PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Luiz Henrique de Souza Ferreira

A EVOLUÇÃO DO SÍMBOLO DE IGUALDADE NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUA IMPORTÂNCIA NA REORGANIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE IGUALDADE NA TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA ÁLGEBRA

Goiânia
2023

Luiz Henrique de Souza Ferreira

A EVOLUÇÃO DO SÍMBOLO DE IGUALDADE NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUA IMPORTÂNCIA NA REORGANIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE IGUALDADE NA TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA ÁLGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adelino Candido Pimenta

Goiânia
2023

LUIZ HENRIQUE DE SOUZA FERREIRA

A EVOLUÇÃO DO SÍMBOLO DE IGUALDADE NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUA IMPORTÂNCIA NA REORGANIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE IGUALDADE NA TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA ÁLGEBRA

Este trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção de título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pela Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em ____ / ________ / _______.

____
Orientador: Prof. Dr. Adelino Candido Pimenta

BANCA EXAMINADORA

____
Prof(a). Me. Rosimara Fachin Pela

____
Prof(a). Dra. Vanda Domingos Vieira

GOIÂNIA

2023

Dedico esta monografia aos meus amados pais e ao meu querido irmão, que sempre estiveram ao meu lado durante essa jornada acadêmica. Seu apoio constante e incentivo foram fontes inestimáveis de motivação. Agradeço por todo o amor, compreensão e suporte que vocês me proporcionaram ao longo desse percurso. Sua presença em minha vida é um presente que valorizo imensamente. Este trabalho é dedicado a vocês, como uma forma singela de expressar minha gratidão por tudo que fizeram por mim.

“O símbolo de igualdade na matemática é a ponte que une os diversos ramos do conhecimento matemático, possibilitando a compreensão e a busca pela harmonia subjacente às estruturas e relações matemáticas.”

Alexandre Grothendieck

RESUMO

O estudo visa analisar o símbolo de igualdade na matemática, focando na transição da aritmética para a álgebra. A pesquisa explora a história do símbolo, suas origens e evolução, e aborda as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante a transição, evidenciando os desafios conceituais e pedagógicos. Diversos conceitos associados ao símbolo de igualdade foram identificados através de revisão bibliográfica aprofundada, incluindo equivalência, operações combinatórias, identidades matemáticas e padronização de notação. O estudo também investiga a compreensão dos alunos sobre o símbolo e as estratégias pedagógicas para uma compreensão mais sólida. Os resultados destacam a relevância do símbolo de igualdade tanto historicamente quanto pedagogicamente, e a necessidade de uma compreensão adequada para o desenvolvimento do pensamento lógico-analítico e a resolução de problemas complexos. Em conclusão, a pesquisa reforça a importância do símbolo de igualdade na matemática, particularmente na transição da aritmética para a álgebra recomendando a adoção de abordagens pedagógicas que considerem as múltiplas facetas desse símbolo, auxiliando os alunos na transição da aritmética para a álgebra de maneira mais eficaz.

Palavras-chave: símbolo de igualdade, transição aritmética-álgebra, análise histórica e conceitual.

ABSTRACT

The study aims to analyze the equality symbol in mathematics, focusing on the transition from arithmetic to algebra. The research explores the history of the symbol, its origins and evolution, and addresses the difficulties faced by students during the transition, highlighting conceptual and pedagogical challenges. Several concepts associated with the equality symbol were identified through an in-depth literature review, including equivalence, combinatorial operations, mathematical identities, and notation standardization. The study also investigates students' understanding of the symbol and pedagogical strategies for a more solid comprehension. The results emphasize the relevance of the equality symbol both historically and pedagogically, and the need for a proper understanding for the development of logical-analytical thinking and solving complex problems. In conclusion, the research reinforces the importance of the equality symbol in mathematics, particularly in the transition from arithmetic to algebra, recommending the adoption of pedagogical approaches that consider the multiple facets of this symbol, assisting students in the transition from arithmetic to algebra more effectively.

Keywords: equality symbol, arithmetic-algebra transition, historical and conceptual analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

()	parênteses
+	adição
-	subtração
$\cdot$	multiplicação
$\cup$	conjunto união
$\div$	divisão
$\Longleftrightarrow$	se e somente se
$\Longrightarrow$	implica
$\{\}$	chaves
=	símbolo de igualdade

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As experiências vivenciadas nos estágios supervisionados, através das observações e práticas no campo de estágio, mostravam muitas dificuldades dos alunos ao tentarem interpretar estruturas álgebricas. Particulamente, a interpretação do conceito a que se refere a simbologia ou notação que aparece em determinada estrutura.

Este fenômeno, inicialmente percebido de maneira acidental, ganhou um peso maior quando, durante uma aula de equações ministrada pelo professor supervisor, notei uma marcante dificuldade dos alunos em entender o conceito de equivalência associado ao símbolo "=". O impacto desta incompreensão revelou-se na confusão gerada na interpretação deste símbolo específico, interferindo diretamente na compreensão e resolução das equações.

Com uma análise mais meticulosa dessa situação, ficou evidente que a dificuldade dos alunos advém, em grande parte, da transição da aritmética para a álgebra. A mudança na forma como os símbolos são usados e interpretados entre esses dois campos é um grande desafio para muitos estudantes.

De acordo com Miranda (2019), é comum que os estudantes, em seus primeiros contatos com a Álgebra, interpretem o símbolo de igualdade principalmente como um indicativo de operação matemática. Esta percepção deriva do modo como a Aritmética é introduzida nas séries iniciais da Educação Básica, focada na execução precisa de procedimentos e na obtenção de respostas corretas.

Dessa forma, na Aritmética, o sinal "=" é comumente interpretado sob uma perspectiva operacional. Nesse cenário, o primeiro termo da igualdade é percebido como uma operação matemática que deve ser executada, enquanto o segundo termo representa o resultado dessa operação. Alternativamente, o sinal de igualdade pode ser utilizado de maneira sequencial, servindo como um guia para as etapas de resolução de uma operação matemática, desde o início até a obtenção do resultado final.

Esta interpretação restritiva do símbolo de igualdade, adquirida pelos alunos durante o aprendizado inicial, pode ocasionar dificuldades significativas ao ingressarem no estudo da Álgebra.

Desta constatação surgiu essa monografia que visa explorar os conceitos do símbolo de igualdade e sua relevância no contexto histórico da transição da Aritmética para Álgebra, destacando a necessidade de integrar a história do símbolo de igualdade no ensino da matemática.

