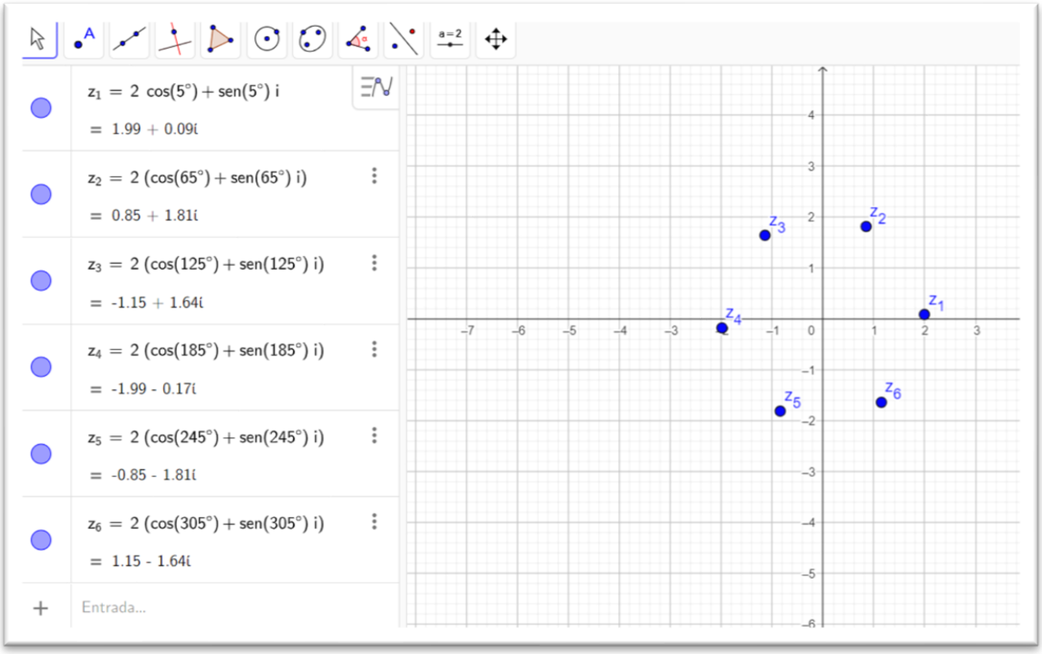
$$R_6 = 2(cos305° + i.sen305°)$$

É possível afirmar que cada uma das raízes elevadas a 6° potência obterão o resultado $32\sqrt{3} + 32i$.

Uma propriedade fundamental aplicável a todas as raízes enésimas de um número complexo dado é que essas raízes formam um polígono regular, com o centro localizado na origem. Além disso, a soma de todas as raízes enésimas é igual a zero.

Tomando como exemplo os valores calculados acima:

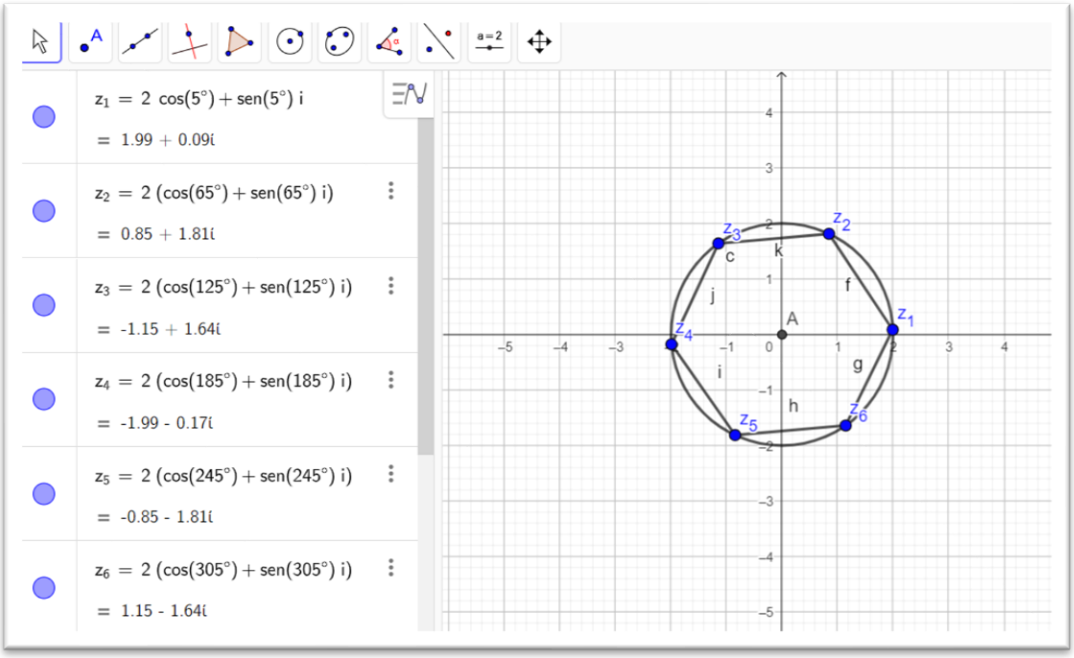
Figura 16 - Representação geométrica das raízes de um número complexo.



Autoral. GeoGebra, 2023.

Consequentemente, de acordo com a propriedade geométrica bem estabelecida de que um polígono é regular se e somente se pode ser inscrito em uma circunferência, podemos afirmar que essa propriedade se aplica às raízes enésimas de um número complexo.

Figura 17 - Representação geométrica do Hexágono regular proveniente da radiciação dos números complexos.



Autoral. GeoGebra, 2023.

8 POLINÔMIOS

Os polinômios são uma classe importante de funções matemáticas que são amplamente estudadas em diversas áreas da matemática e aplicadas em muitas outras áreas, como física, engenharia e ciência da computação. De forma simples, um polinômio é uma expressão matemática formada pela soma de termos que possuem “x” coeficientes numéricos e variáveis elevadas a expoentes inteiros não negativos.

Definição: Um polinômio de uma variável x é uma expressão matemática da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Onde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ e a_0 são números reais (ou complexos), chamados de coeficientes do polinômio.
- “x” é a variável do polinômio.
- Se todos os coeficientes forem iguais a zero, dizemos que o polinômio é identicamente nulo, ou simplesmente que o polinômio é nulo.
- Em um polinômio não nulo, o coeficiente a_n do termo $a_n x_n$ em que “n” é o maior inteiro tal que a se difere de zero, é o coeficiente dominante do polinômio. Nesse

caso, dizemos que o grau do polinômio é “n”. Se o polinômio é nulo, o seu grau não é definido.

- Os coeficientes podem ser representados por qualquer número real ou complexo, e a variável pode ser substituída por qualquer expressão que possua um valor numérico, como uma constante ou uma função.
- O valor da variável para quando o resultado é igual a zero é chamado de raiz do polinômio.

8.1 IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Definição de Igualdade de Polinômios. Dois polinômios $p(x)$ e q(x) são iguais se, e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $\alpha \epsilon \mathbb{C}$.. Em outras palavras, dois polinômios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \; a_1 x^1 + a_0$$

e

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \; b_1 x^1 + b_0$$

São iguais se, e somente se, $a_n = b_n$ para todo $n = 0, 1, \ldots$ Isso significa que os polinômios p(x) e q(x) têm a mesma ordem, os mesmos termos e os mesmos coeficientes.

