PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TECNOLOGIAS DIGITAIS EM TEOREMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

JEOVANA TEIXEIRA DE REZENDE

GOIÂNIA

2022
JEOVANA TEIXEIRA DE REZENDE

TECNOLOGIAS DIGITAIS EM TEOREMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Orientador(a): Prof. Ms. Rosimara Fachin Pelá.

Banca examinadora:

Prof. Ms. Bercholina Honorato Alves.

Prof. Dr. Vanda Domingos Vieira.

GOIÂNIA

2022

JEOVANA TEIXEIRA DE REZENDE

TECNOLOGIAS DIGITAIS EM TEOREMAS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em sua forma final pela Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, para obtenção do título de licenciatura em Matemática, em _____/_____/__________.

____

Orientador(a): Ms. Rosimara Fachin Pelá

Banca examinadora:

____

Prof. Ms. Bercholina Honorato Alves.

____

Prof. Dr. Vanda Domingos Vieira.

GOIÂNIA

2022

A Deus pela minha vida e benções vividas.

Aos meus familiares e amigos.

À minha mãe Maria de Lourdes de Rezende pelo apoio.

A minha companheira Lohrane Araújo dos Santos pelo apoio e dedicação.

A mim pelo esforço e resiliência.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente, já que sem ele nada disso seria possível, me dando forças para continuar e sabedoria na minha trajetória acadêmica. A minha família, especialmente minha mãe, que viveu cada momento do meu lado, me apoiando e ajudando no que foi preciso durante esses 4 anos, uma mulher de garra e perseverança que é a maior inspiração que tenho hoje, de força. Ao meu pai que mesmo longe me apoiou e contribuiu para que eu alcançasse meu objetivo. A minha irmã e sobrinha que era um refúgio para os momentos difíceis, estando ao meu lado, me alegrando e me dando forças. Aos meus amigos que estavam comigo independente do que acontecesse, e especialmente a minha melhor amiga e companheira que fez e faz parte dos meus momentos bons e ruins, me ajudando muito em situações de sufoco e é a minha grande inspiração na vida. Agradeço aos meus docentes, que sem eles nada disso seria possível, me atribuindo sabedoria e conhecimento durante cada passo que eu dava. A minha orientadora Rosimara Fachin que me mostrou o verdadeiro sentido da docência e é uma inspiração como mulher e professora. Agradeço a mim mesma que persistiu e lutou por essa graduação, caindo, levantando-se e sempre aprendendo com os erros, hoje sou grata por ter escolhido esse curso, e feito ele de forma exemplar. Por fim agradeço a Pontifícia Universidade Católica de Goiás por ser minha segunda casa, e ter esse cuidado com a aprendizagem, a educação e seus discentes.

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.”

Albert Einstein

RESUMO

O intuito deste trabalho e mostrar que o uso da tecnologia, de forma inovadora, se tornou uma ferramenta excelente para o cotidiano do professor em sala de aula. Será usado o *software* GeoGebra para mostrar visualmente algumas demonstrações de teoremas, dentro da geometria euclidiana. Pois é evidente que conteúdos como esse, tem uma maior dificuldade de compreensão, já que é algo completamente abstrato e dedutivo, desde modo, usa-se a tecnologia a favor do professor, explorando os recursos visuais que esse *software* apresenta. É fato que fazer essas demonstrações de forma visual contribui para uma maturidade intelectual do aluno, pois o mesmo consegue visualizar o objeto de estudo em suas diversas formas, propriedades e construção. A metodologia designada para este trabalho, começa contextualizando a tecnologia digital, falando sobre sua importância no cenário cotidiano através de suas evoluções, até as tecnologias utilizada na educação e na matemática, em seguida inicia-se um breve resumo sobre a história da geometria euclidiana, sobre a vida e contribuições de Pitágoras e Tales de Mileto, no âmbito matemático. Para assim realizar as demonstrações de cada Teorema destes matemáticos, com o intuito de apresentá-las através de uma tecnologia digital e visual, onde o *software* escolhido faz exatamente o papel de simplificar a visualização destas demonstrações. É compreensível que a realização dessa metodologia em sala de aula, acompanha diversas dificuldades, principalmente a falta de recursos e acesso as tecnologias necessárias, pois diversas instituições de ensino possui uma infraestrutura precária quando se trata de tecnologia. O fato é, a educação necessita de investimentos em recursos tecnológicos nas escolas e formação continuada para os professores, e este trabalho pretende exemplificar que é possível à execução de uma metodologia ativa e lúdica, realizável para a sala de aula, favorecendo assim o ensino-aprendizagem em Matemática.

Palavras-Chave: *Tecnologia; metodologia; sala de aula, software.*

ABSTRACT

The purpose of this work is to clearly show that the use of technology, in an innovative way, has become an excellent tool for the teacher's daily life in the classroom. GeoGebra software will be used to visually show some theorem demonstrations within Euclidean geometry. Because it is evident that content like this, has a greater difficulty in understanding, since it is something completely abstract and deductive, in this way, technology is used in favor of the teacher, exploring the visual resources that this software presents. It is a fact that making these demonstrations visually contributes to the student's intellectual maturity, as he is able to visualize the object of study in its various forms, properties and construction. The methodology designated for this work has a process in which, first, technology is discussed, technology in education and technology in mathematics, then a brief contextualization on the history of Euclidean geometry, on the life and contributions of Pythagoras and Thales of Miletus, in the mathematical field. Then the demonstrations of each Theorem are carried out, in order to present them, then we take them to the software, and we perform the visual demonstration in a simplified way. It is understandable that the implementation of this methodology in the classroom comes with several difficulties, mainly the lack of resources and access to the necessary technologies, since several educational institutions have a precarious infrastructure when it comes to technology. The fact is, education needs investments in technological resources in schools and continuing education for teachers, and this work intends to exemplify that it is possible to implement an active and playful methodology, achievable for the classroom, thus favoring teaching- learning in Mathematics.

***Keywords**: Technology; methodology; classroom, software.*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No começo de 2020 iniciou uma pandemia que se espalhou para o mundo inteiro de uma doença chamada de novo corona vírus, levando toda a população mundial ao isolamento social para conter a contaminação em massa das pessoas. Devido ao isolamento, vários setores foram afetados inclusive o educacional. No Brasil, em março de 2020 as redes de ensino públicas e privadas suspenderam temporariamente as aulas, em combate à pandemia do novo corona vírus chamado de COVID-19. A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) propôs um relatório aos líderes dos sistemas e organizações educacionais, que desenvolve-se planos para a continuidade dos estudos por meio de modalidades alternativas, enquanto durar o período de isolamento social, haja vista a necessidade de manter a educação das crianças, jovens e adultos. Segundo Felcher:

> *Com a pandemia de covid-19, a rotina de diversas profissões foi alterada e com a Educação básica não foi diferente com a suspensão das aulas presenciais. Para contornar isso, o ensino remoto foi uma alternativa para atender os estudantes durante o período de pandemia (Felcher; Pinto; Alves, 2020).*

Neste contexto, e com o intuito de manter todas as atividades educacionais durante o período de isolamento social, muitas instituições escolares optaram pelo ensino remoto, de modo que os educadores tiveram que adaptar suas disciplinas para o formato online. Essa forma foi necessária para que as atividades online direcionadas aos alunos, fossem cruciais para minimizar os prejuízos do período na ausência das aulas presenciais. A dúvida de professores e especialistas era de como fazer isso, já que nenhum sistema estava preparado para uma pandemia de proporção gigantesca, que impactou o mundo no início do ano de 2020, o que levou uma paralisação mundial. Assim, as soluções de ensino remoto através da utilização da tecnologia digital foram extremamente importantes para enfrentar está problemática.