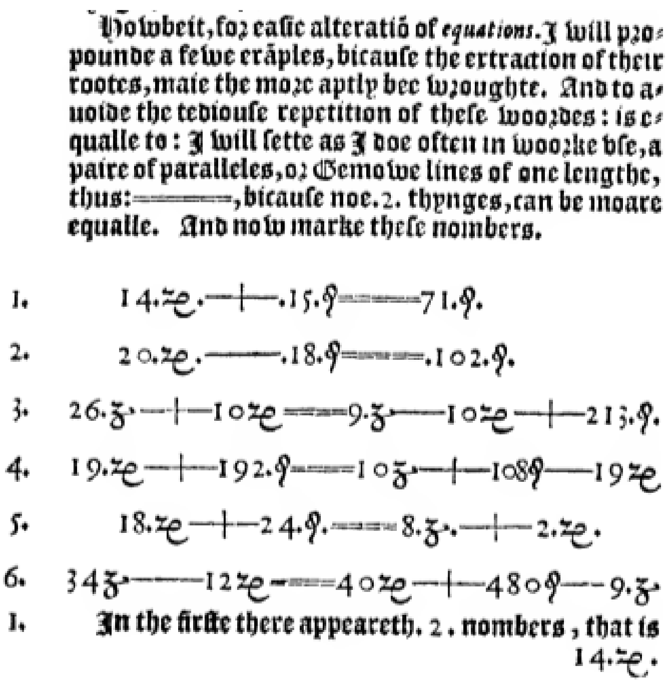
1 A HISTÓRIA DO SÍMBOLO DE IGUALDADE NA MATEMÁTICA

O símbolo de igualdade, representado por duas barras paralelas horizontais, é um dos modelos mais utilizados na matemática. Entretanto, sua origem e evolução ao longo da história é uma questão controversa entre os estudiosos da área.

Na antiguidade, a noção de igualdade já estava presente, como pode ser observado na obra “Introdução à história da matemática” (EVES, 2011). Entretanto, não havia um símbolo específico para indicar igualdade. Em vez disso, a igualdade era mencionada “por palavras como *aequales*, *aequantur*, *esgale*, *faciunt*, *ghelijck* ou *gleich*, e às vezes a forma abreviada *aeq*.”[1] (CAJORI, 1918, p.261) que trazem de forma retórica a ideia de igualdade.

A simbologia “=” apareceu pela primeira vez em 1557 na obra *The Whetstone of White* sendo representado na forma que aparece na Figura 1, escrita pelo matemático inglês Robert Recorde (1512-1558) afirmando que “para evitar a repetição tediosa de palavras e por não haver duas coisas mais iguais que duas linhas paralelas.”(HEEFFER, 2008, p.10,trad. própria). Nessa obra, o autor utiliza o símbolo para representar a relação de equivalência e as operações possíveis nas equações matemáticas. Desde então, o símbolo de igualdade se tornou amplamente utilizado na matemática e em outras áreas do conhecimento que envolvem cálculos e equações. Vale ressaltar que a simbologia matemática é uma linguagem universal, que permite a comunicação de ideias e conceitos matemáticos de forma clara e objetiva.

Figura 1 – Símbolo de igualdade de Robert Recorde


Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

The Whetstone of Witte (1557)

1 [..]*by such words as aequales,aequantur, esgale, faciunt, ghelijck, or gleich, and sometimes by the abbreviated form aeq.*”(RECORDE, 1557)

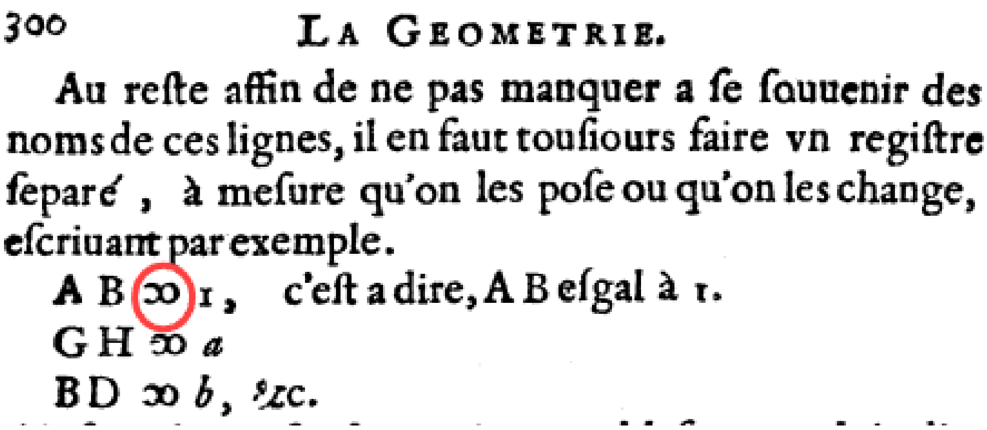
Segundo Cajori (1918, p.261), embora o símbolo de igualdade tenha surgido em 1557, foram necessários 61 anos até que o sinal “=” representando o conceito de igualdade aparecesse novamente em alguma publicação impressa e antes que chegasse à forma que utilizamos atualmente, ele sofreu ao longo da história diversas transformações na aparência e adquiriu diferentes significados.

Como mencionado anteriormente, vários matemáticos utilizavam palavras que possuíam como significado a ideia de igualdade ou deixavam um espaço em branco. Em 1559, o monge francês J.Buteo utilizou o símbolo [e, em 1571, Wilhelm Holzmann utilizou-se de duas linhas verticais paralelas || em sua edição da *Arithmetica* de Diofanto, sendo essa representação utilizada a mais de um século por vários escritores. Já em 1698, S.Reyer propôs uma única barra |.

Outra variação curiosa foi proposta pelo matemático francês Pierre Hérigone no século XVII, onde o símbolo 2|2 representava igualdade, enquanto suas variações 2|3 e 3|2 eram utilizadas para indicar “menor que” e “maior que”, respectivamente. Embora esses símbolos não tenham sido amplamente adotados, eles demonstram a criatividade e a busca contínua por uma notação matemática mais eficiente e compreensível. A evolução dos símbolos matemáticos, como a proposta de Hérigone, é um testemunho da riqueza e diversidade das contribuições feitas por diferentes culturas e indivíduos na história da matemática.

No decorrer da história existiu diversos outros símbolos criados para representar a ideia de igualdade , desde simbologias que só foram usadas em manuscritos pessoais até em grandes publicações, porém nenhum deles chegou a ameaçar “=” criado por Recorde, somente o criado por René Descartes demonstrado na Figura 2 que foi utilizado em seu terceiro apêndice de seu *Discours* (1637), nomeado *La Géométrie*, a principal razão dessa ameaça se deve a sobrecarga de relações imposta por diversos outros estudiosos da época sobre o sinal de Robert e a grande influência de Descartes.

Figura 2 – Símbolo de igualdade de Descartes


300 LA GEOMETRIE.

Au reſte affin de ne pas manquer a ſe ſouuenir des noms de ces lignes, il en faut touſiours faire vn regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe ou qu'on les change, eſcriuant par exemple.

AB ∞ 1, c'eſt a dire, AB eſgal à 1.
GH ∞ *a*
BD ∞ *b*, &c.

La Géométrie (1637)

Entre essas diferentes utilizações, podemos citar a diferença aritmética na obra *In Artem Analyticam Isagoge* (Vieta, 1591), a noção de mais ou menos (Descartes, 1638), e o uso como separatriz em frações decimais (Caramuel, 1706) – por exemplo, o número 102.857 era representado como $102 = 857$, entre outros casos demonstrado por Cajori (1918). Assim, Descartes foi impulsionado a criar uma simbologia visando representar exclusivamente a igualdade, evitando possíveis interpretações incorretas

O segundo motivo está associado ao notável impacto de Descartes no campo da matemática, particularmente no desenvolvimento do método cartesiano, que pavimentou o caminho para a análise matemática contemporânea. Descartes foi um pioneiro na introdução da geometria analítica, estabelecendo uma conexão entre a geometria e a álgebra, o que possibilitou a representação de objetos geométricos por meio de equações algébricas. Além disso, ele também desempenhou um papel crucial no aprimoramento da notação exponencial, a^n(n, um número inteiro positivo).