8.1.1 Propriedades de Igualdade de Polinômios

A igualdade de polinômios tem algumas propriedades que são importantes para sua manipulação e resolução de problemas. Essas propriedades incluem:

- Propriedade reflexiva: todo polinômio é igual a si mesmo.
- Propriedade simétrica: se $p(x) = q(x)$, então q(x) = p(x).
- Propriedade transitiva: se $p(x) = q(x)$ e $q(x) = r(x)$, então $p(x) = r(x)$.
- Propriedade da adição: se $p(x) = q(x)$ e $q(x) = s(x)$, então $p(x) + r(x) = q(x) + s(x)$.
- Propriedade da multiplicação: se $p(x) = q(x) \; e \; r(x) = s(x)$, então $p(x). r(x) = q(x). s(x)$.

Exemplos de Igualdade de Polinômios

Aqui estão alguns exemplos que ilustram a igualdade de polinômios:

a) $p(x) = x^2 + 2x + 1$ e $q(x) = (x + 1)^2$ são iguais, pois todos os coeficientes correspondentes são iguais.
b) $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ são iguais, pois todos os coeficientes correspondentes são iguais.
c) $p(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ e $q(x) = (x + 2)^3$ não são iguais.

8.2 ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, E MULTIPLICAÇÃO COM POLINÔMIOS

A adição, subtração e multiplicação com polinômios são operações fundamentais que permitem realizar diversas manipulações algébricas, como simplificação de expressões, resolução de equações e identificação de padrões matemáticos.

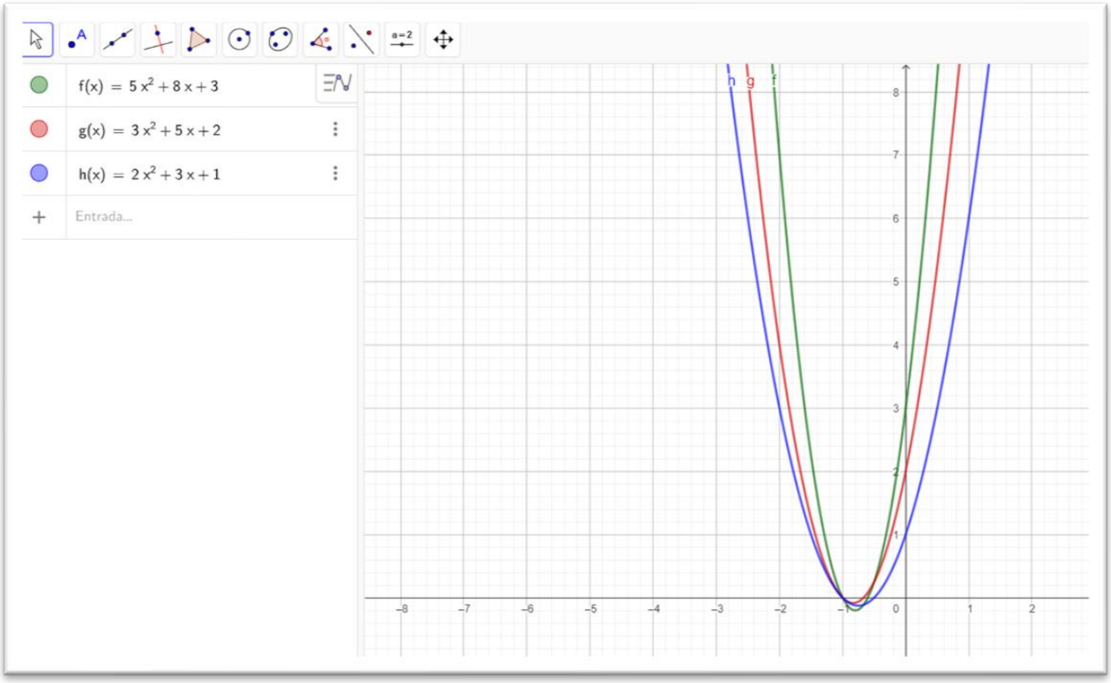
8.2.1 Adição e Subtração de Polinômios

A adição e subtração de polinômios são operações semelhantes que consistem em combinar termos semelhantes e reduzi-los a um único termo. Dois termos são considerados semelhantes se possuem a mesma variável elevada a um mesmo expoente. Por exemplo, os termos $3x^2\ e\ 4x^2$ são semelhantes, enquanto $3x^2 e\ 4x$ não são semelhantes e não podem ser combinados.

Para adicionar ou subtrair dois polinômios, basta adicionar ou subtrair os coeficientes dos termos semelhantes. Por exemplo, considere os polinômios $P(x) = 3x^2 + 5x + 2\ e\ Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Para adicioná-los, basta adicionar os coeficientes dos termos semelhantes:

$$P(x) + Q(x) = (3x^2 + 5x + 2) + (2x^2 + 3x + 1) = 5x^2 + 8x + 3$$

Figura 18 - Representação geométrica da soma de polinômio.

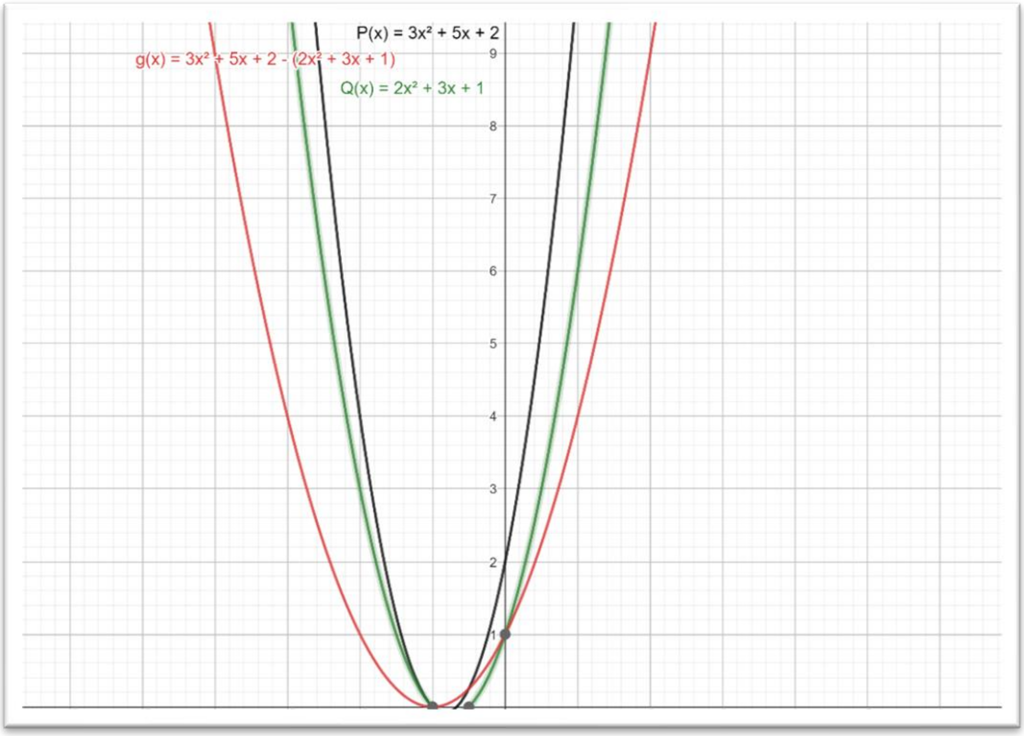


Autoral. GeoGebra, 2023.