> *O período de Pandemia trouxe um cenário desafiador para os professores já que aulas presenciais começaram a ser substituídas por virtuais e remotas, o que naturalmente gera um contexto problemático para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. A falta de norteadores públicos, com relação à Educação, fez os docentes se reinventarem e adaptarem suas práticas, de modo que os alunos não ficassem totalmente desassistidos (SARAIVA et al., 2020).*

Então se viu necessário e importante a utilização de tecnologia digital na educação, porém essa realidade estava muito distante, já que diversas instituições de ensino públicas e privadas tinham dificuldades de até mesmo falta de recursos e capacitação de profissionais. Assim foi essencial a busca e pesquisas de métodos e metodologias para que o ensino remoto fosse uma realidade de fato, se tornando um ambiente escolar que satisfazia as necessidades de cada disciplina. E pensando nisso, uma das disciplinas mais afetadas durante o período pandêmico foi a matemática, já que matemática, assim como as demais disciplinas, precisa-se adaptar aos diferentes contextos sociais, políticos e económicos presentes em uma sociedade. Logo, o ensino tradicional da matemática, baseado em aulas meramente expositivas tem sido um problema, dado que o aluno considera essa prática como algo entediante e cansativa. Logo:

> *Ensinar matemática é um desafio, pois não dá mais para trabalhar com essa disciplina utilizando apenas a perspectiva tradicional de ensino. É importante levar em consideração o contexto social em que o aluno está inserido, suas experiências anteriores e seus valores culturais, sociais e morais. Sempre que o aluno realiza atividades, principalmente as que exigem concentração, ele leva em consideração suas experiências anteriores, outras situações que possam lhe mostrar uma saída (BRASIL, 1998).*

Em vista disso, o professor teve que se integrar e se atualizar sobre as ferramentas tecnológicas que surgiram antes e durante a pandemia do covid-19, para poder utilizá-las em suas aulas com mais segurança, garantindo, dessa forma, uma aprendizagem mais participativa e ativa por partes dos alunos, desta forma o professor precisa conhecer bem essas novas ferramentas e metodologias, fazendo com que suas aplicações nas aulas tornem o processo ensino aprendizagem mais atrativo e contribua para uma educação mais significativa.

> *A informática na Educação Matemática é tão importante quanto o lápis, o papel e o giz. O pensar matemático deve acontecer também a partir dos mais variados recursos tecnológicos (computador, calculadora, internet, [...] para que, das investigações e dúvidas, possam constituir-se novas formas de estudar e aplicar esse saber (ZORZAN, 2007, p.87).*

Neste sentido, trazemos uma proposta de ensino-aprendizagem para o conteúdo de geometria euclidiana, agregando às novas tecnologias de ensino, de forma a valorizar o conhecimento do aluno no processo educativo, tornando-o sujeito do conhecimento, passando de uma posição passiva para agente. Adotar essa proposta faz com que o professor trabalhe numa parceria com aluno, na construção dos saberes geométricos.

2. TECNOLOGIAS NA SOCIEDADE

Os dias atuais mostra como os desenvolvimentos tecnológicos digitais se tornaram parte do nosso cotidiano, desde que surgiram as primeiras tecnologias digitais, o ser humano se vê desafiado a se adaptar a cada uma delas. Porém, essa adaptação se transformou rapidamente em integração, fazendo com que as ferramentas tecnológicas fossem essenciais para a nossa sociedade. No livro "*The Shallows*: O que a internet está fazendo com os nossos cérebros" diz que toda vez que uma tecnologia chegar em nossas vidas, nós não seremos mais os mesmos.

> *E o que a internet parece estar fazendo é diminuir gradualmente minha capacidade de concentração e mentalização. Quer eu esteja online ou não, minha mente agora espera receber informações da maneira como a Net as distribui: em uma rápida corrente de partículas em movimento. Certa vez eu fui um mergulhador em um oceano de palavras. Agora eu surfo uma superfície como um piloto de Jet Ski. (Carr, 2010: 6-7)*

Essa premissa consegue explicar o impacto da tecnologia no cotidiano. Afinal, a tecnologia mudou o nosso comportamento e nossas expectativas em relação às ferramentas que estão a nosso dispor. A evolução histórica da tecnologia tem início nas primeiras invenções do homem, que ao longo do tempo desenvolveu ferramentas de caça, descobriu o fogo, criou a roda para facilitar a locomoção, tudo isso com o intuito de tornar a vida mais fácil que antes. A lógica era sempre criar invenções capazes de contribuir para a sociedade, como o telefone, a luz elétrica, o rádio, a televisão e a internet, que nos trouxe a facilidade de ter tudo em um só lugar, assim vemos exemplos claros das áreas mais impactadas com a evolução tecnológica, como o trabalho, a educação, a comunicação e as relações sociais.

2.1. TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

As tecnologias na educação, que apontavam como tendência o ensino a distância, já eram utilizadas por algumas instituições, e passaram a ser fundamentais para a realização das atividades básicas. Nesse cenário, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) passaram a ser as grandes aliadas do sistema educacional. Assim temos a contextualização das TICs por Rodrigues, 2014.

> *Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) podem ser definidas como o conjunto total de tecnologias que permitem a produção, o acesso e a propagação de informações, assim como tecnologias que permitem a comunicação entre pessoas. Com a evolução tecnológica, surgiram novas tecnologias, que se propagaram pelo mundo como formas de difusão de conhecimento e facilitaram a comunicação entre as pessoas, independentemente de distâncias geográficas (RODRIGUES et al., 2014).*

Com a criação das TICs, foi possível perceber que o uso dessas tecnologias digitais em sala de aula pode ser consideradas uma possível resposta para determinados problemas que a educação como um todo enfrenta. É preciso considerar que o grande desafio da funcionalidade da internet, é exatamente conseguir proporcionar estabilidade em diversas regiões de forma uniforme, no Brasil infelizmente, ainda não é uma realidade o uso de tecnologias digitais no cotidiano de todo estudante, pois o acesso precário ou mesmo a não possibilidade de acesso, faz com que fique inviável introduzir tecnologia no âmbito escolar em geral. Já que a versatilidade de um computador, é adaptável para qualquer perspectiva de ensino e aprendizagem, nesse sentido o ponto importante a se relatar é que a introdução de uma tecnologia tão suave como o computador ou também a internet em uma estrutura tão dura como a escola, permitirá refletir enfoques poucos explorados sobre uma forma de se fazer educação, que por tradição e costume, foi aceita naturalmente como a única possível.

> *As TICs são utilizadas nas mais diversas áreas, como, por exemplo, na indústria, no comércio, no setor de investimentos e na educação. Em todas as possíveis aplicações de TICs, o principal objetivo é proporcionar o acesso à automação da informação e comunicação. No que tange ao conjunto de tecnologias emergentes em TICs, são incluídos softwares e hardwares, para garantir a operacionalização da comunicação. A grande popularização das TICs ocorreu com o surgimento e a difusão da internet (PACIEVITCH, 2014).*

A finalidade em si do texto “TECNOLOGIAS para a transformar a educação” de Juana Maria Sancho e Fernando Hernández é em si demonstrar e problematizar as concepções sobre o ensino e a aprendizagem vigentes e profundamente arraigada nas escolas tendo como referência as TICs. Onde as TICs são ferramentas facilitadoras para o ensino atual , elas são sim necessárias para determinados problemas vividos na educação, como por exemplo a comunicação professor-aluno, fora de ambiente escolar, para que contenha mais interesse entre os alunos do que obrigação, com isso o argumento principal é a dificuldade de tornar as TICs meios de ensino que melhorem os processos e resultados da aprendizagem, então se os professores, diretores, assessores pedagógicos, especialistas em educação e pessoal da administração não revisarem sua forma de entender como se ensina e como aprendem as crianças e jovens de atualmente, não terá mudança na educação. É fundamental que tenha um planejamento e uma prática nos projetos educativos que suprem e respondem as necessidades formativas dos alunos.

Assim que surgiu as Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NTICs), no contexto da Terceira Revolução Industrial e Revolução Informacional, no período da década de 1990, observa-se que elas foram pensadas como um conjunto de recursos tecnológicos, utilizados de forma integrada e ampla. As NTICs contêm ferramentas que possuem o potencial de colaborar com diversos setores da sociedade, como por exemplo: o comércio, a indústria, a economia, a comunicação e principalmente a educação.