A influência de Descartes na matemática proporcionou a ampla adoção de suas ideias e notações por outros matemáticos de sua época e posteriores. Ao criar um símbolo específico para a igualdade, Descartes não só buscava evitar interpretações incorretas, mas também estava estabelecendo um padrão que seria seguido e refinado por muitos outros matemáticos. A adoção generalizada dessa notação pelos profissionais de diferentes áreas quase contribuiu para consolidar o seu símbolo como uma representação universal da igualdade.

No entanto, conforme destacado por Cajori (1918), o início do século XVIII representa o marco inicial da prevalência do símbolo "=" em vez do símbolo proposto por Descartes (1637). O próprio Descartes não divulgou seu símbolo o trocando em uma carta para Mersenne em 30 de setembro pelo símbolo "=".

A principal razão para a adoção universal do símbolo "=" como representação da igualdade pode ser atribuída à descoberta do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz, uma vez que ambos optaram por utilizar esse símbolo em seus respectivos trabalhos. A escolha desses matemáticos influentes em adotar o símbolo "=" em suas obras reforçou a sua relevância e estabeleceu um padrão que perdura até os dias atuais.

As transformações que o símbolo de igualdade de Recorde sofreu ao longo do tempo até alcançar a forma atualmente utilizada foram inúmeras. Não se pode determinar com precisão quem ou quando estabeleceu o formato final, mas acredita-se que essas mudanças foram motivadas pela necessidade de simplificar a notação e pelas limitações das técnicas de impressão da época.

Em face deste contexto, a evolução do símbolo de igualdade também desempenhou um papel crucial na transição da aritmética para a álgebra. Este processo, distante de ser instantâneo, envolveu a reinterpretação de conceitos aritméticos e sua adaptação a um ambiente mais abstrato e geral. No próximo capítulo, aprofundaremos essa transição, realçando como a reestruturação dos princípios de igualdade se revelou fundamental neste período de reorganização.

2 REORGANIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE IGUALDADE NA TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA ÁLGEBRA

Antes da álgebra, a aritmética era a única ferramenta disponível para solucionar problemas matemáticos. A aritmética se concentra em operações numéricas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, e essas operações são realizadas em números reais ou inteiros. No entanto, a aritmética tinha suas limitações, especialmente quando se tratava de solucionar problemas mais complexos.

A álgebra surgiu como uma ferramenta poderosa para resolver problemas matemáticos mais complexos. Em vez de lidar apenas com números, a álgebra permitiu que os matemáticos trabalhassem com variáveis, símbolos e equações. Isso significava que os matemáticos podiam representar relações matemáticas mais complexas e explorar soluções para problemas que antes eram considerados insolúveis.

No entanto, a transição da aritmética para a álgebra não foi fácil. Os matemáticos enfrentaram muitas dificuldades ao tentar aplicar conceitos aritméticos à álgebra. Uma das maiores barreiras para a transição foi a reorganização dos conceitos de igualdade. Os matemáticos precisaram entender como a igualdade funcionava de maneira diferente na álgebra e aprender a manipular expressões algébricas para resolver problemas. O símbolo de igualdade, introduzido por Robert Recorde no século XVI, desempenhou um papel vital nessa transição, permitindo que os matemáticos escrevessem equações de maneira mais fácil e clara.

Em resumo, a transição da aritmética para a álgebra foi um processo desafiador e complexo que exigiu uma reorganização dos conceitos de igualdade. Nesse capítulo, exploraremos em detalhes as dificuldades encontradas na transição e os conceitos fundamentais de igualdade em álgebra.

2.1 A Dificuldade na Transição da Aritmética para Álgebra

A aritmética é um ramo fundamental da matemática que se dedica ao estudo das propriedades e das operações dos números. Originária da palavra grega *arithmos* que significa “número” (BAUMGART, 1922, p.1), a aritmética está presente em diversas culturas ao longo da história. Ela desempenha um papel fundamental no cotidiano das pessoas, seja na resolução de problemas práticos, no comércio, nas finanças ou em diversas outras áreas que envolvem o uso dos números. A aritmética proporciona uma compreensão sólida dos conceitos numéricos e das operações básicas.

Já a álgebra é um ramo da matemática que se dedica ao estudo de estruturas e relações abstratas por meio de símbolos e expressões. Originada do termo árabe “al-jabr”, que significa “restauração” ou “reunião de partes quebradas”(BAUMGART, 1922, p.1), a álgebra surgiu como uma forma de resolver equações e manipular símbolos para resolver problemas matemáticos complexos. Diferente da aritmética, que lida com números específicos, a álgebra permite a generalização de conceitos e operações para aplicá-los em diferentes contextos. Ela utiliza letras e símbolos para representar números desconhecidos ou variáveis, e emprega regras e propriedades para manipular esses símbolos e resolver equações. A álgebra abrange uma ampla gama de tópicos, como equações lineares e quadráticas, sistemas de equações, matrizes, funções, polinômios, entre outros.

Segundo Eves (2011, p.546), Peacock (1791-1858) dividia a álgebra entre “álgebra aritmética” e “álgebra simbólica” sendo a primeira

> considerada por ele como o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números. Assim, na “álgebra aritmética”, certas operações são limitadas por sua aplicabilidade. Numa subtração, $a - b$, por exemplo, devemos ter $a > b$. A “álgebra simbólica” de Peacock, por outro lado, adota as operações da “álgebra aritmética” mas ignora suas restrições. Por exemplo, a subtração na “álgebra simbólica” difere da mesma operação na “álgebra aritmética” pelo fato de que na primeira ela sempre tem sentido. A justificativa dessas regras de extensão da “álgebra aritmética” para a “álgebra simbólica” era chamada por Peacock de princípio da permanência das formas equivalentes.

Esse conceito de álgebra aritmética perdurou por anos, pois o “princípio da permanência das formas equivalentes” permitiu o desenvolvimento de vários outros sistemas numéricos, incluindo os números complexos. As cinco propriedades básicas dos inteiros positivos foram consideradas os primeiros axiomas da álgebra, constituindo leis algébricas verdadeiras que serviram para comprovar e estender as operações fundamentais da aritmética para outros conjuntos numéricos.Essas propriedades são:

1) Comutativa da adição: $x + y = y + x$
2) Comutativa da multiplicação: $x \cdot y = y \cdot x$
3) Associativa da adição: $(x + y) + z = x + (y + z)$
4) Associativa da multiplicação: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
5) Distributiva da multiplicação: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Diante desse contexto, pensar na construção de uma álgebra que não verificasse a existência de alguma dessas leis era considerado absurdo e era descartado por não possuir uma base lógica sólida. Essas propriedades fundamentais estabeleciam os alicerces da álgebra e eram consideradas essenciais para qualquer estrutura algébrica coerente.

No entanto, com o avanço da álgebra, surgiu estruturas álgebricas que não necessariamente seguiam todas as leis básicas dos inteiros positivos. Como o exemplo dado por Eves (2011, p.549) em que Hamilton ao tentar provar as leis dos inteiros positivos nos quatérnios unitários, percebeu a não existência da lei comutativa da multiplicação (Figura 3).Outro exemplo, é a álgebra das matrizes que não é comutativa na multiplicação (Figura 4).