Para subtrair, basta subtrair os coeficientes dos termos semelhantes:

$$P(x) - Q(x) = (3x^2 + 5x + 2) - (2x^2 + 3x + 1) = x^2 + 2x + 1$$

Figura 19 – Representação geométrica da subtração de Polinômios



Autoral. GeoGebra, 2023.

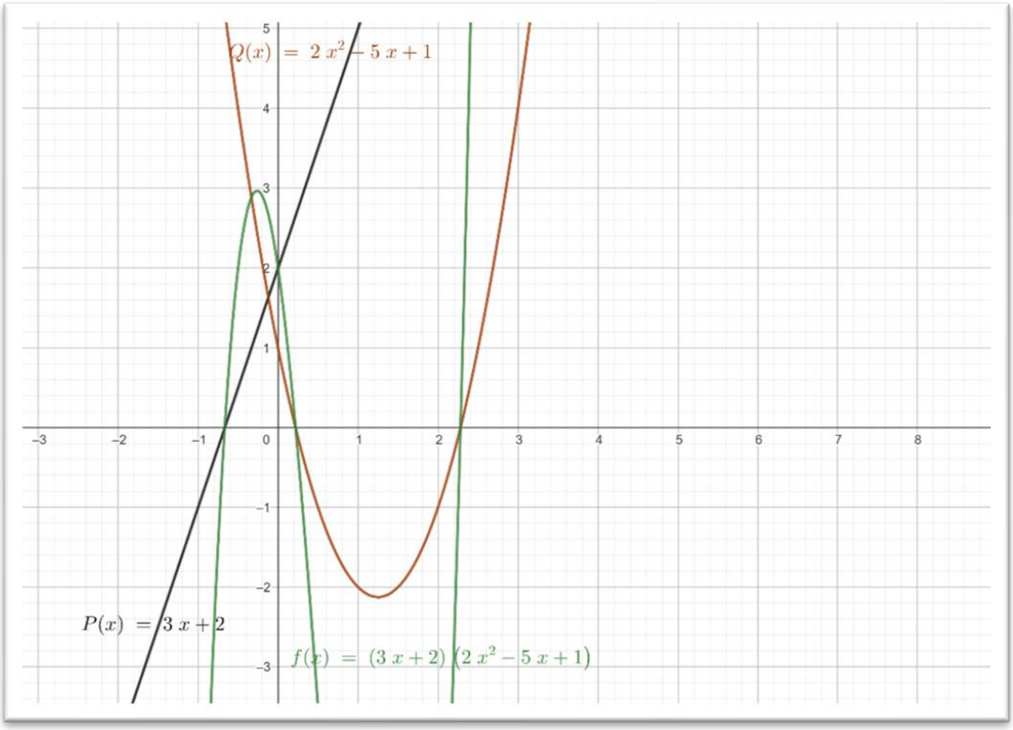
8.2.2 Multiplicação de Polinômios

A multiplicação de polinômios é um pouco mais complexa do que a adição e subtração, mas é fundamental para a resolução de muitos problemas matemáticos. Para multiplicar dois polinômios, basta distribuir cada termo de um pelo outro e depois adicionar os resultados. Por exemplo, considere os polinômios $P(x) = 3x + 2 \; e \; Q(x) = 2x^2 - 5x + 1$. Para multiplicá-los, basta distribuir cada termo de $P(x)$ por $Q(x)$ e adicionar os resultados:

$$P(x) \cdot Q(x) = (3x + 2) \; \cdot (2x^2 - 5x + 1)$$

$$P(x) \cdot Q(x) = (3x)(2x^2) + (3x)(-5x) + (3x)(1) + (2)(2x^2) + (2)(-5x) + (2)(1)$$
$$= 6x^3 - 15x^2 + 3x + 4x^2 - 10x + 2$$
$$= 6x^3 - 11x^2 - 7x + 2$$

Figura 20 - Representação geométrica da multiplicação de polinômios.



Autoral. GeoGebra, 2023.

8.2.3 Divisão de Polinômios

A divisão de polinômios é um procedimento matemático que consiste em dividir um polinômio, denominado dividendo, por outro polinômio, conhecido como divisor. Essa operação resulta em um quociente e, assim como na divisão de números inteiros, é possível haver um resto. A divisão de polinômios desempenha um papel fundamental na simplificação e resolução de equações polinomiais, permitindo a decomposição de problemas complexos em etapas mais gerenciáveis. Por meio dessa técnica, é possível explorar as relações entre os termos de um polinômio e obter informações valiosas sobre suas propriedades e comportamentos. Ao compreender os princípios e métodos subjacentes à divisão de polinômios, ampliamos nossa capacidade de solucionar equações, fatorar polinômios e explorar conceitos mais avançados da álgebra.

8.3 TEOREMA DO RESTO

Um dos teoremas mais importantes na divisão de polinômios é o Teorema do Resto. Este teorema afirma que quando um polinômio P(x) é dividido pelo polinômio linear $(x - a)$, o resto da divisão é igual a P(a). Em outras palavras, se P(x) é dividido por (x - a), então R(x) = P(a). Sendo assim, temos:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Onde Q(x) é o quociente da divisão e R(x) é o resto. O Teorema do Resto é uma ferramenta poderosa para fatorar polinômios e encontrar raízes.

Conclusão: A divisão de polinômios é uma operação importante na álgebra e é fundamental em muitas áreas da matemática. O Teorema do Resto é uma ferramenta poderosa para fatorar polinômios e encontrar raízes, enquanto o método da divisão sintética é uma técnica eficiente para simplificar a divisão de polinômios com um divisor linear. A compreensão desses conceitos é fundamental para a resolução de problemas matemáticos mais complexos.

Demonstração:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - a \\ \cline{2-2} r & Q(x) \end{array}$$

De acordo com a definição de divisão, temos:

$$P(x) = (x - a).Q(x) + r, \text{ onde}$$
$$P(x) = (a - a).Q(a) + r$$
$$P(a) = 0.Q(a) + r \text{ , logo:}$$
$$P(a) = r$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 13x^2 + x + 3 & 2x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2} -6x^3 + 9x^2 + 3x & 3x - 2 \\ \hline -4x^2 + 4x + 3 & \\ 4x^2 - 6x - 2 & \\ \hline -2x + 1 & \end{array}$$

8.4 DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

Briot-Ruffini é um método para realizar a divisão de polinômios de maneira eficiente e rápida. Esse método foi desenvolvido pelo matemático italiano Paolo Ruffini e pelo matemático francês Charles A. A. Briot, sendo considerado uma extensão do método de divisão longa de polinômios.

O método Briot-Ruffini é particularmente útil para dividir polinômios por um binômio da forma $x - a$ econsiste em escrever o polinômio a ser dividido em uma tabela e utilizar os coeficientes do polinômio e do binômio para obter os resultados da divisão. A vantagem desse método é que ele evita a necessidade de escrever os expoentes dos termos do polinômio a ser dividido.