Na educação vemos uma mudança significativa com a integração tecnológica em sala de aula, começou a surgir laboratórios de informática nas escolas, depois foi a vez dos *slides* ganhar destaques em salas através de *Data show*, então educadores começaram a olhar as NTICs com uma nova perspectiva, deste modo foi utilizado ferramentas e *softwares* nas práticas educacionais em sala de aula. Com o aprofundamento no conhecimento sobre as tecnologias de um computador, é possível perceber em um ponto de vista prático, que a utilização de aplicações informáticas não somente de forma teórica, crítica, filosófica e social podem sim representar uma nova forma de aprendizagem para a sociedade, ou seja uma nova ferramenta de aprendizagem para a educação.

Durante o período pandêmico a COVID-19 que foi caracterizada pela OMS como uma pandemia. No qual o termo "pandemia" se refere à distribuição geográfica de uma doença e não à sua gravidade. A designação reconhece que, no momento, existem surtos de COVID-19 em vários países e regiões do mundo. Diversas áreas optaram por paralisar suas atividades presenciais, e a escola não foi diferente, as secretárias de educação precisaram elaborar medidas provisórias, onde as aulas presenciais foram suspensas e passaram a ser de forma remota. Então para a educação a tecnologia digital teve um papel fundamental para a continuação do ensino, no caso de forma remota, a pandemia teve impacto em todos os segmentos da sociedade e com a educação não foi diferente. As instituições passaram a buscar alternativas para enfrentar as diversas mudanças tecnológicas no sistema educacional. Em março de 2020, milhares de estudantes deixaram de frequentar as atividades presenciais nas escolas, foi preciso que as instituições, os professores e os alunos se adaptassem à nova realidade do ensino remoto.

No início da pandemia, muitas das grandes instituições educacionais particulares, tiveram um desempenho melhor e estavam mais equipadas tecnologicamente para o ensino a distância (EAD), foram utilizadas plataformas como *Moodle* e *Teams*, por exemplo, para se recriar um ambiente de sala de aula, com conteúdo postados e aulas gravadas, os alunos também tinha um espaço de conversa com seus professores, já que essas plataformas disponibilizam este recurso. Porém escolas de baixa estrutura e principalmente escolas públicas, tiveram que buscar apoio em plataformas abertas e gratuitas, como o *Google Meet*, *Zoom* e até o próprio *WhatsApp*, mas a falta de recursos dos alunos e a capacitação dos professores foi uma das dificuldades que duraram a pandemia inteira. Assim o conceito de tecnologia da educação ganhou outras visões, a gameficação por exemplo, trouxe possibilidades de exploração de recursos jamais imaginados dentro de sala. Então softwares e outras ferramentas tornaram se essenciais em período pandêmico. Como cita Rojas sobre o uso da tecnologia na educação.

> *O uso da tecnologia nas mais diversas áreas tem se tornado fundamental, na educação não poderia ser diferente, principalmente para aperfeiçoar e facilitar o entendimento do aluno, em especial nas aulas de matemática, por meio de instrumentos facilitadores. Houve uma mudança no próprio instrumento de uso pelo professor em sala de aula, passando de um quadro branco, com um pincel, para computadores e retroprojetores. Dessa forma, a era do conhecimento e a aplicação dos instrumentos de tecnologia da informação possibilitaram uma melhor otimização nos processos educacionais, (ROJAS et al, 2008).*

Porém a tecnologia não se faz apenas de benefícios e soluções para a educação, já que quando uma ferramenta é utilizada para realizar tarefas que poderiam ser feitas, de modo mais simples, isso pode ser chamado de inovação conservadora. O fato de usar por exemplo um computador para tarefas que poderiam ser feitas em copiadoras, livros e até mesmo lápis e papel, mostra que isso seria uma aplicação da tecnologia que não explora seus recursos únicos, e não muda qualitativamente a rotina da escola, do professor e do aluno.

Atualmente a inovação conservadora predominante é o uso de projeções de tela de computador, sendo o *PowerPoint* o mais utilizado, no qual na maioria das vezes é uma extensão do quadro, já que seu uso é para a visualização de textos, enquanto isso o professor fica na frente da sala recitando sua lição com ajuda de efeitos especiais, mostrando objetos se movimentando, fórmulas e imagens que as vezes nem sentido tem com o conteúdo. Tais tecnologias impendem a capacitação expositiva do professor, reduzindo a posição relativa dos alunos na situação de aprendizagem.

Porém toda inovação tem seus lados positivos e negativos, mas a tecnologia em si mostra que suas aplicações de forma coerente, agrega sim para a educação, o texto “os benefícios da tecnologia na educação” de Gabriele Silva nos mostram uma perspectiva otimista sobre as novas tecnologias na educação.

> *As novas tecnologias na educação são uma importante ferramenta para dinamizar o processo de ensino-aprendizagem. Se aplicada de modo responsável e criativo, a tecnologia pode apresentar diferentes benefícios para os alunos e até mesmo para a equipe de educadores. Com a popularização dos aparatos tecnológicos, é comum que as novas gerações tenham esses equipamentos inseridos em seu dia a dia, e a escola não deve estar alheia a essas influências, (SILVA, 2020).*

Importante ressaltar que a tecnologia não substitui o papel dos professores na educação, sendo fundamental que os educadores saibam conduzir a utilização dessas novas mídias e *softwares*. Um aparelho de última geração não garante o aprendizado do estudante, o que torna essencial a figura do professor nesse processo.

Quando o equilíbrio é encontrado, o uso de equipamentos, *softwares* e mídias contribuem para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e auxiliam os professores a despertar a curiosidade dos estudantes. Até porque a própria BNCC reforça a utilização de tecnologia na competência 5, que reconhece que a tecnologia tem um papel fundamental na formação do aluno, a competência diz o seguinte: “Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas praticas socias (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva".

2.2. TECNOLOGIA NA MATEMÁTICA

O ensino de Matemática sempre foi uma problemática na aprendizagem, pois se trata de uma ciência que estuda, por métodos dedutivos, objetos abstratos e as relações entre eles, assim sendo uma disciplina complexa de compreensão. Vários conteúdos dentro da matemática, são conhecidos por ter um nível de entendimento abstraído dos demais, um exemplo é exatamente a geometria, pois se trata de um ramo da matemática que estuda formas, tamanhos e posições métricas, mostrando seu grau de compreensão por conta de seu objeto de estudo ser lúdico. Outro conteúdo é uma ramificação da geometria, onde o foco do seu estudo são objetos de duas ou três dimensões baseadas no estudo de Euclides, a famosa geometria euclidiana. Esta disciplina é vista pelos alunos com desinteresse e desânimo, já que ela necessita de uma compreensão abstrata. As aulas tradicionais de geometria precisam ser modificadas para despertar o interesse dos alunos e permitir que estes se envolvam e possam trocar experiências e saberes, assim compreender de forma mais clara o conteúdo ministrado.

Pensando nisso, a tecnologia nas aulas de matemática, sendo proposta de uma maneira planejada e desenvolta, pode ser uma alternativa para despertar o interesse do aluno nas aulas de geometria, permitindo ao aluno uma maneira mais prática e lúdica de compreender algumas atividades especificas em sala de aula. Aliás é possível otimizar as aulas, por meio do tempo que seria gasto em quadros para elaborar os desenhos geométricos, bem como a confecção de matrizes e gráficos.

Partindo da necessidade de melhorar as aulas de Matemática e especialmente de geometria euclidiana, uma alternativa é utilizar as diferentes tecnologias existentes hoje como o auxílio do *software* GeoGebra, que é uma multiplataforma gratuita que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único lugar, esse software apresenta um leque de atividades e ferramentas utilizando o plano cartesiano e outras variantes da geometria, assim facilitando o processo aprendizagem com aulas mais interessantes, criativas e dinâmicas, buscando um interesse sobre esse conteúdo, e motivando de forma direta os alunos, que tecnologia digital por ser sim, o começo, meio ou fim, mas nunca o todo. Esse conteúdo em si sempre foi complicado para alguns ou até a maioria dos educadores de matemática, por necessitar metodologias ativas, já que explicar formas geometrias e dimensões no quadro é uma tarefa quase impossível, por isso é tão necessário pensar e aplicar metodologias inovadoras para uma aprendizagem facilitada da Matemática.