Os quaternários são entidades algébricas compreendidas por um conjunto quadridimensional, composto por uma dimensão real e três imaginárias. Semelhante à representação de números complexos, que são expressos na forma $a + bi$ em que a e b são valores reais e i é a unidade imaginária, os quaternários seguem a forma $a + bi + cj + dk$, com a, b, c e d sendo números reais e i, j, k representando as unidades imaginárias de quaternários.

Os quaternários que possuem magnitude ou módulo igual a um são denominados quaternários unitários. A magnitude de um quaternário, para $q = a + bi + cj + dk$, é calculada como $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Portanto, um quaternário unitário é definido quando $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Os quaternários unitários possuem relevância especial na descrição de rotações tridimensionais, sendo ferramentas importantes em campos como gráficos de computador e mecânica quântica.

Figura 3 – Demonstração da não existência da lei comutativa da multiplicação nos quatérnios unitários

Pode-se mostrar também que a adição de quatérnios é comutativa e associativa e que a multiplicação de quatérnios é associativa e distributiva em relação à adição. Mas não vale a lei comutativa da multiplicação. Para ver isso, considere os dois quatérnios particulares (0, 1, 0, 0) e (0, 0, 1, 0). Obtém-se

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1),$$

enquanto

$$(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -(0, 0, 0, 1);$$

isso "quebra" a lei comutativa. De fato, indicando-se por 1, *i*, *j*, *k*, respectivamente, os *quatérnios unitários* (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) e (0, 0, 0, 1), pode-se verificar que vale a seguinte tábua de multiplicação (encontra-se o produto desejado no quadro comum à linha que começa com o primeiro fator e à coluna que começa com o segundo fator):

Introdução à história da matemática / Howard Eves (p.550)

Figura 4 – Demonstração da não existência da lei comutativa da multiplicação nas matrizes

Pode-se mostrar que na resultante álgebra das matrizes, a adição é comutativa e associativa e que a multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição. Mas a multiplicação não é comutativa, como o exemplo a seguir mostra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Introdução à história da matemática / Howard Eves (p.553)

O desenvolvimento dessas novas estruturas demoraram para ser aceitas por outros estudiosos e até mesmo pelos que comprovavam a sua existência, como no caso de Hamilton que demorou 15 anos para finalmente se conformar e finalmente em 1844 publicou sua primeira edição denominada *Ausdehnungslebre*, estendendo seus estudos para classes álgebricas de muito maior generalização do que os quaternários, criando assim novos postulados e enfraquecendo alguns existentes. Outros grandes estudiosos que ajudaram na aceitação da nova álgebra foram Grassmann e Cayley.

Essa mudança de perspectiva abriu caminho para a exploração de sistemas algébricos mais abstratos, nos quais diferentes conjuntos de leis e propriedades poderiam ser estabelecidos e estudados. Assim, pensar na construção de uma álgebra que não verificasse a existência de todas as leis básicas da aritmética deixou de ser considerado um absurdo, pois a lógica e a coerência matemática podiam ser preservadas mesmo sem a aderência estrita a todas as leis anteriores.Essa mudança de perspectiva abriu caminho para a exploração de sistemas algébricos mais abstratos, nos quais diferentes conjuntos de leis e propriedades poderiam ser estabelecidos e estudados. Assim, pensar na construção de uma álgebra que não verificasse a existência de todas as leis básicas da aritmética deixou de ser considerado um absurdo, pois a lógica e a coerência matemática podiam ser preservadas mesmo sem a aderência estrita a todas as leis anteriores.

Dessa forma, a evolução da álgebra revelou sua natureza flexível e adaptável, capaz de se estender além das restrições iniciais e explorar uma variedade de estruturas e conceitos matemáticos. Essa compreensão ampliada da álgebra permitiu o desenvolvimento de teorias mais abrangentes e a aplicação de seus princípios em diversos campos da matemática e além.

2.2 O Papel do Símbolo de Igualdade na Transição da Aritmética para Álgebra

Discutir o papel do símbolo de igualdade na transição da aritmética para a álgebra está ligado a abordar os conceitos fundamentais de igualdade em álgebra. A adoção do símbolo de igualdade teve um impacto significativo na evolução da matemática e estabeleceu alicerces para os conceitos básicos de igualdade na álgebra. Nesse contexto, examinar a influência do símbolo de igualdade na passagem da aritmética para a álgebra implica em investigar como esse símbolo possibilitou a criação e desenvolvimento dos conceitos cruciais de igualdade, os quais se tornaram imprescindíveis para o entendimento e resolução de problemas algébricos.

O conceito é um elemento fundamental na estrutura do pensamento humano, atuando como uma representação mental que engloba ideias, conhecimentos e percepções compartilhadas em relação a um objeto, fenômeno ou categoria. Essas construções intelectuais possibilitam a comunicação, a organização e a compreensão do mundo ao nosso redor, servindo como base para o raciocínio e o desenvolvimento de teorias e abstrações. Com origens profundas na filosofia, na psicologia e nas ciências cognitivas, os conceitos são ferramentas indispensáveis na busca pelo entendimento e pela conexão entre os diversos aspectos da realidade.

O conceito de igualdade na aritmética possui como princípio fundamental a ideia de que duas quantidades ou expressões numéricas possuem o mesmo valor. É importante notar que a igualdade nela refere-se a casos específicos que compara valores ou expressões conhecidas, resultando no mesmo valor após a realização de operações básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão. Por exemplo:

- $4 + 3 = 7$: a soma de quatro e três é igual a sete.
- $12 - 5 = 7$: a diferença entre doze e cinco é igual a sete.
- $3 \cdot 5 = 15$: o produto de três e cinco é igual a quinze.
- $12 \div 2 = 6$: o quociente de doze divido por dois é igual a três.

Por esse motivo, conforme descrito por (MIRANDA, 2019), o sinal de igualdade recebe no conceito de equivalência aritmética o significado de igualdade operacional, que indica o resultado após a execução de uma operação ou sequência de operações . Aqui, as operações executadas são representadas no primeiro membro da igualdade, e o resultado obtido é retratado pelo segundo membro. Um exemplo disso é a expressão $\{1, 2\} \cup \{-1, 0, 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, que apresenta o resultado da união de dois conjuntos. Essa visão operacional ou significado operacional do sinal de igualdade é frequentemente o único entendimento atribuído pelos alunos do Ensino Fundamental.

Com o surgimento da álgebra e a adoção do símbolo "=", o conceito de igualdade evoluiu e se expandiu para incluir não apenas quantidades e expressões numéricas conhecidas, mas também outras definições. A seguir, exploraremos alguns desses conceitos:

2.2.1 Conceito de equivalência

> No início do século XIX a álgebra era considerada simplesmente como a aritmética simbólica. Em outras palavras, em vez de trabalhar com números específicos,

> como fazemos em aritmética, em álgebra empregamos letras que representam esses números.(EVES, 2011, p.546, trad. Hygino H.)

Nesse momento a álgebra é considerada uma generalização da aritmética, baseada nas cinco propriedades básicas dos inteiros. Pensar na álgebra dessa forma permitiu transportar o conceito de equivalência aritmética para dentro dela, ou seja, a relação binária estabelecida entre dois objetos matemáticos, que antes era representado numericamente, agora pode ser representado e provado algebricamente por símbolos que representam as operações e letras que representam um valor numérico conhecido ou desconhecido.