Para ilustrar o método Briot-Ruffini, considere o polinômio $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ e o binômio $(x - 2)$. A tabela de Briot-Ruffini para esse exemplo é apresentada abaixo:

2	3	-5	1	-2
x	3	1	3	$4\ (resto)$

Para dividir o polinômio $3x^3 - 5x^2 - 2$ por $x - 2$ usando o método de Briot-Ruffini, escreva o divisor à esquerda e os coeficientes do dividendo à direita. Em seguida, desça o primeiro coeficiente do dividendo, multiplique o divisor pelo coeficiente e escreva o resultado abaixo do próximo coeficiente. Adicione os coeficientes e escreva o resultado abaixo do próximo coeficiente do dividendo. Repita o processo até o último coeficiente e, em seguida, o resto é escrito como a resposta. A resposta, neste caso é dada pelo quociente:

$$3x^2 + x + 3$$

O método Briot-Ruffini é uma ferramenta útil para realizar a divisão de polinômios de forma eficiente. Esse método é amplamente utilizado em diversas áreas da matemática, como álgebra, cálculo e geometria analítica. O conhecimento desse método é fundamental para a resolução de problemas matemáticos mais complexos e para o avanço do conhecimento científico.

8.5 PROPRIEDADES DOS POLINÔMIOS

1. Os polinômios podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos entre si, desde que o denominador da divisão não seja zero.
2. Os polinômios podem ser fatorados em termos de suas raízes. Por exemplo, o polinômio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ pode ser fatorado em $(x - 1)^2$.

3. O grau de um polinômio é o grau do termo de maior grau do polinômio. Por exemplo, o polinômio $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ é um polinômio de segundo grau.
4. Os polinômios são comutativos, ou seja, a ordem dos termos não afeta o resultado da operação.
5. Os polinômios podem ser avaliados em um valor específico de sua variável. Por exemplo, o polinômio $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, avaliado em $x = 2$, resulta em $P(2) = 9$ Pois,

$$P(2) = 3.(2)^2 - 2.2 + 1$$
$$P(2) = 3.4 - 4 + 1$$
$$P(2) = 12 - 3$$
$$P(2) = 9$$

6. Os polinômios têm propriedades simétricas em relação a suas raízes, ou seja, se um polinômio tem raízes complexas conjugadas, seus coeficientes são também complexos conjugados.

A propriedade afirma que se um polinômio tem raízes complexas conjugadas, então seus coeficientes também são complexos conjugados.

Um polinômio pode ser escrito como:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Onde $\mathrm{a_n}, \mathrm{a}_{n-1} \ldots, \mathrm{a_1}, \mathrm{a_0}$ são os coeficientes do polinômio e n é o grau do polinômio. Se as raízes complexas do polinômio são dadas por $z\ e\ \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z, então podemos escrever o polinômio como:

$$P(x) = a_n(x - z)(x - \bar{z}) \ldots (x - w)(x - \overline{w})$$

Onde $w\ e\ \overline{w}$ são outras raízes complexas conjugadas do polinômio.

Podemos expandir essa expressão usando o método de multiplicação de polinômios para obter:

$$P(x) = a_n x^n + \left(a_{\{n-1\}} - a_n(z + \bar{z})\right).x^{\{n-1\}} + \cdots + \left(a_1 - a_n.(w + \overline{w})\right)x + (a_0 - a_n z w \ldots \overline{w})$$

Observe que os coeficientes do polinômio estão relacionados às somas e produtos das raízes do polinômio. Se as raízes do polinômio são complexas conjugadas, então essas somas e produtos também são complexos conjugados. Portanto, cada coeficiente do polinômio é a soma ou diferença de números complexos conjugados, o que significa que cada coeficiente é um número complexo conjugado.

7. Os polinômios podem ser representados graficamente como curvas suaves, com pontos de máximo e mínimo correspondentes às raízes e coeficientes do polinômio.
8. Os polinômios podem ser usados para representar funções, como é o caso do polinômio de Taylor, que aproxima uma função por um polinômio.

8.6 RELAÇÕES DE GIRARD

As relações de Girard são um conjunto de fórmulas que relacionam as raízes de um polinômio com seus coeficientes. Essas fórmulas são muito úteis na álgebra e em outras áreas da matemática, como a teoria dos números e a teoria dos grupos.

As relações de Girard foram descobertas pelo matemático francês Albert Girard no século XVII. Ele percebeu que as raízes de um polinômio poderiam ser expressas como somas e produtos de outras raízes, e que essas relações poderiam ser usadas para obter informações sobre os coeficientes do polinômio.

Vamos considerar um polinômio de grau n com raízes $r_1, r_2, \dots, r_n$. Então, podemos escrever o polinômio como:

$$P(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Onde a_n é o coeficiente principal do polinômio. Expandindo essa expressão, obtemos:

$$P(x) = a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots, r_n).x^{\{n-1\}} + a_n\left(r_1.r_2.r_3 + \cdots + r_{\{n-1\}}.r_{\{n\}}\right)x^{\{n-2\}} \\ - \cdots + (-1)^n.a_n.r_1.r_2 \dots r_n$$

Observe que os coeficientes do polinômio estão relacionados às somas e produtos das raízes do polinômio. As relações de Girard afirmam que essas relações podem ser expressas como polinômios simétricos nas raízes.

Por exemplo, a soma das raízes do polinômio é dada por:

$$r_1 + r_2 + \cdots r_n = -\frac{a_{\{n-1\}}}{a_n}$$

Essa relação pode ser obtida observando que a soma das raízes pode ser encontrada ao avaliar o polinômio em x = 0:

$$P(0) = a_n . r_1 . r_2 \ldots . r_n$$

Mas também podemos escrever isso como: $P(0) = a_0$

Substituindo essa expressão na fórmula do polinômio, temos:

$$a_n . r_1 . r_2 \ldots r_n = a_0$$

Dividindo ambos os lados por a_n, temos:

$$r_1 . r_2 \ldots r_n = -\frac{a_0}{a_n}$$

E agora podemos usar isso para obter a soma das raízes:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{\{n-1\}}}{a_n}$$

Essa é a primeira relação de Girard. Observe que ela é simétrica nas raízes do polinômio, ou seja, a soma das raízes não depende da ordem em que as raízes são somadas.

Outra relação importante de Girard é a relação entre os coeficientes do polinômio e as raízes quadráticas:

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = \left(\frac{a_{\{n-1\}}}{a_n}\right)^2 - \frac{2a_{\{n-2\}}}{a_n}$$

Esta relação pode ser obtida fazendo $x = 0$ na expressão para $P(x^2)$ e usando a relação de Girard para a soma das raízes e para os coeficientes do polinômio.

9 POLINÔMIOS PALINDRÔMICOS

Os polinômios palindrômicos são uma classe importante de polinômios que apresentam propriedades distintas em relação aos demais polinômios. Esses polinômios possuem uma característica especial, que é a de serem idênticos a si mesmos quando seus coeficientes são lidos de trás para frente. Em outras palavras, eles apresentam simetria em relação ao seu coeficiente central (Halmos, 1974).

Uma definição formal de um polinômio palindrômico pode ser dada da seguinte maneira: seja um polinômio $P(x)$ de grau n com coeficientes $a_0, a_1, \ldots\ a_n$, então $P(x)$ é um polinômio palindrômico se, e somente se, $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \ldots$, e assim por diante (Roman, 1995).

Uma propriedade importante dos polinômios palindrômicos é que eles são divisíveis pelo polinômio $x - a$, se e somente se, a for uma raiz do polinômio. Além disso, o grau do polinômio quociente é sempre um grau menor que o grau do polinômio original. Essa propriedade é conhecida como o Teorema do Fator Palindrômico (Roman, 1995).