3. SOBRE A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Estabelecida como a primeira ciência por volta do século III a. C na Grécia, a geometria euclidiana não se limita a sua definição de no modo em que se é amplamente divulgada, como medida (metria) da terra (geo).

A sociedade egípcia se desenvolveu ao longo do rio Nilo e segundo Eves (2004) as cheias do rio Nilo exigiam novas medições das terras das margens, pois o imposto dessas terras era cobrado de acordo com a área. Com esse fato, os egípcios exigiram formas de medir a terra, ou seja, desenvolveram uma geometria prática.

> *Umas das mudanças foi a criação da escrita. O cultivo de terras significou irrigação dos vales do norte da África e do Oriente Médio onde a chuva era muito escassa; as periódicas cheias de Amarelo, do Nilo, do Tigre e do Eufrates significaram construções de barragens-atividade que requeria não só cooperação e a arte da engenharia como também, igualmente, um sistema de preservação de registros. Os agricultores precisavam saber quando as enchentes ou a estação das chuvas chegariam, e isso significava calendários e almanaques. (EVES, 2004, pg.53).*

Geometria prática também é encontrada na sociedade babilônica, sendo utilizada para medir coisas do cotidiano, como cálculo de áreas, volumes; e os babilônicos possuíam uma fórmula para calcular perímetro da circunferência. Mesmo sendo considerada uma sociedade desenvolvida, em seus achados arqueológicos não houve nenhuma comprovação em que essa sociedade tenha desenvolvido outro tipo de modo de pensar sobre o mundo, usando processos dedutíveis. Porém é viável dizer que em muitos escritos da sociedade grega, foi encontrado resultados que comprovam a presença do método da falsa posição para resolver equações e ternas de números que representam triângulos retângulos.

A sociedade grega foi um marco na história da ciência. A geometria não era mais vista como uma medida da terra assim como antes na Babilônia e no Egito, essa geometria é uma ciência muito bem fundamentada, axiomática, postulacional e dedutiva. Assim pela primeira vez ela foi difundida de um simples cálculo cotidiano para uma publicação rigorosa no livro Os Elementos (300 a. C.) escrito por Euclides. Gerdes (1992, 17) complementa as ideias anteriores sobre a origem de conceitos geométricos elementares e a geometria como ciência afirmando que:

> *A geometria nasceu como uma ciência empírica ou experimental. Na confrontação com o seu meio ambiente o homem da Antiga Idade da Pedra chegou aos primeiros conhecimentos geométricos. O processo da aquisição pelo trabalho de imagens abstratas das relações espaciais entre os objetos físicos e as suas partes decorreu, primeiro, de uma forma extremamente lenta. Depois de ter sido reunido suficiente material factual respeitante às formas espaciais mais simples, tornou-se possível, sob condições sociais especiais, como, por exemplo, no Egito antigo, Mesopotâmia e China, sistematizar consideravelmente o material factual recolhido. Com isso começou a transformação da geometria de uma ciência empírica numa ciência matemática, que, com os Elementos de Euclides alcançou. (GERDES, 1992,17)*

A proposta da geometria grega consiste em Axiomas ou Postulados (são os elementos básicos utilizados para estipular algumas verdades auto evidentes, que não precisam de nenhuma argumentação para se aceitar como verdadeira), e depois fazer afirmações sobre esses elementos que poderiam ser autoexplicativos e a partir delas deduzir as demais. Assim foi construídos o edifício da geometria por Euclides, exigindo teorema por teorema, utilizando o método dedutivo sustentado pela lógica do pensamento puro.

O trabalho de Euclides foi extremamente importante, juntando todo o conhecimento matemático de sua época numa escrita extremamente rigorosa. A divisão do livro Os Elementos (300 a. C.) foi feita em três partes ou capítulos se tratando de vários temas que geralmente se é encontrado nos cursos do ensino básico de todo o mundo, destacando a Geometria euclidiana, plana e espacial, entre outros. Esse livro, Os Elementos (300 a. C.) teve suma importância na determinação e elaboração da ciência e filosofia ocidental, sendo o segundo livros mais editado no ocidente disse Eves em Introdução à história da matemática.

> *Nenhum trabalho, exceto a bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos Elementos já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou a geometria. (EVES, 2004)*

Com sua suma importância histórica e científica a Geometria euclidiana atualmente está fazendo parte do currículo escolar em todo o mundo, desde as séries iniciais até o fim do ensino básico, e sendo mais aprofundada em cursos de graduação nas áreas de matemática, física e engenharia.

Assim, “Os Elementos” é um tratado que ordena as compilações existentes, bem como aperfeiçoa os trabalhos feitos até então.Para tanto, Euclides utiliza as obras de Pitágoras, Tales, Platão e outros autores de sua época. Sistematizando assim todo este conhecimento e, com isso, preenchendo diversas lacunas.

3.1. TALES E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Considerado como o primeiro filósofo ocidental, Tales de Mileto era conhecido como uma pessoa de grande curiosidade e constante vontade de observar a natureza, para ele, a observação era a chave para descobrir o princípio de tudo. Pouco se sabe sobre sua história, pois nenhuma obra foi atribuída ao seu nome, isso porque, os registros podem ter sofrido com a ação do tempo, como enchentes ou incêndios, por exemplo. O que se sabe veio dos escritos dos filósofos Heródoto e Aristóteles.

Tales de Mileto, nasceu na cidade de Mileto, Ásia Menor (agora Turquia) região da Jônia, em torno de 623 a. C. ou 624 a. C. e morreu em torno de 547 a. C. também em Mileto. Não houve registros sobre sua infância, porém, o jovem ingressou ainda novo na Escola de Jônica considerada a mais antiga escola filosófica, onde os seus pensadores buscavam explicações cosmológicas, ou seja, por meio da natureza através das observações. Na escola, Mileto conheceu outros filósofos daquela época, como Anaximandro e Anaxímenes.

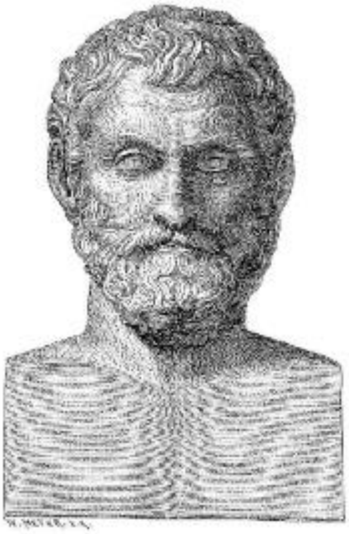

Figura 1: Retrato de Tales de Mileto
Fonte: disponível em https://impa.br/noticias/tales-de-mileto-e-as-origens-da-trigonometria/

Sua filosofia foi a precursora por iniciar o primeiro movimento filosófico do ocidente, nessa época, Mileto não tinha ideia de que suas contribuições gerariam discussões por mais de cem anos. Com isso, uma das principais ideias filosóficas de Mileto era o questionamento sobre o universo, pois na época as explicações sobre a origem de tudo eram pautadas na mitologia grega, então tudo que era sobre o universo era explicado de forma fantasiosa. Nesse sentido, por ser um grande observador e que literalmente observava tudo, Mileto chegou à conclusão em que a formação de todas as coisas partiria de um princípio, a água, essa filosofia possui três princípios; tudo que conhecemos é feito de água e o homem é mais um ente desse meio; todas as coisas, incluso as inanimadas, estão cheia de vida; e por outro lado, as mudanças e a geração só podem ser alcançadas pela condensação e a rarefação. Deu-se o nome a essa teoria de filosofia unitarista, logo suas primeiras observações, principalmente relacionadas ao Universo, ficaram conhecidas como a primeira forma de filosofia, a cosmologia. A partir desse momento, todo conhecimento passou a ser feito de forma racional. Ou seja a natureza seria entendida por meio de observações e comprovações.