Com a adoção do conceito de equivalência na álgebra, também vieram as propriedades fundamentais da igualdade, sendo elas:

1) Reflexiva: $a = a$, para qualquer a .

2) Simétrica: $a = b \iff b = a$, para quaisquer a e b.

3) Transitiva: $a = b$ e $b = c \implies a = c$, para quaisquer a, b e c .

De acordo com Miranda (2019), neste contexto, o sinal “=” assume duas interpretações de equivalência. Uma delas é a igualdade comparativa que, como abordada em sua obra, expressa uma correlação entre duas entidades ou valores, normalmente apresentados de maneiras distintas, afirmando que, em essência, são idênticos.Por exemplo, essa comparação pode ser usada para indicar que duas magnitudes têm a mesma intensidade, como na equivalência entre $1m = 100cm$, ou que duas expressões numéricas apresentam o mesmo valor, como a equação $2 - 3 = 1 \cdot (-1)$.

Outra aplicação é na demonstração de identidades, como na expressão $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, onde a e b são números reais. A interpretação que Miranda (2019) dá a essas expressões de igualdade é que o sinal “=” está sendo usado para significar que ambos os lados da igualdade representam o mesmo objeto ou possuem o mesmo valor.

A segunda interpretação apresentada por Miranda (2019) é a igualdade de decomponente, que indica que um objeto matemático específico pode ser reescrito como uma sequência de operações sobre outros objetos matemáticos. Essa forma de igualdade não afirma que os significados dos sinais à esquerda e à direita do sinal de igualdade são idênticos, mas sim foca no plano do referente, ou seja, nas operações e nos objetos utilizados para produzir outro objeto. Por exemplo, a igualdade $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ é decomponente, mostrando que $x^2 - 4$ pode ser decomposto na multiplicação dos polinômios $x - 2$ e $x + 2$.

Outra ilustração é a igualdade $527 = 500 + 27$, que indica que o número 527 pode ser representado como a soma de 500 e 27. Assim, segundo Miranda (2019), neste contexto, o sinal “=” indica que o objeto matemático, representado pelo primeiro membro da igualdade, pode ser reescrito como uma sequência de operações sobre determinados objetos matemáticos, indicados no segundo membro da igualdade.

Em resumo, em primeira instância fica evidente a grande importância da generalização da aritmética que possibilitou a universalização e demonstração do conceito de equivalência da igualdade na matemática , o que mais tarde seria utilizado por Robert Recorde em sua demonstração de equações. É importante ressaltar que esse primeiro momento da álgebra denominada como a aritmética simbólica por (EVES, 2011) é a ensinada até hoje nas escolas.

2.2.2 Conceito de operações combinatórias

Outro ponto a se observa, conforme foi apontado por Heeffer (2008), é que em toda sua obra algébrica, Recorde só começa a utilizar a simbologia no capítulo sobre equações. Ou seja , esse símbolo não representa apenas as operações básicas de equivalência da aritmética, mas também

> [. . .] as operações combinatórias possíveis em uma equação. Essas operações incluem adicionar ou subtrair termos homogêneos em ambos os lados da equação, dividir ou multiplicar uma equação por uma constante ou desconhecida (introduzida por Cardano) e adicionar ou subtrair duas equações (introduzidas por Buteo).O sinal de igualdade simboliza a equação algébrica.[. . .] (HEEFFER, 2008, p.10, trad. própria).[1]

Dessa forma, pode-se se observa o surgimento do conceito de "=" como um símbolo universal para igualdade nas equações, representando todas as operações combinatórias possíveis nela e fazendo parte de sua representação estrutural na álgebra.

Em suma, a utilização do símbolo "=" por Recorde como representação da igualdade, transmitindo o conceito de equivalência e operações combinatórias nas equações, e sua aceitação universal, apesar de vários problemas históricos e variações de significado, foi suficiente para que ele se tornasse o transmissor do conceito de igualdade na matemática, superando barreiras linguísticas, culturais e até adentrando outras áreas das ciências. Prova de tal feito foi a utilização dele nas obras de Newton e Leibniz sobre a descoberta de Cálculo Diferencial e Integral, demonstrando o quanto sua simbologia facilitava a demonstração desse conceito em outros conteúdos.

2.2.3 Conceito de identidades matemáticas

Outro conceito que se utiliza da representação do símbolo de igualdade é a ideia de identidade, por mais que ambas utilizem o símbolo "=" e tragam a ideia de semelhança, há uma grande diferença. Enquanto a igualdade é uma relação que se mantém verdadeira apenas para valores específicos das variáveis, a identidade é uma relação que se mantém verdadeira para todos os valores das variáveis envolvidas.

---

[1] [. . .] *the combinatorial operations which are possible on an equation. These operations include adding or subtracting homogeneous terms on both sides of the equation, dividing or multiplying an equation by a constant or unknown (introduced by Cardano) and adding or subtracting two equations (introduced by Buteo). The equality sign symbolizes the algebraic equation.*[. . .]

Por exemplo, na equação $3x + 2 = 2x + 5$, estamos afirmando que às duas expressões, $3x + 2$ e $2x + 5$, possuem o mesmo valor quando uma solução (valor de x) é encontrada. No entanto, essa igualdade é válida apenas para um valor específico (neste caso $x = 3$). Já a relação $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é uma identidade, pois é verdadeira para todos os valores de a e b . Outro exemplo é a identidade trigonométrica $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, válida para todos os valores de x.

2.2.4 Conceito de padronização da notação de igualdade matemática

É inquestionável que a busca de poder e conhecimento do ser humano está relacionada à redução do trabalho físico e braçal, a linguagem matemática é um exemplo notável dessa ideia. Desde tempos antigos, a necessita de criar uma síntese entre a escrita e a linguagem, visando facilitar a comunicação e a transmissão de ideias, bem como economizar tempo para refletir sobre novos conceitos, é uma das razões mais simples e evidentes para o desenvolvimento de símbolos e conceitos matemáticos. A simbologia da igualdade é o fruto desse próprio pensamento. Afinal, o próprio criador afirma que

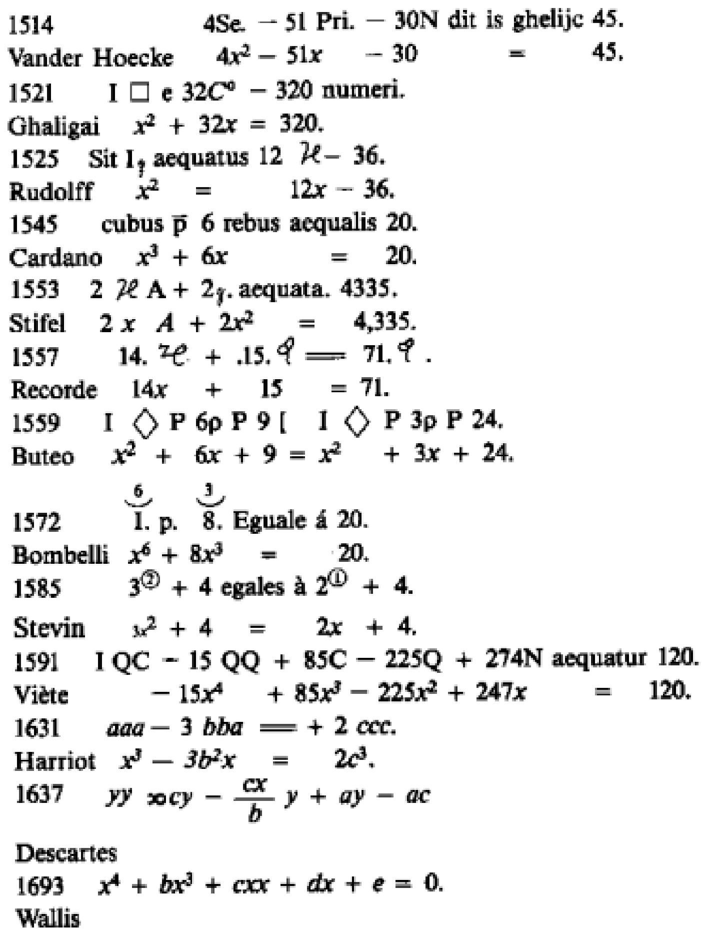
> [...]Para facilitar a alteração das equações ... E evitar a repetição tediosa dessas palavras: é igual a: Vou usar, como faço frequentemente no trabalho, um par de linhas paralelas de mesmo comprimento, assim: ==, porque não há 2 coisas que possam ser mais iguais.(HEEFFER, 2008, p.10, trad. própria)[2]