Outra propriedade interessante dos polinômios palindrômicos é a de que eles podem ser expressos como uma soma de potências de polinômios quadráticos palindrômicos. Essa fórmula é conhecida como a fórmula de Moebius para polinômios palindrômicos (Tao, 2007). Mais precisamente, se $P(x)$ é um polinômio palindrômico de grau n, então podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\mathrm{p(x)} = 2^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (x^2 - a_i)$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$ são as raízes do polinômio $p(x)$ (Tao, 2007).

Para provar essa fórmula, podemos utilizar o fato de que todo polinômio palindrômico pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma $x^k + x^{n-k}$ onde k é um número inteiro que varia de 0 a $\frac{n}{2}$ (Roman, 1995).

Considerando um polinômio palindrômico p(x) de grau n, podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\mathrm{p(x)} = \sum(\mathrm{k} = 0)^{\frac{n}{2}}\, c_k * (x^k + x^{n-k}),$$

onde $c_0, c_1, \ldots, c_{\frac{n}{2}}$ são os coeficientes do polinômio. Observe que essa expressão corresponde à soma de todos os termos de grau par de $p(x) = \sum(k = 0)^{\frac{n}{2}} c\_(2k) * x^{2k}$.

Podemos reescrever cada termo da soma acima como:

$$x^k + x^{n-k} = (x - a_k) * (x - a_{n-k})$$

onde a_k e a_{n-k} são as raízes do polinômio palindrômico $p(x)$. Substituindo essa expressão na equação anterior, temos:

$$\mathrm{p(x)} = \sum(\mathrm{k} = 0)^{\frac{n}{2}}\, c_k * (x - a_k) * (x - a_{(n-k)}).$$

onde utilizamos o fato de que a soma das raízes de um polinômio palindrômico é sempre igual a zero (Roman, 1995).

Portanto, provamos que todo polinômio palindrômico de grau n pode ser expresso como uma soma de potências de polinômios quadráticos palindrômicos, conforme a fórmula de Moebius.

Ainda sobre a forma Palindrômica, $P(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$. É possível fatora-la em relação a z^n, de modo que:

$$P(z) = z^n\left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \frac{a_{n-1}}{z^1} + a_n\right)$$

A partir disso, pode-se escrevê-la da seguinte maneira:

$$P(z) = z^n\left(a_0.\left(\frac{1}{z}\right)^n + a_1.\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + a_2.\left(\frac{1}{z}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-2}.\left(\frac{1}{z}\right)^2 + a_{n-1}.\left(\frac{1}{z}\right)^1 + a_n.\left(\frac{1}{z}\right)^0\right) = z^n.P.\left(\frac{1}{z}\right)$$

Se z_0 é raíz do polinômio, então $p(z_0) = 0 \rightarrow p(z_0) = z_0^n.p\left(\frac{1}{z^0}\right) = 0$

Há uma propriedade dos polinômios palindrômicos que afirma que se um número é raiz do polinômio, então seu conjugado também é raiz, é conhecida como Teorema de Descartes. Essa propriedade é especialmente importante para polinômios palindrômicos com coeficientes reais, pois permite que sejam identificadas todas as suas raízes reais e complexas conjugadas.

O teorema de Descartes é nomeado em homenagem ao filósofo e matemático francês René Descartes, que em sua obra "La Géométrie" (1637) demonstrou a propriedade para polinômios palindrômicos de grau ímpar. No entanto, a prova geral do teorema foi realizada posteriormente pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss.

Com base no Teorema de Descartes para polinômios palindrômicos com coeficientes reais, podemos afirmar que se um número complexo z_0 é raiz do polinômio, então seu conjugado $\overline{z_0}$ também é raiz do polinômio.

A partir dessa propriedade, é possível estabelecer que além de z_0 e $\frac{1}{z_0}$ serem raízes, $(\overline{z_o})$ e $\frac{1}{\overline{z_0}}$ também são.

Ressaltando que, se z_0 é uma raiz de um polinômio com coeficientes reais e pertence ao círculo unitário, então seu conjugado $\overline{z_0}$ também é uma raiz do polinômio. Dessa forma, se $z_0 = a + bi$ é uma raiz complexa com $b \neq 0$, então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz do polinômio.

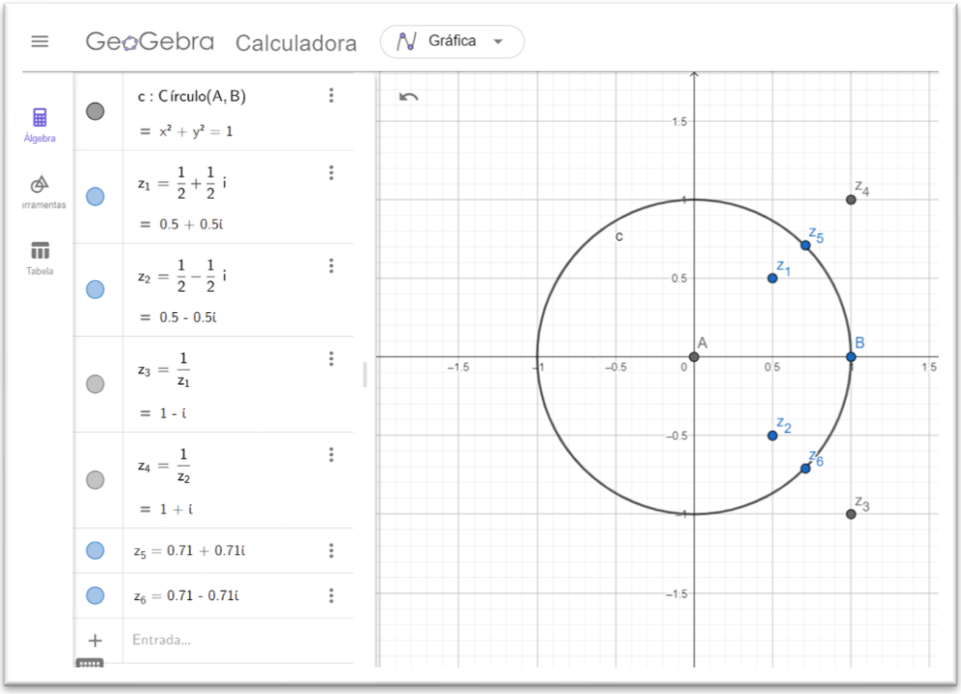
Uma propriedade interessante dos polinômios é que, se z_0 é uma raiz de um polinômio com coeficientes reais e pertence ao círculo unitário com centro na origem, além de seu conjugado também é uma raiz pertencente ao círculo unitário e ambos são simétricos em relação ao eixo real. Essa propriedade é conhecida como simetria conjugada e é uma consequência direta do fato de que os coeficientes reais do polinômio garantem que suas raízes complexas aparecem em pares conjugados.

Uma consequência interessante dessa propriedade é que, se dividirmos uma das raízes complexas z_0 por 1, obteremos um número complexo simétrico em relação ao eixo real, que está localizado fora da circunferência unitária. Essa propriedade é relevante para a análise de polinômios, pois permite obter informações sobre suas raízes complexas e simplificar o cálculo de integrais de funções racionais.