Descrito como um homem de negócios, mercador de sal, defensor do celibato ou estadista da visão, por gostar de viagens e ser comerciante, nas suas viagens pelos centros antigos de conhecimento sendo comerciante, o fez obter muitos conhecimentos em diferentes regiões, experiências essas, sobre Astronomia e Matemática aprendendo Geometria no Egito. Antes o conhecimento matemático era atribuído aos egípcios devido à construção das pirâmides, porém, o conhecimento teórico ainda não era algo consolidado.

Nesses estudos matemáticos Tales é considerado e recebe o título comumente de "primeiro matemático" verdadeiro, tentando organizar a Geometria de forma dedutiva. Reconhece-se que durante suas viagens estudou a altura da pirâmide Quéops, no Egito por meio de suas sombras. Diante disso, surgiu o Teorema de Tales, onde as retas, retas paralelas e transversais formam segmentos proporcionais.

Por mais que os conhecimentos de Tales de Mileto não estejam em livros, não há como dizer sobre sua importância na filosofia e na matemática, mérito esse sobre o Teorema de Tales, além das descobertas sobre triângulo isósceles, o eclipse solar por meio da observação e a própria filosofia.

3.1.1. TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales refere-se à relação proporcional que existe entre retas paralelas e transversais. Essa propriedade matemática foi desenvolvida aproximadamente em 650 a.C, a partir de observações da sombra de uma pirâmide. Tales observou que os raios que incidiam na Terra eram inclinados e paralelos entre si. Desse modo, ele chegou à conclusão que existia uma relação de proporcionalidade entra as medidas de comprimento da sombra e da altura dos objetos. Assim o seguinte enunciado fundamenta o Teorema de Tales:

“Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.”

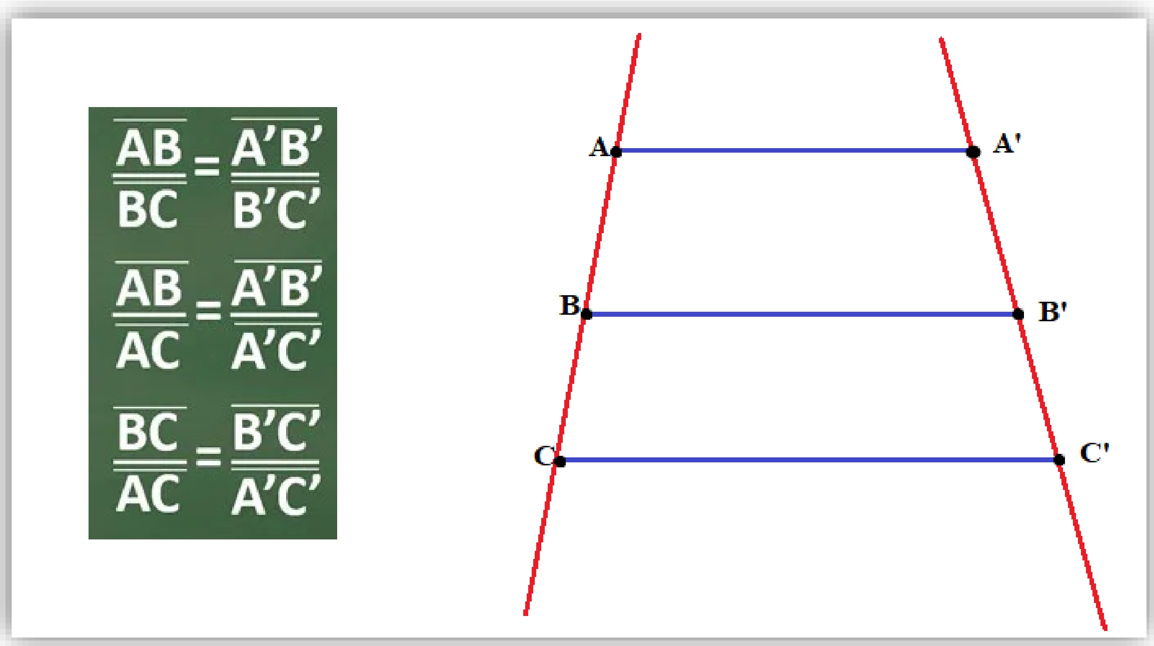

Figura 2: Representaçao do Teorema de Tales.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

3.1.2. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TALES PELO MÉTODO DAS ÁREAS

Sejam ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Tracemos pelo ponto D uma reta *k* paralela ao lado BC com $k \cap AC = \{E\}$. Provemos que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

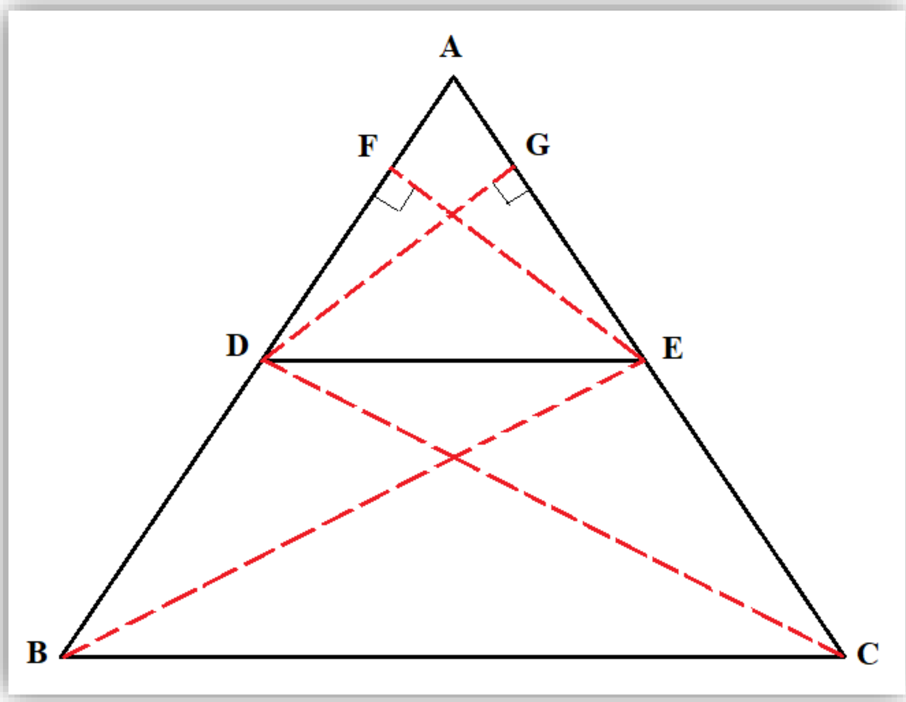

Figura 3: Representação das áreas de um triângulo.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

A área do triângulo ADE pode ser calculada de duas maneiras $\frac{AD \cdot EF}{2}$ ou $\frac{AE \cdot DG}{2}$

Da igualdade das duas expressões, temos que $AD \cdot EF = AE \cdot DG \ \ (1)$

Os triângulos BDE e CED têm áreas iguais (mesma base DE e mesma altura). Logo:

$\frac{DB \cdot EF}{2} = \frac{EC \cdot DG}{2} \quad (2)$

De (1) e (2) vem $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Já no caso em que os segmentos AC e DF (observe a figura abaixo) formam um trapézio, refere-se ao caso anterior, mediante a construção de uma reta paralela à AC partindo pelo ponto D. Isso faz com que formamos o mesmo triângulo citado acima, para mostrar que através da área deste triângulo podemos demonstrar e verificar o Teorema de Tales, como as razões feitas anteriormente

Dessa maneira o professor poderia explorar o estudo de triângulos, já que essa é uma das mais importantes aplicações do Teorema de Tales, já que é possível construir um triângulo menor semelhante ao maior, além disso, os segmentos formados pela lateral do triângulo também são proporcionais, o que possibilita a aplicação do Teorema para encontrar valores desconhecidos deste triângulo. Assim usando o *software* GeoGebra o professor pode fazer essas construções com os alunos, enquanto explica as relações, onde podemos até mesmo falar sobre semelhança de triângulos, citados abaixo.