É importante notar que o próprio autor afirma que se utiliza de uma simbologia para representar o conceito de equivalência da igualdade. O ponto que queremos chegar é que as relações entre povos diferentes vão se estreitando ao decorrer de momentos históricos, linguagem e cultura se chocam ao decorrer do tempo o que pode levar a uma interpretação errônea do que se quer transmitir, pois cada língua possui uma constituição particular de ordenação e dialeto.

---

[2] [...] *For easie alteration of equations... And to avoid the tedious repetition of these woorde: is equalle: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of parralle... lines of one lenghte, thus: ==, bicause noe 2, thynges, can be moare equalle* [...](RECORDE, 1557)

Figura 5 – Notação de igualdade usada por alguns autores em suas obras sobre equações



1514 4Se. − 51 Pri. − 30N dit is ghelijc 45.
Vander Hoecke $4x^2 - 51x \quad - 30 \quad = \quad 45.$
1521 I □ e 32C° − 320 numeri.
Ghaligai $x^2 + 32x = 320.$
1525 Sit I aequatus 12 ℛ − 36.
Rudolff $x^2 \quad = \quad 12x - 36.$
1545 cubus p̄ 6 rebus aequalis 20.
Cardano $x^3 + 6x \quad = \quad 20.$
1553 2 ℛ A + 2. aequata. 4335.
Stifel $2\,x \quad A + 2x^2 \quad = \quad 4{,}335.$
1557 14. ℛ + .15. ═ 71. .
Recorde $14x \quad + \quad 15 \quad = 71.$
1559 I ◇ P 6ρ P 9 [I ◇ P 3ρ P 24.
Buteo $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24.$
1572 $\overset{6}{1}$. p. $\overset{3}{8}$. Eguale á 20.
Bombelli $x^6 + 8x^3 \quad = \quad 20.$
1585 3② + 4 egales à 2① + 4.
Stevin $x^2 + 4 \quad = \quad 2x + 4.$
1591 I QC − 15 QQ + 85C − 225Q + 274N aequatur 120.
Viète $- 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 247x \quad = \quad 120.$
1631 aaa − 3 bba ═ + 2 ccc.
Harriot $x^3 - 3b^2x \quad = \quad 2c^3.$
1637 $yy \propto cy - \frac{cx}{b}\, y + ay - ac$
Descartes
1693 $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$
Wallis

Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:Álgebra (John K. Baumgart, 1922,p.33)

A simbologia foi uma forma de procurar escapar dessa irregularidade dialética e facilitar a comunicação desse pequeno grupo. Observe que, em nenhum momento, os estudiosos se fecharam e criaram a linguagem matemática. Ela surgiu da própria necessidade de comunicação entre eles, a própria história do símbolo da igualdade demonstra isso com suas dificuldades e variações como foi abordado no capítulo dois.

2.2.5 Conceito instrutivo

Segundo Miranda (2019, p.34), o conceito de igualdade instrutiva na matemática é essencial, uma vez que estabelece as ações necessárias para determinar o valor de uma expressão particular em uma situação específica. Este método não visa a comparação direta dos valores das expressões dos dois lados do sinal de igualdade, mas sim realça as ações necessárias e os objetos específicos que são o alvo dessas ações. Isso é evidente em exemplos como a multiplicação de frações e a obtenção da derivada de uma função, cujo objetivo é demonstrar as operações que devem ser realizadas para obter o valor da expressão.

Por exemplo, considere a equação quadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$. Uma igualdade instrutiva neste caso indicaria a aplicação da fórmula de bhaskara, que é $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para resolver para x. Aqui, as ações necessárias envolvem identificar os valores de a, b e c, substituí-los na fórmula e simplificar para obter o valor de x.

Após a execução das ações indicadas, o resultado obtido é apresentado. Neste caso, as soluções são $x = 3$ e $x = 2$. Estes valores correspondem ao valor da expressão do primeiro membro da igualdade, completando assim a aplicação da igualdade instrutiva.

2.2.6 Conceito representacional

Na abordagem matemática, é fundamental compreender que uma igualdade representacional (MIRANDA, 2019, p.36) serve para indicar um sinal que carrega o mesmo significado de um sinal já conhecido anteriormente. Esta noção transcende a simples comparação dos objetos que as expressões representam, focando-se em demonstrar que sinais com significantes distintos podem ter o mesmo significado. Por exemplo, na equação $f(x)' = y' = \frac{dy}{dx}$, é uma igualdade representacional, pois y' possui o mesmo significado que$f(x)'$ que também possui o mesmo significado que $\frac{dy}{dx}$, sendo todos representantes do conceito de derivada de uma função. Portanto, a atenção é voltada principalmente para o âmbito do significado e não do referente.

2.2.7 Conceito definidor

Em matemática, a noção de uma igualdade definidora é particularmente útil quando se pretende esclarecer o significado de um símbolo específico, que compõe o primeiro membro da igualdade e representa um conceito novo. Esse tipo de igualdade segundo Miranda (2019, p.39) tem a particularidade de associar permanentemente um significado a um signo em um contexto específico, de forma que, na teoria em que o signo está inserido, este estará sempre ligado ao significado que lhe foi atribuído por uma igualdade definidora.

Por exemplo, no contexto do cálculo diferencial, o significado do sinal $f'(a)$ é bem definido e estabelecido. Isso é ilustrado na definição de derivada de uma função em um ponto, onde $f'(a)$ é dado pela expressão $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ é um exemplo de "igualdade definidora", pois associa um significado fixo, o conceito de derivada em um ponto, ao signo $f'(a)$. Neste caso, em qualquer situação dentro do Cálculo Diferencial e Integral, o signo $f'(a)$ estará sempre associado a este significado específico.

2.2.8 Conceito nomeante

"Uma igualdade nomeante tem a função de nomear, ou seja, associar uma expressão a determinado objeto, para que se possa, então, passar a utilizar essa expressão para se referir a tal objeto."(MIRANDA, 2019, p.41)

Por exemplo, se considerarmos uma função quadrática como $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, podemos simplesmente nomeá-la como $f(x)$ para referir a ela de maneira mais fácil e menos complicada em futuros cálculos ou análises.