Adicionalmente, é importante salientar que, se o módulo da raiz complexa z_0 é igual a 1, então a raiz conjugada $\overline{z_0}$ é a própria raiz z_0. Isso ocorre porque, quando o módulo de z_0 é unitário, a raiz complexa está localizada na circunferência unitária e sua conjugada também está na circunferência, coincidindo com a própria raiz. Dessa forma, nesse caso, a raiz z_0 gera apenas uma raiz conjugada, que é ela mesma. Essa propriedade pode ser útil na análise de polinômios, especialmente no cálculo das raízes complexas conjugadas de polinômios palindrômicos com coeficientes reais.

Na figura abaixo, é possível observar o interessante comportamento das raízes de um polinômio palindrômico. As raízes estão plotadas no plano complexo, e é notável como elas estão distribuídas dentro do círculo unitário.

Figura 21 - Raízes do polinômio P(z) dado no círculo unitário.



Autoral. GeoGebra, 2023.

9.1 MÉTODO ALTERNATIVO PARA A REDUÇÃO DO GRAU DOS POLINOMIOS PALINDRÔMICOS COM COEFICIENTES REAIS

Trata-se uma exploração adicional do trabalho apresentado por Vaz, Vásquez e Fonseca (2021) em seu artigo "Método Alternativo para a Redução do Grau dos Polinômios Palindrômicos com Coeficientes Reais". O objetivo é aprofundar a compreensão dos polinômios palindrômicos e suas propriedades, utilizando o processo alternativo de redução do polinômio palindrômico proposto pelos autores originais.

As informações e conclusões apresentadas aqui são baseadas e extraídas do artigo original de Vaz, Vásquez e Fonseca (2021). Este trabalho visa não apenas reproduzir suas descobertas, mas também fornece uma interpretação adicional e contextualização para facilitar a compreensão.

Neste capítulo, será realizada a enumeração de um conjunto seleto de equações fundamentais que serão empregadas no âmbito do "Método Alternativo para a Redução do Grau dos Polinômios Palindrômicos com Coeficientes Reais". O propósito dessa abordagem consiste em promover uma compreensão mais profunda dos elementos matemáticos subjacentes a essa problemática específica. É pertinente ressaltar que a enumeração abrangerá apenas um subconjunto relevante de equações, de modo a preservar a coerência e a concisão do trabalho

A enumeração das equações constitui uma etapa crucial na estruturação deste estudo, uma vez que nos permite estabelecer as bases teóricas necessárias para a análise do problema em questão. Essas equações representam relações matemáticas que permitem descrever e modelar de forma precisa as características dos polinômios palindrômicos e sua redução de grau.

No artigo, os autores definem um polinômio palindrômico como um polinômio $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k Z^k$, onde $a_k \in$ R, e as seguintes condições são equivalentes:

i. P(z) é palindrômico, isto é, $a_{n-k} = a_k$, ∀k = 0,1, 2, ..., n.

ii. $\mathrm{P(z)} = \mathrm{z^n\ P}\left(\frac{1}{\mathrm{z}}\right)$. Segue-se que se z_0 é uma raiz de P, $\overline{z_0}, \frac{1}{\mathrm{z_0}}$ e $\frac{1}{\overline{z_0}}$ também o serão. Caso $|\mathrm{z_0}| < 1$, então $z_0\ e\ \overline{z_0}$ estarão localizadas simetricamente no interior do disco $|\mathrm{z}| < 1$ e $\frac{1}{z_0}$ e $\frac{1}{\overline{z_0}}$ fora deste. Logo se $|\mathrm{z_0}| = 1$, teremos apenas outra raiz complexa para P(z), uma vez que $|\overline{z_0}| = \frac{1}{\mathrm{z_0}}$.

Para ilustrar essa definição, vamos considerar um exemplo de um polinômio palindrômico: $P(z) = 2z^5 - 4z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 2$. Este polinômio é palindrômico porque os coeficientes dos termos correspondentes são iguais.

$$P(z) = 2z^5 - 4z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 4z + 2\ .$$

Fatorando $P(z) = Z^5(2 - \frac{4}{z} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z^4} + \frac{2}{z^5})$

Se z_0 é raiz, $\frac{1}{z_0}$ também é

$$P(z) = a_0 z_0^4 + a_1 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^1 + a_4$$

Como são palindrômicos, posso reescrever da seguinte forma:

$$P(z) = a_0 z_0^4 + a_1 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_1 z_0^1 + a_0$$

Se z_0 for solução, o polinômio pode ser descrito da seguinte maneira:

$a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ pois z_0 é raiz.

Provando que o conjugado também dá 0

$$a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$(\bar{z_0})^n = \overline{z_0^n}$$
$$a\bar{z} = \overline{az}$$
$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$
$$a_0 \bar{z_0}^n + a_1 \bar{z_0}^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$a_0 \overline{z_0^n} + a_1 \overline{z_0^{n-1}} + \cdots + a_n = 0$$

$$\overline{a_0 z_0^n} + \overline{a_1 z_0^{n-1}} + \cdots + a_n = 0$$
$$a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$P(z_0) = az_0^4 + bz_0^3 + cz_0^2 + bz_0 + a = 0$$
$$P\left(\frac{1}{z_0}\right) = a.\left(\frac{1}{z_0}\right)^4 + b.\left(\frac{1}{z_0}\right)^3 + c.\left(\frac{1}{z_0}\right)^2 + b.\left(\frac{1}{z_0}\right) + a$$
$$= \frac{a + bz_0 + cz_0^2 + bz_0^3 + az_0^4}{z_0^4} = 0$$

$$P\left(\frac{1}{z_0}\right) = a.\frac{1}{z_0^4} + b.\frac{1}{z_0^3} + c.\frac{1}{z_0^2} + b.\frac{1}{z_0} + a$$
$$= \frac{a + b.\bar{z_0} + c.\bar{z_0}^2 + b.\bar{z_0}^3 + a.\bar{z_0}^4}{z_0^4} = 0$$

iii. Conforme o artigo, segue-se que todo polinômio palindrômico $P_n(z)$, de grau n par, pode ser expresso em termos de $w = z + \frac{1}{z}$ e que cada raiz w de Q_n gera duas raízes de $P_n(z)$. Observe-se que no caso de um polinômio palindrômico P(z) de grau ímpar tem-se: $P_{\{2n+1\}}(z) = (z + 1)z^n \, Q_n(\frac{1}{z} + z)$, uma vez que $z = -1$ é raiz de todo polinômio palindrômico de grau ímpar. Logo, sem perda de generalidade é possível supor que $P_n(z)$ é de grau par.

A partir desta representação, é possível inferir que cada polinômio palindrômico $P_{n(z)}$ de grau par n pode ser reescrito em termos de $w = z + \frac{1}{z}$. Além disso, cada raiz w do polinômio Q_n corresponde a duas raízes de $P_{n(z)}$.

É importante notar que, no caso de um polinômio palindrômico P(z) de grau ímpar, temos uma representação ligeiramente diferente:

$P_{2n-1}(z) = (z + 1)z^n\, Q_n(\frac{1}{z} + z)$. Isso ocorre porque $z = -1$ é sempre uma raiz de qualquer polinômio palindrômico de grau ímpar.

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $P_{n(z)}$ é de grau par ao trabalhar com polinômios palindrômicos.