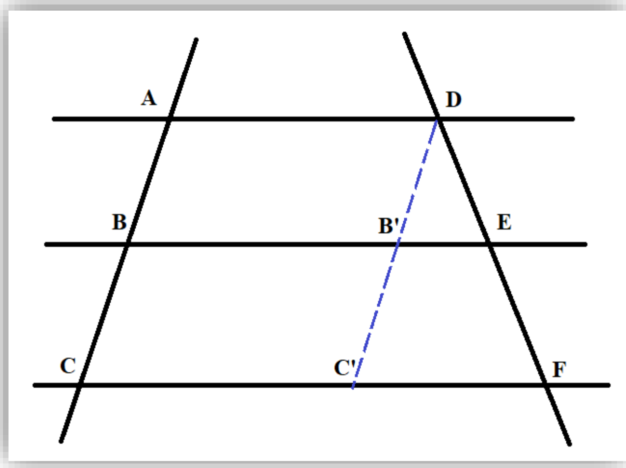

Figura 4: Provação do Teorema de Tales.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Neste caso teremos $\frac{DB\prime}{B\prime C\prime} = \frac{DE}{EF}$ e como $AB = DB' \; e \; BC = B'C'$ tem-se $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Assim provamos o Teorema de Tales usando método de calcular áreas.

3.1.3. JUSTIFICATIVA DO TEOREMA DE TALES PELO GEOGEBRA

Vamos apresentar uma forma de justificativa o Teorema de Tales utilizando o *software* GeoGebra, através de ferramentas que ele oferece.

Para uma melhor visualização será retirado a malha e os eixos (x, y), clicando no botão direito e desmarcando as opções citadas. Depois na função de ponto, colocaremos dois sobre o plano, de forma aleatória.

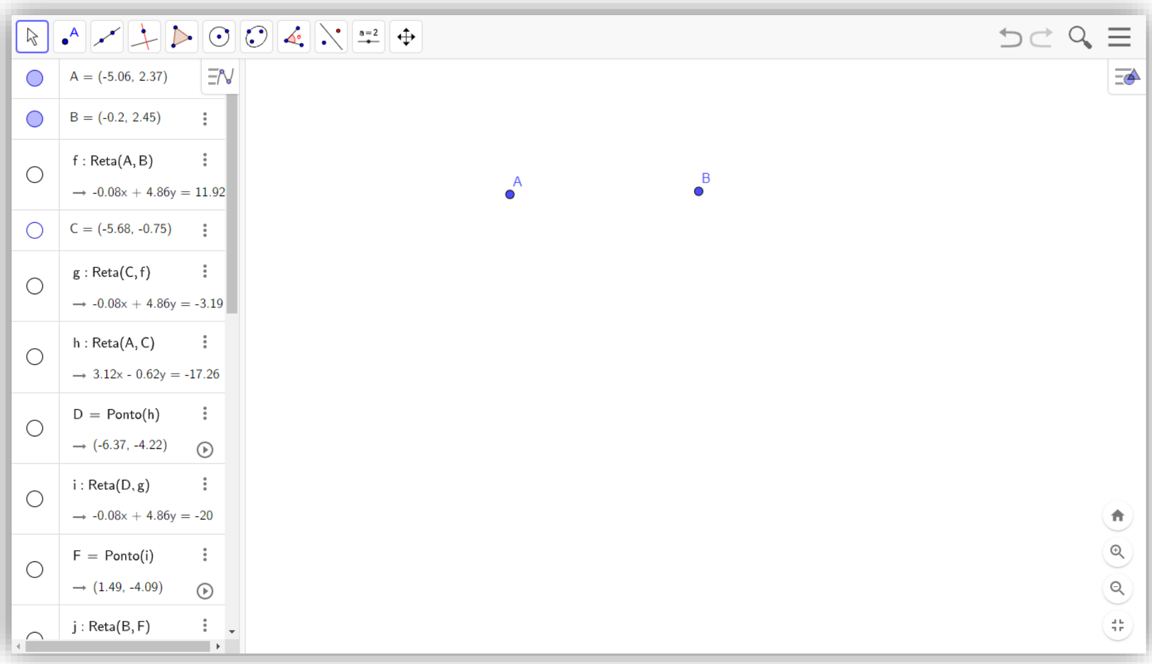

Figura 5: Imagem representando pontos sobre o plano no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Traça-se uma reta passando pelos pontos A e B, chamada de reta *f*, essa função se encontra na terceira janela de ferramentas, denominada de ferramentas de linhas.

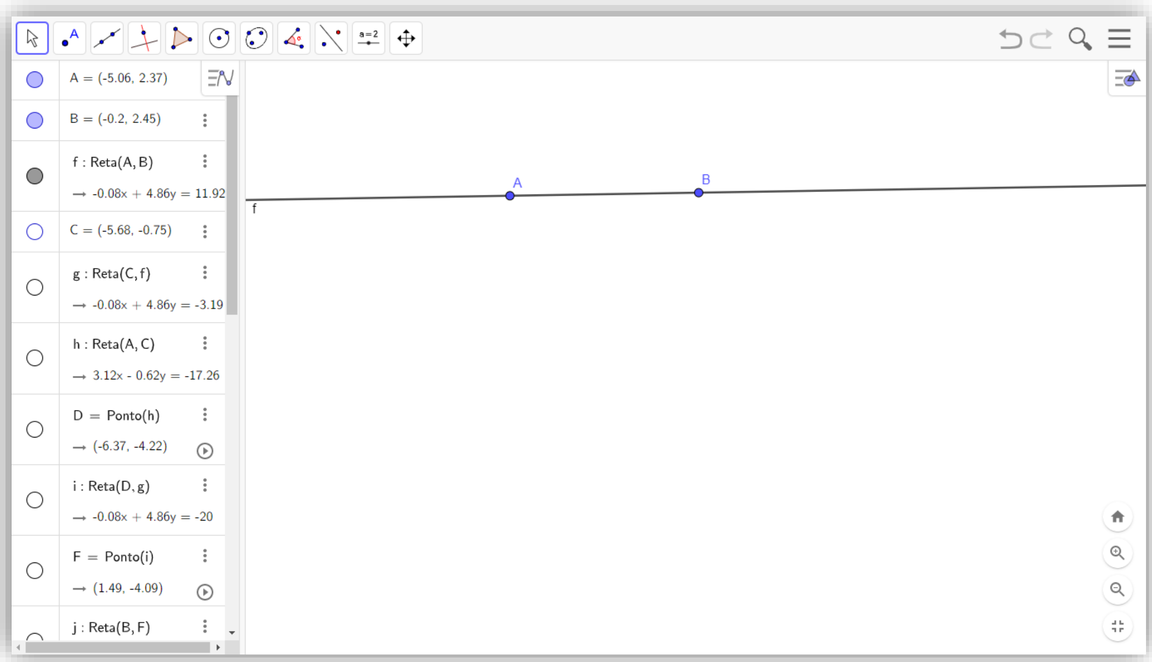

Figura 6:Imagem representando reta sobre os pontos A e B no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Coloca-se um ponto fora da reta, usando a função ponto, chamado de C.