2.2.9 Conceito relacional

Indica uma relação de dependência entre variáveis e constantes conhecidas ou desconhecidas em ambos os termos da igualdade, de tal forma que o valor de uma só é obtido por meio do valor das outras.

Miranda (2019) demonstra duas divisões desse conceito:

- Igualdade estática: as constantes desconhecidas estão interligadas de forma que o valor de uma delas pode ser obtido por meio do valor das outras, permitindo-nos alcançar um resultado específico representado pela constante desconhecida que está no primeiro membro da igualdade.Ex: $C = 2\pi r$, essa igualdade exprime uma relação de depêndencia geral, que, desde que conheçamos o valor de r (raio da circunferência) podemos alcançar valor de C (comprimento da circunferência).

- Igualdade dinâmica: nessa relação de dependência expressa as alterações que serão provocadas à medida que implicamos restrições as variveis independentes. Ex:

> $f(x) = 2x$ quando usada no seguinte contexto: "Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{R}$". Em tal contexto, essa igualdade estabelece uma relação de dependência causal entre as variáveis $f(x)$ e x, na qual o valor de $f(x)$ é o obtido por meio do valor de x. Além disso, essa relação objetiva mostrar o valor que a variável dependente $f(x)$ possuirá para cada valor assumido pela variável independente x, dizendo que $f(x)$ é sempre o dobro de x.

Diante do contexto histórico, o sinal de igualdade, com suas relações e conceitos cada vez mais abrangentes, demonstra a sua importância na transição da aritmética para a álgebra como um elemento-chave na comunicação e na representação de relações matemáticas. A aceitação universal do símbolo "=" permitiu que o conceito de igualdade fosse transmitido de forma eficiente, superando barreiras linguísticas e culturais, e até mesmo se estendendo a outras áreas das ciências.

Ao longo dos anos, matemáticos e educadores têm trabalhado para desenvolver métodos cada vez mais eficazes para a compreensão e aplicação desses conceitos. À medida que a sociedade avança e as necessidades matemáticas evoluem, o conceito de igualdade e a maneira como ele é aplicado continuará a se transformar. Novas descobertas e aplicações podem expandir ainda mais a compreensão desse conceito fundamental.

3 O ENTENDIMENTO DO SÍMBOLO DE IGUALDADE NA PASSAGEM DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA ENTRE OS ALUNOS

Como resultado do trabalho criado sobre os conceitos de igualdade na evolução do símbolo e sua história “=” foi realizado uma pesquisa quantitativa (Apêndice-A) , com base nas pesquisas e conhecimentos adquiridos, com o intuito de analisar o conhecimento do aluno sobre o assunto.

As pesquisas foram realizadas no dia 16/05/2023 aos alunos no Colégio Murilo Braga com três turmas da 1ª série do ensino médio no turno noturno.

Constatou-se na pesquisa que um total de 66,7% dos alunos não possui consciência sobre a evolução do símbolo de igualdade na história da matemática, enquanto 38,9% afirma possuir um conhecimento prévio acerca da evolução do símbolo da igualdade. Este dado sugere um possível déficit no ensino da matemática, no qual a contextualização histórica de símbolos matemáticos, que potencialmente poderia auxiliar na compreensão de seu uso, parece estar em falta.

Adicionalmente, verificou-se que 55,6% dos alunos reconhecem a relevância do símbolo da igualdade para a assimilação de conceitos matemáticos básicos, ao passo que 38,9% apresentaram incertezas a esse respeito. Esta constatação sugere que, apesar da maioria dos alunos perceber a importância da igualdade, ainda há um segmento significativo de estudantes com incertezas sobre a relevância desse símbolo.

Curiosamente, verificou-se que 61,1% dos discentes afirmaram não terem se deparado com diferentes representações do conceito de igualdade em seus estudos de matemática. Este resultado pode indicar que os currículos de matemática não estão explorando suficientemente notações variadas e abordagens alternativas, limitando assim a exposição dos alunos a diferentes perspectivas matemáticas.

Com relação à percepção dos alunos sobre a aplicação do símbolo de igualdade na aritmética e na álgebra, 38,9% acreditam que, na aritmética, o símbolo representa uma relação entre números, enquanto na álgebra, indica uma relação entre expressões algébricas. Este dado reflete um nível razoável de compreensão por parte dos alunos sobre a natureza flexível do símbolo da igualdade em diferentes contextos da matemática.

Ao final, o estudo revelou que a transição da aritmética para a álgebra representou um desafio para 55,6% dos alunos, impactando a compreensão deles acerca dos conceitos matemáticos e do uso do símbolo da igualdade. Este resultado destaca a necessidade de estratégias pedagógicas mais eficazes para facilitar essa transição.

Embora a maioria dos alunos (83,3%) tenha concordado que os professores explicam os conceitos de igualdade de maneira clara e eficaz, “às vezes”, 77,8% dos alunos concordaram que é necessário incluir o ensino da história da matemática, e a evolução do símbolo da igualdade, em suas aulas. Este resultado aponta que os alunos valorizam a inclusão da história da matemática como uma forma de aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos.

Em resumo, os resultados desta pesquisa indicam que a compreensão dos alunos sobre o conceito e o símbolo da igualdade é influenciada por uma série de fatores, incluindo o ensino da evolução histórica dos símbolos matemáticos, a transição da aritmética para a álgebra, e as estratégias de ensino utilizadas para explicar os conceitos de igualdade.

A falta de familiaridade com a evolução do símbolo da igualdade, identificada em 66,7% dos alunos, reflete a necessidade de integrar a história da matemática no currículo escolar, a fim de promover uma compreensão mais aprofundada e contextualizada dos conceitos matemáticos.

A transição da aritmética para a álgebra foi um ponto de dificuldade para muitos alunos, o que sugere a necessidade de desenvolver métodos pedagógicos mais eficazes para facilitar essa transição. A formação de conceitos matemáticos e o entendimento do uso do símbolo da igualdade foram afetados por essa mudança, com 55,6% dos alunos encontrando dificuldades durante essa transição.

Adicionalmente, apesar de 83,3% dos alunos concordarem que os professores explicam os conceitos de igualdade de maneira clara e eficaz,"às vezes", os resultados sugerem que existe espaço para melhoria. As respostas dos alunos indicam que uma abordagem mais consistente e efetiva na explicação desses conceitos pode ser necessária.

Por fim, a pesquisa reforça a importância de incorporar a história da matemática no ensino, com 77,8% dos alunos concordando que aprender sobre a evolução do símbolo de igualdade seria útil para suas aulas. Este resultado reafirma a relevância do conhecimento histórico no enriquecimento do aprendizado matemático e na compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Este estudo, portanto, proporciona uma base para uma reflexão mais aprofundada sobre as estratégias pedagógicas empregadas para ensinar o conceito e o símbolo de igualdade. O objetivo é promover uma compreensão mais aprofundada e abrangente desse conceito fundamental, contribuindo para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frequentemente, observa-se uma tendência notável de associar a matemática unicamente como um campo de cálculos numéricos, negligenciando seu rico contexto histórico. Esta monografia, que examina a evolução histórica e os conceitos do símbolo de igualdade na matemática na transição da aritmética para a álgebra, enfatiza a necessidade de incorporar a história da matemática no currículo escolar, com o objetivo de desafiar essa tendência.