De acordo com o artigo, foram feitas várias manipulações algébricas no polinômio do exemplo abaixo para achar Q_n e consequentemente as raízes de P(z). De fato, o polinômio palindrômico

$$P(z) = z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1 = z^4\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) \quad (9.1)$$

logo,

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 = -4z^2 - z - 7 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}$$

Ao adicionar $4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2$ *na equação* (9.1), *temos*

$$z^4\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = -z + 1 - \frac{1}{z} \quad (9.2)$$

Adicionando o termo $\left(z + \frac{1}{z}\right)$ nos dois lados da igualdade da equação (9.2), temos:

$$\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 \quad (9.3)$$

Multiplicando o termo z^4 nos dois lados da igualdade na equação (9.3), temos:

$$z^4\left(z^4 - z - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) = z^4\left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right). \quad (9.4)$$

Desta forma, da equação (9.4), obtemos

$$P_8(z) = z^4 Q_4\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{9.5}$$

Foi demonstrado que a equação (9.5) é um polinômio palindrômico de grau par (n = 8). No entanto, o procedimento descrito envolve várias manipulações algébricas que dependem das expressões anteriores. Com base nessa observação, será apresentado um processo alternativo para a redução de polinômios palindrômicos com coeficientes reais, feito por Vaz, Vasquez, Fonseca, (2021). Esse processo busca simplificar e tornar mais eficiente a redução desses polinômios, evitando a necessidade de repetir todas as manipulações algébricas anteriores.

Procedimento alternativo de redução do polinômio palindrômico com coeficientes reais

O procedimento subsequente, fundamentado nas relações de Viète, permite de maneira alternativa e genericamente expressar as propriedades dos polinômios palindrômicos com coeficientes reais. Essas relações, estabelecidas por Viète no século XVI, estabelecem conexões entre os coeficientes e as raízes de um polinômio.

$$P_{2n}(z) = Z^n Q^n\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{9.6}$$

Em que $a_n \neq 0$. Sem perda de generalidade, considere o polinômio palindrômico de grau par:

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + 1. \tag{9.7}$$

Das relações de Viète[1], tem-se que, se $z_i(i = 1,2, \dots ,2n)$ são raízes de $P_{2n}(z)$, então:

$$\sum_{i=1}^{2n} z_i = -a_1, \sum_{j\neq i}^{n} z_i z_j = a_2, \sum_{i\neq j\neq k}^{2n} z_i z_j z_k = -a_3, \dots, z_1 z_2 z_3 \dots z_{2n-1} z_{2n} = 1 \tag{9.9}$$

Já que as raízes ocorrem em pares inversos, tomamos liberdade para construir o seguinte polinômio:

[1] As relações de Viète, desenvolvidas por François Viète no século XVI, estabelecem conexões entre os coeficientes e as raízes de um polinômio. Elas permitem expressar as raízes em termos dos coeficientes e fornecem informações valiosas sobre as propriedades dos polinômios. Essas relações são amplamente utilizadas na resolução de equações polinomiais.

$$Q_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = Q_n(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n, \quad (9.10)$$

Onde os coeficientes $b_k, (k = 1,2,\dots,n)$ são obtidos a partir das relações das raízes de $P_n(z)$ e das relações com seus coeficientes, além do fato que $z_{2i-1}z_{2i} = 1$, $i = 1,2,\dots,n$. De posse do polinômio $Q_n(x)$ e a partir de suas raízes x_i $(i = 1,2,\dots,n)$ obtemos as $2n$ raizes de $P_n(z)$, decorrentes da solução das n equações quadráticas:

$$x_i = z_{2i-1} + z_{2i} = z_{2i-1} + \frac{1}{z_{2i-1}}, \; i = 1,2,\dots,n. \qquad (9.11)$$

Temos que:

$$-b_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}(z_{2i-1} + z_{2i}) = \sum_{i=1}^{2n} z_i = -a_1 \qquad (9.12)$$

$$b_2 = \sum_{i\neq j}^{n} x_ix_j = \sum_{i\neq j}^{n}(z_{2i-1} + z_{2i})\left(z_{2j-1} + z_{2j}\right) = \sum_{i\neq j}^{2n} z_iz_j - \sum_{i=j}^{2n} z_iz_j = a_n - n. \qquad (9.13)$$

Por outro lado,

$$-b_3 = \sum_{i\neq j\neq k}^{n} x_ix_jx_k = \sum_{i\neq j\neq k}^{n}(z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2k-1} - z_{2k}) \qquad (9.14)$$

Reescrevendo a equação (8.14) em função de $z_iz_jz_k, i \neq j \neq k$, e operando, se tem:

$$-b_3 = \sum_{i\neq j\neq k}^{2n} z_iz_jz_k - (n-1)\sum_{k=1}^{2n} z_{2i-1}\, z_{2i}z_k. \qquad (9.15)$$

Usando as relações de (9.9) em (9.14), obtemos.

$$-b_3 = -a_3 - (n-1)\sum_{k=1}^{2n} z_k = -a_3 - (n-1)(-a_1) \qquad (9.16)$$

$$b_3 = a_3 - (n-1)a_1. \qquad (9.17)$$

Fazendo o cálculo de b_4

$$b_4 = \sum_{i\neq j\neq k\neq l} x_ix_jx_kx_l = \sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{n}(z_{2i-1} + z_{2i})(z_{2j-1} + z_{2j})(z_{2k-1} + z_{2k})(z_{2l-1} + z_{2l}) \qquad (9.18)$$

Ao substituir $\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{2n} z_iz_jz_kz_l$ na expressão que determina b_4:

$$b_4 = \sum_{i\neq j\neq k\neq l} z_iz_jz_kz_l - \left(\sum_{z_jz_l\neq 1} z_{2i-1}z_{2i}z_jz_l + \sum z_{2i-1}z_{2i}z_{2j-1}z_{2j}\right). \qquad (9.19)$$

Realizando os cálculos e fazendo as devidas substituições, tem-se que:

$$b_4 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{2n} z_i z_j z_k z_l - \left((n-2)\sum_{k \neq j}^{2n} z_k z_l - \frac{n(n-3)}{2}\right) \tag{9.20}$$

Ou equivalente,

$$b_4 = a_4 - (n-2)a_2 + \frac{n(n-3)}{2} \tag{9.21}$$

O cálculo do coeficiente b_5 do polinômio $Q_n(x)$ na equação é (9.10):

$$-b_5 = \sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq r}^{n} x_i x_j x_k x_l x_r \tag{9.22}$$

Através de cálculos feitos por Vaz, Vásquez, Fonseca (2021), e calculando os coeficientes b_5, chega-se a seguinte conclusão:

$$b_5 = a_5 - (n-3)a_3 + \frac{(n-4)(n-1)}{2}a_1. \tag{9.23}$$

O que ocorre sucessivamente.

Segundo os autores, através do exposto, é possível concluir que coeficiente b_k de índice par/ímpar depende de todos os coeficientes a_k de índice par/ímpar inferiores ou iguais a k. Seguindo um procedimento semelhante é possível obter os $b_k, k \geq 6$.