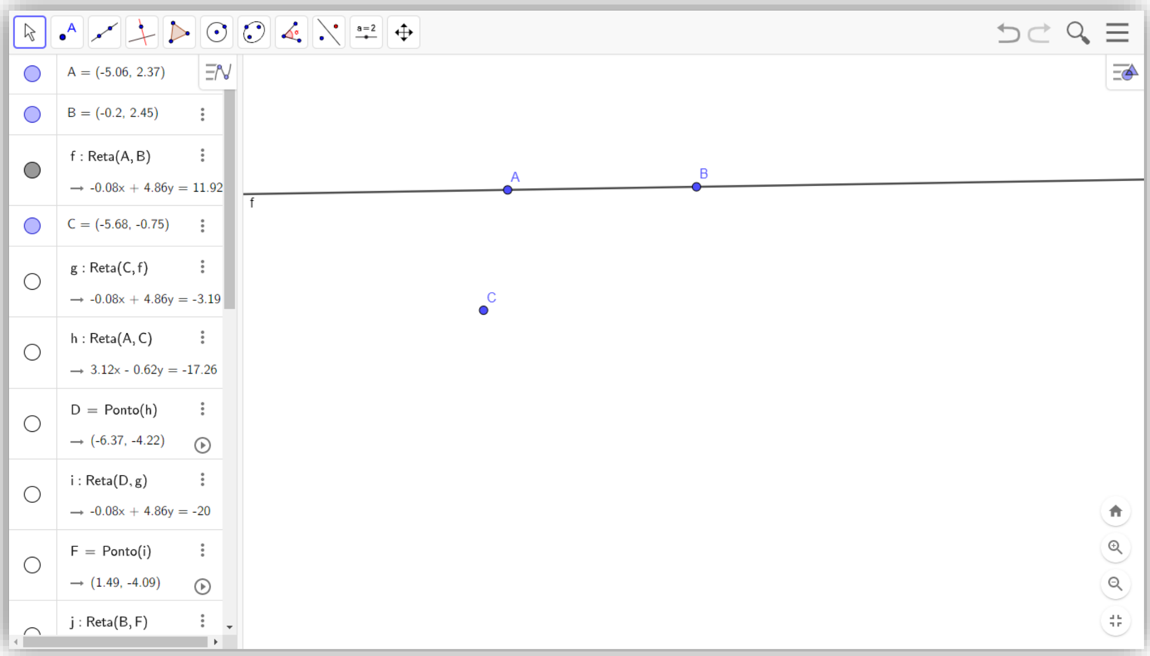

Figura 7: Imagem representando ponto fora da reta no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Nas ferramentas de linhas especiais, encontrada na quarta posição, selecione a função de reta paralelas, então clique no ponto C e em seguida na reta *f*, assim teremos duas retas.

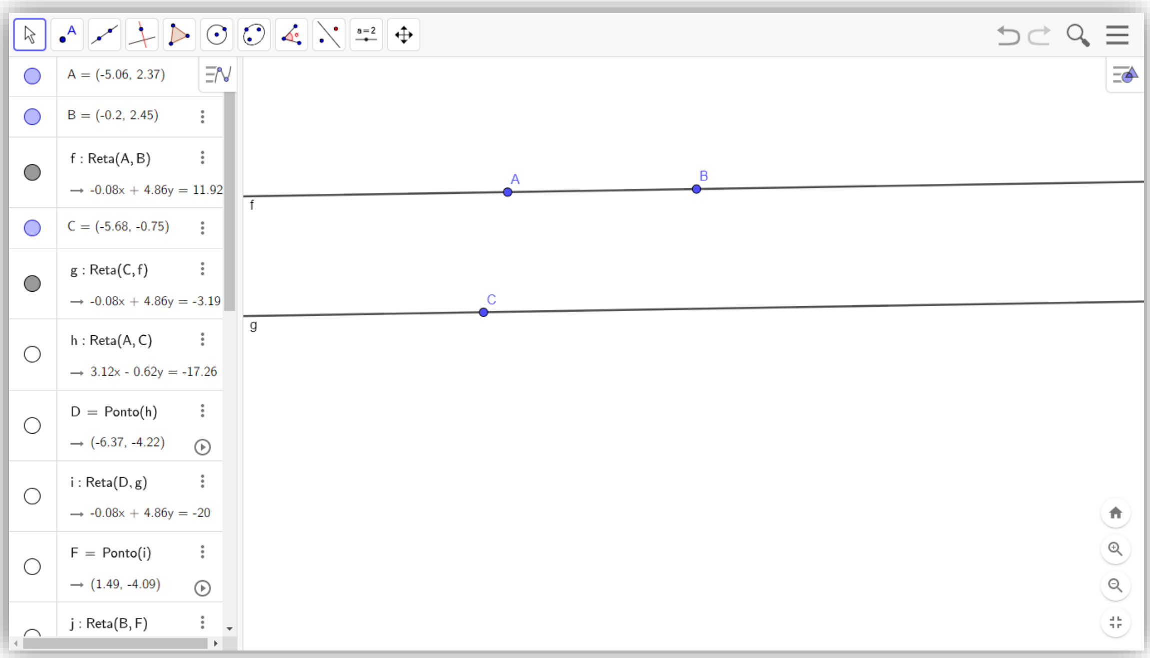

Figura 8: Imagem representando a parelela entre os pontos no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

É traçado uma reta *h* partindo dos pontos A e C.

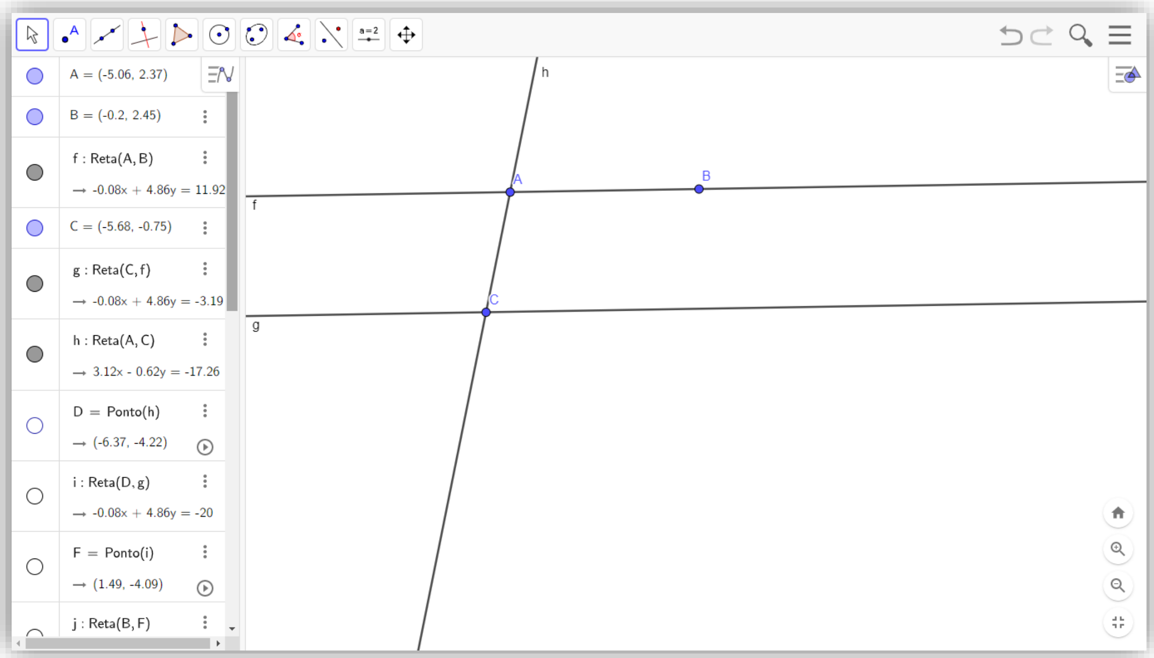

Figura 9: Parela traçada com os pontos A e C no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Coloca-se um ponto denominado de D sobre a reta *h*, onde em seguida com a ferramenta de reta paralela, cria-se a reta *i*, última reta paralela na horizontal.