Todas as pesquisas analisadas durante este estudo foram direcionadas para avaliar a trajetória do símbolo "=", desde sua concepção como um símbolo de igualdade equacional até os diversos conceitos a ele associados ao longo da história, como equivalência, operações combinatórias, identidades matemáticas e padronização da notação. Neste trabalho, destacamos a complexidade do símbolo "=" e apresentamos toda uma construção histórica relacionada ao progresso matemático que explica como ele surgiu e por que.

Na análise dos dados coletados pelo questionário, trouxemos à luz a visão do aluno sobre a transição da aritmética para a álgebra e sua percepção sobre os conceitos do sinal de igualdade. Identificamos um desejo por parte dos estudantes de compreender a matemática não apenas como uma série de fórmulas e equações, mas como uma disciplina que tem uma história rica e um desenvolvimento evolutivo. O envolvimento dos alunos com a história da matemática é uma maneira de enriquecer seu vocabulário e melhorar a interpretação e compreensão dos símbolos matemáticos.

Com base nessas conclusões, sugerimos a exploração de estratégias pedagógicas inovadoras e adaptáveis às características e necessidades dos alunos, com o objetivo de promover uma melhor compreensão do símbolo de igualdade. Ademais, é crucial estabelecer uma base sólida de conhecimento matemático desde a aritmética, facilitando uma transição mais suave para a álgebra.

Em resumo, esta pesquisa destaca a importância do símbolo de igualdade na matemática, tanto do ponto de vista histórico quanto pedagógico. Esperamos que os resultados e reflexões apresentados nesta monografia sirvam para realçar a necessidade de introduzir o contexto histórico da matemática como uma ferramenta de ensino eficaz para a própria disciplina, rompendo a tendência de caracterizar a matemática meramente como um campo de cálculos.

REFERÊNCIAS

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**: Álgebra. São Paulo: Atual, 1922. v. 4. Acesso em: 10/05/2023.

CAJORI, F. Signs of Equality. In: CAJORI, F. (Ed.). **A History of Mathematical Notations**. New York: Dover Publications, 1918. v. 1 e 2, cap. III, p. 260 – 270. Acesso em: 31/03/2023.

CIANI, A. B. *et al.* **O SINAL DE IGUAL E SUA UTILIZAÇÃO EM SENTENÇAS MATEMÁTICAS**. Cascavel: [s.n.], 2017. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/212/138. Acesso em: 14/03/2023.

COSME, V. V. UM PASSEIO PELA HISTÓRIA DE SÍMBOLOS QUE REPRESENTARAM IGUALDADE MATEMÁTICA. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 10, n. 19, p. 75 – 87, 1 2010. Disponível em: http://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/150. Acesso em: 13/10/2022.

DESCARTES, R. **La Géométrie**. Adam e tannery. tradução de José Portugal dos Santos Ramos: [s.n.], 1637. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/cadernos/article/download/556/436/1054. Acesso em: 17/03/2023.

ESTEVE, M. R. M. **The symbolic treatment of Euclid's Elements in Hérigone's Cursus Mathematicus (1634, 1637, 1642)**. 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/267660252_The_symbolic_treatment_of_Euclid's_Elements_in_Herigone's_Cursus_Mathematicus_163 Acesso em: 17/03/2023.

EUCLIDES. **Os elementos**: tradução e introdução de Irineu Bicudo. 2009. ed. São Paulo: Unesp, 2009. 600 p. Disponível em: https://ia601508.us.archive.org/10/items/Os.Elementos-Euclides/OsElementos-Euclides.pdf.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**: tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas:SP: Unicamp, 2011.

HEEFFER, A. **The Emergence of Symbolic Algebra as a Shift in Predominant Models**. 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226290174_The_Emergence_of_Symbolic_Algebra_as_a_Shift_in_Predominant_Models. Acesso em: 19/03/2023.

JARDIM, F. G. R.; COSTA, J. M. S.; CARIBÉ, S. R. **A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO SÍMBOLO DE IGUALDADE "="**. Revista da Educação Matemática UFOP, 2011. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/redumat/article/view/2018. Acesso em: 17/03/2023.

LIMA, B. S. de. **UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE A AXIOMATIZAÇÃO DA ÁLGEBRA**. 2020. 11 p. Dissertação (CURSO DE INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA) — UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO – UFERSA. Disponível em: https://repositorio.ufersa.edu.br/bitstream/prefix/6339/1/BeatrizSL_ART.pdf. Acesso em: 14/04/2023.

MIRANDA, D. R. **Significados do sinal de igualdade na Matemática**. 2019. 77 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade do Estado do rio de Janeiro. Disponível em: http://www.bdtd.uerj.br/handle/1/4840. Acesso em: 04/03/2023.

MOURA, A. R. L. de; SOUSA, M. do Carmo de. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetike**, Campinas:SP, v. 13, n. 2, p. 11 – 46, julho 2009. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646987. Acesso em: 17/04/2023.

RECORDE, R. **The Whetstone of Witte**. [s.n.], 1557. Disponível em: https://ia801604.us.archive.org/14/items/TheWhetstoneOfWitte/TheWhetstoneOfWitte_text.pdf. Acesso em: 19/03/2023.

APÊNDICE

Apêndice-A

Questões monografia :

1-Você já ouviu falar da evolução do símbolo de igualdade na história da matemática?

( )Sim ( )Não

2- Você acha que o símbolo de igualdade é importante para a compreensão dos conceitos matemáticos básicos?

( )Sim ( )Não ( )Não tenho certeza

3-Você já se deparou com diferentes símbolos ou notações para representar a igualdade em seu estudo da matemática?

( )Sim ( )Não

4- Qual das seguintes opções melhor descreve a utilização do símbolo de igualdade na aritmética e na álgebra para você?

( )Na aritmética, o símbolo de igualdade indica uma relação entre números, enquanto na álgebra, indica uma relação entre expressões algébricas.

( )Na aritmética, o símbolo de igualdade é usado apenas para somar números, enquanto na álgebra é usado para resolver equações.

( )Tanto na aritmética quanto na álgebra , o símbolo de igualdade é usado de forma operacional.

( )Na aritmética, o símbolo de igualdade indica que dois números são diferentes, enquanto na álgebra indica que duas expressões são equivalentes.

5- Em sua experiência, a mudança da aritmética para a álgebra afetou sua compreensão dos conceitos matemáticos e do uso do símbolo de igualdade? Selecione a opção que melhor descreve sua experiência:

( )A transição foi fácil e não afetou significativamente minha compreensão dos conceitos matemáticos ou do uso do símbolo de igualdade.

( )A transição foi desafiadora, mas eventualmente compreendi os conceitos matemáticos e o uso do símbolo de igualdade na álgebra.

( )A transição foi desafiadora, e ainda enfrento dificuldades para compreender os conceitos matemáticos e o uso do símbolo de igualdade na álgebra.

( )A transição não foi relevante, pois já tinha familiaridade com a álgebra antes de estudar aritmética.

6- Diante de tais mudanças, você acha que os professores explicam os conceitos de igualdade de maneira clara e eficaz?

( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

7-Para você diante de tais mudanças, torna-se necessário aborda o ensino da história da matemática, incluindo a evolução do símbolo de igualdade em suas aulas.

( )Sim ( )Não ( )Indiferente