Por exemplo, no caso de um polinômio palindrômico de grau 8 e 6:

$$P(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \tag{9.24}$$

$$P(z) = z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \tag{9.25}$$

Seus correspondentes polinômios reduzidos são respectivamente:

$$Q_4(x) = x^4 + a_1 x^3 + (a_2 - 4)x^2 + (a_3 - 3a_1)x + (a_4 - 2a^2 + 2). \tag{9.26}$$

$$Q_3(x) = x^3 + a_1 x^2 + (a_2 - 3)x + (a_3 - 2a_1). \tag{9.27}$$

Assim por exemplo, no caso do específico do polinômio

$$P_8(z) = z^8 - z^5 - z^4 - z^3 + 1 \tag{9.28}$$

Temos que seu polinômio reduzido é:

$$Q_4(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1 \tag{9.29}$$

Pelas equações o polinômio pode ser exprimido como:

$$P_8(z) = z^4 Q_4\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^4\left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right) \tag{9.30}$$

Portanto, a partir da argumentação dada acima podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 8.1: Considere o polinômio palindrômico de grau par e com coeficientes reais.

$$P(z) = z^{2n} + a_1^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + 1 \qquad (9.31)$$

E seja $Q_n(x)$ seu polinômio reduzido. Então x é uma raiz real de $Q_n(x)$ se, e somente, e seja $P(z)$ possui duas raízes z, tais que z é real ou $|z| = 1$. Ou, equivalente, para cada raiz complexa de $Q_n(x)$, $P(z)$ possuirá duas raízes qualquer $P(z)$ logo as raízes complexas $z, |z| \neq 1$ e reciprocamente.

Demonstração: Seja $z = \alpha + \beta_i$ uma raiz qualquer $P(z)$ logo as raízes de $Q_n(x)$ são tais que:

$$x = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \alpha\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right) + \beta\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) i \qquad (9.32)$$

Logo, x será real se, e somente se, $x \in R$ ou $|z| = 1$.

Observa-se que, se $x \in R$, da equação tem se que:

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2} \qquad (9.33)$$

Logo, $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \leftrightarrow x \in (-2,2)$

Além disso, $|z| = \sqrt{\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2}. = 1$ Reciprocamente, $s\ x\ \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 2 \leftrightarrow z \in \mathbb{R},$$

De tal sorte que z e $\frac{1}{z}$ (diferente $+/-1$) não estão no círculo unitário.

Exemplo: Considere o polinômio reduzido.

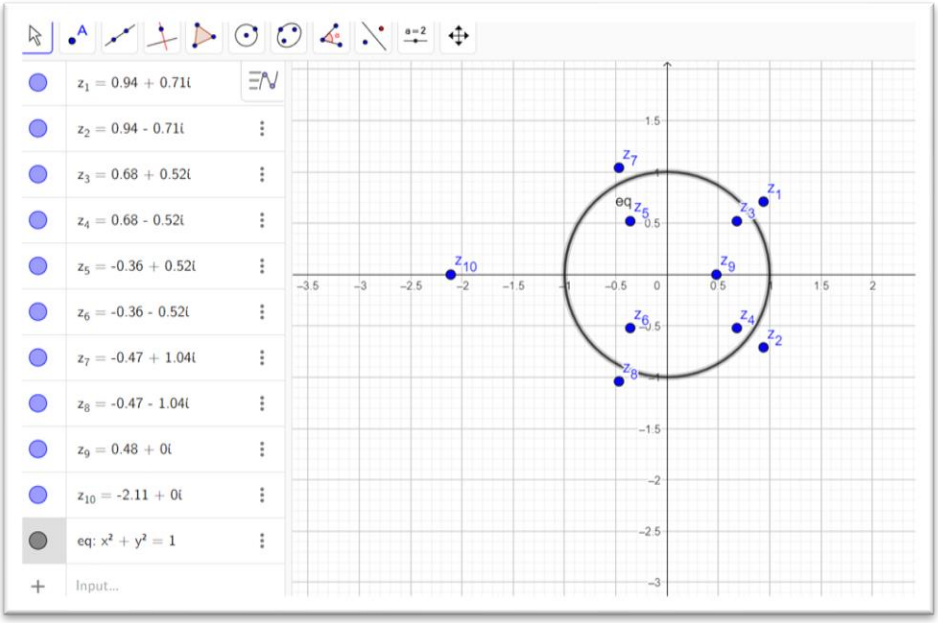
$$Q_5(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 7x + 5 \qquad (9.34)$$

Do polinômio

$$P(z) = z^{10} + z^9 - z^8 + z^7 - z^6 + 5z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + 1. \qquad (9.35)$$

A figura 24, mostra as raízes $z_i, i = 1,2, \ldots 10$ do polinomio $P(z) = z^{10} + z^9 - z^8 + z^7 - z^6 + 5z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z + 1$ e suas localizações no círculo unitário.

Figura 22 -Raízes do polinômio P(z) dado no círculo unitário.



Autoral: GeoGebra

10 CONCLUSÃO

Neste trabalho, realizamos uma exploração dos números complexos e dos polinômios palindrômicos, desde a introdução dos conceitos fundamentais até a análise de suas propriedades. Através do estudo da temática sob uma perspectiva histórica, foi possível entender a evolução dos números complexos, desde sua concepção até sua consolidação na teoria matemática.

A análise dos polinômios palindrômicos, uma classe especial de polinômios com propriedades únicas, foi realizada com mais enfoque. Foi introduzido um método alternativo para a redução do grau dos polinômios palindrômicos com coeficientes reais, proporcionando uma nova perspectiva sobre o problema.

O uso do software GeoGebra como suporte permitiu ilustrar operações e conceitos, facilitando a compreensão dos tópicos discutidos. Por meio desta ferramenta, foi possível visualizar de maneira clara e intuitiva as operações com números complexos e polinômios palindrômicos.

Este estudo contribui para o campo da educação matemática, fornecendo uma nova abordagem para a exploração e entendimento dos números complexos e polinômios palindrômicos. Através da compreensão desses conceitos, é possível abrir novas portas para a pesquisa e a aplicação prática desses tópicos na matemática e em áreas correlatas.

Em suma, a presente monografia apresentou uma análise introdutória dos números complexos e polinômios palindrômicos, explanando sobre suas propriedades e comportamentos. Ao compreender a simetria e a estrutura desses polinômios, abre-se um vasto leque de possibilidades de aplicação e aprofundamento teórico. Conclui-se, assim, que a continuidade da pesquisa nesse campo é fundamental para o avanço do conhecimento matemático, sobretudo no campo acadêmico, e para a ampliação de suas aplicações práticas em áreas congêneres.

REFERÊNCIAS

COSTA JÚNIOR, Cleber Luis Alves**. Raízes de números complexos: uma sequência didática**. 2019. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019.

DESCARTES, René. **La Géométrie.** 1637.

Eves, H. (2011) **Introdução à história da matemática** (5a ed.); tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

FREITAS, DUELCI APARECIDO; BLANCO, TERESA F.; ALMEIDA, MATEUS. **Uma sequência didática para o ensino-aprendizagem dos números complexos usando o GeoGebra**. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 486-498). Madrid, España: FESPM. 2017.

HALMOS, P. R. **Finite-dimensional vector spaces**. Springer-Verlag, 1974.

ROMAN, S. **Advanced linear algebra.** Springer-Verlag, 1995.

TAO, T. **An introduction to measure theory.** American Mathematical Society, 2007.

VAZ, D. A. F; VASQUEZ, J. C. S; FONSECA, R. C. B. **Método alternativo para a redução do grau de polinômios palindrômicos com coeficientes reais**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática. Sergipe, Aracaju. Ano 2021, No. 3, 1–11.