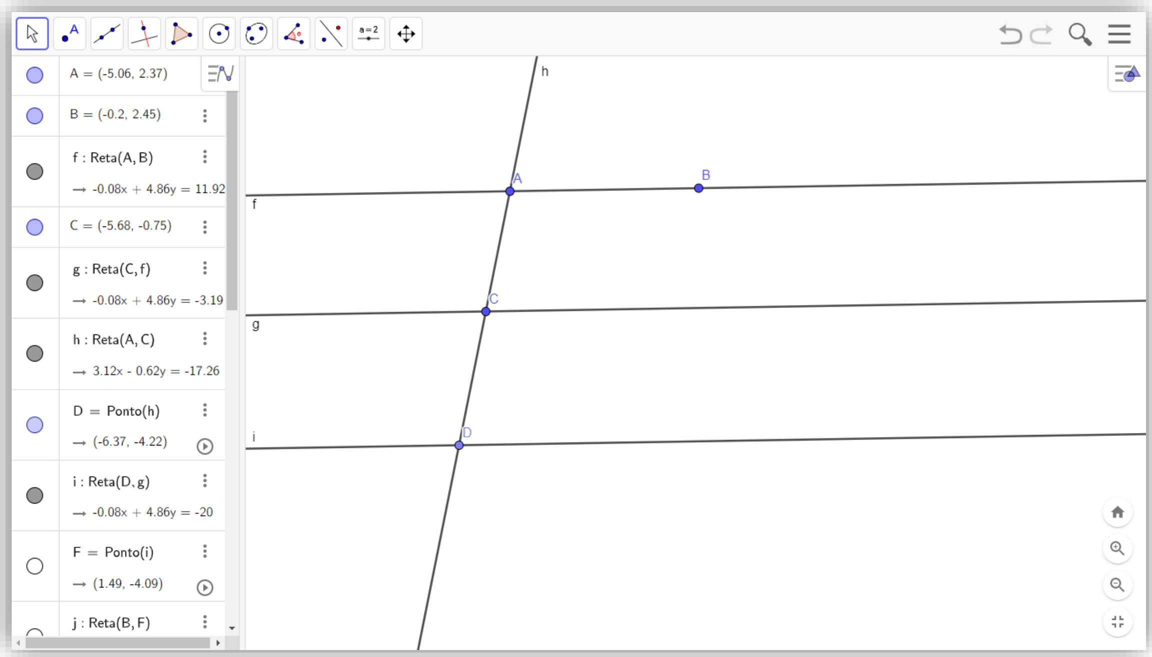

Figura 10: Imagem das três retas paralelas na horizontal no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Aplica-se um ponto F qualquer, sobre a reta *i*, e cria-se em seguida uma reta partindo do ponto B e F, na ferramenta de reta, como mostra a imagem abaixo:

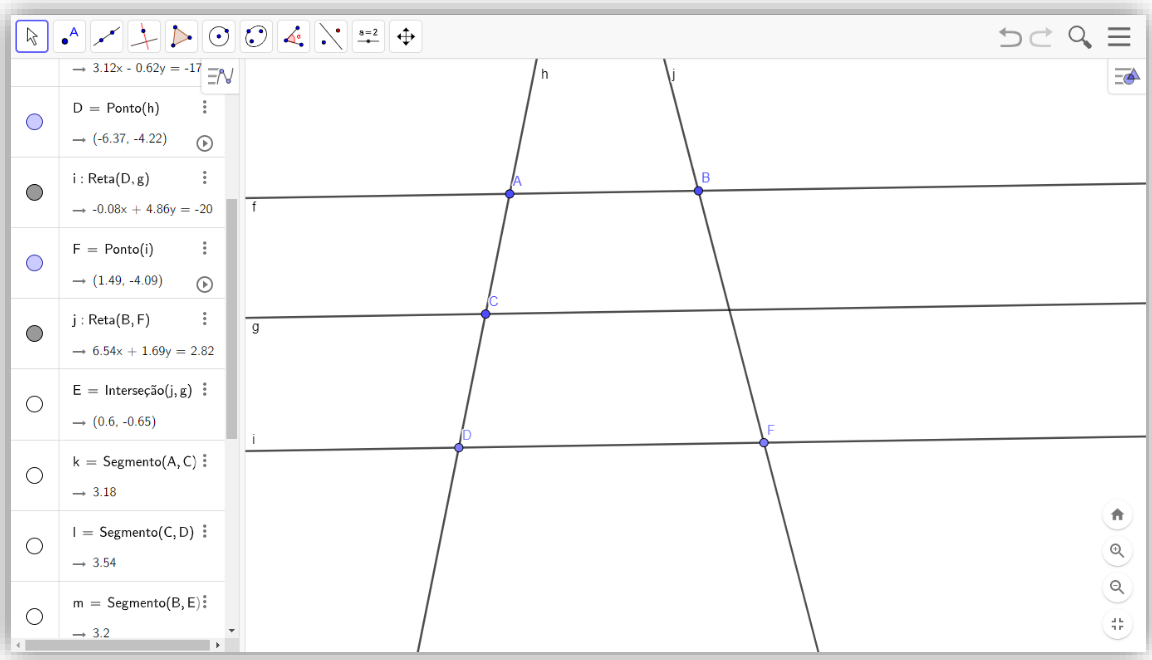

Figura 11: Formando duas retas na vertical e três na horizontal no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Próximo passo é colocar um ponto na intersecção das retas *j* e *g*, na função de interseção de dois objetos, na segunda seção de ferramentas.

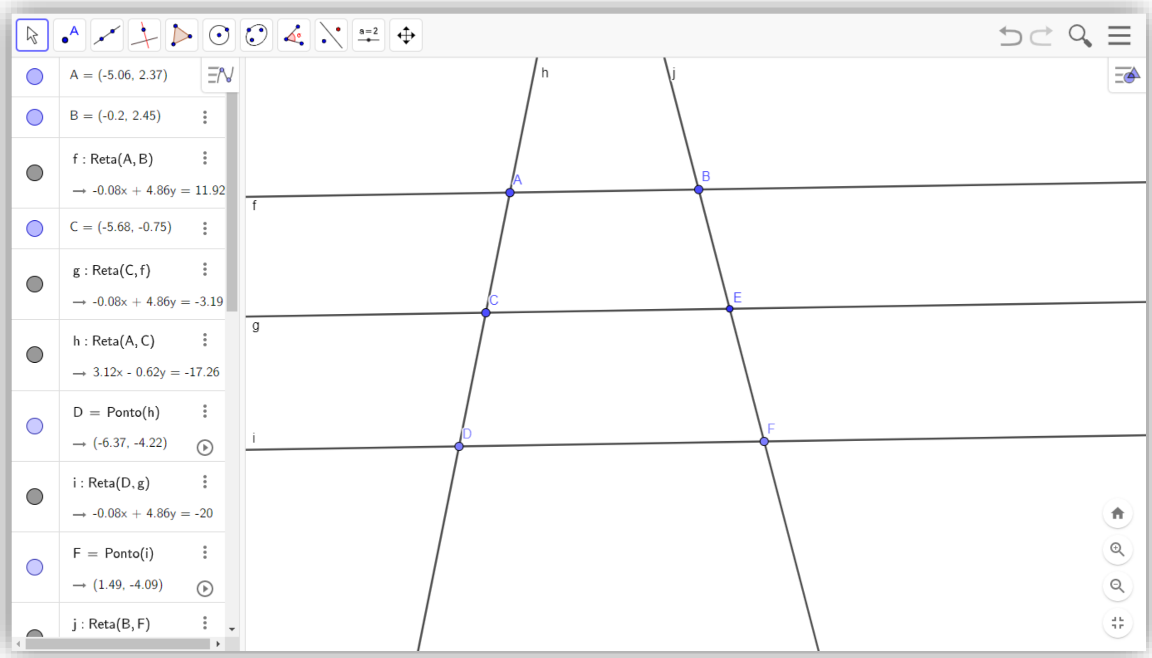

Figura 12: Imagem representando a intersecção dos pontos no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Para ficar mais claro o que está acontecendo, vamos definir os segmentos AB, BC, DE e EF, como valor a mostra, e mudando a cor nas configurações especificas.

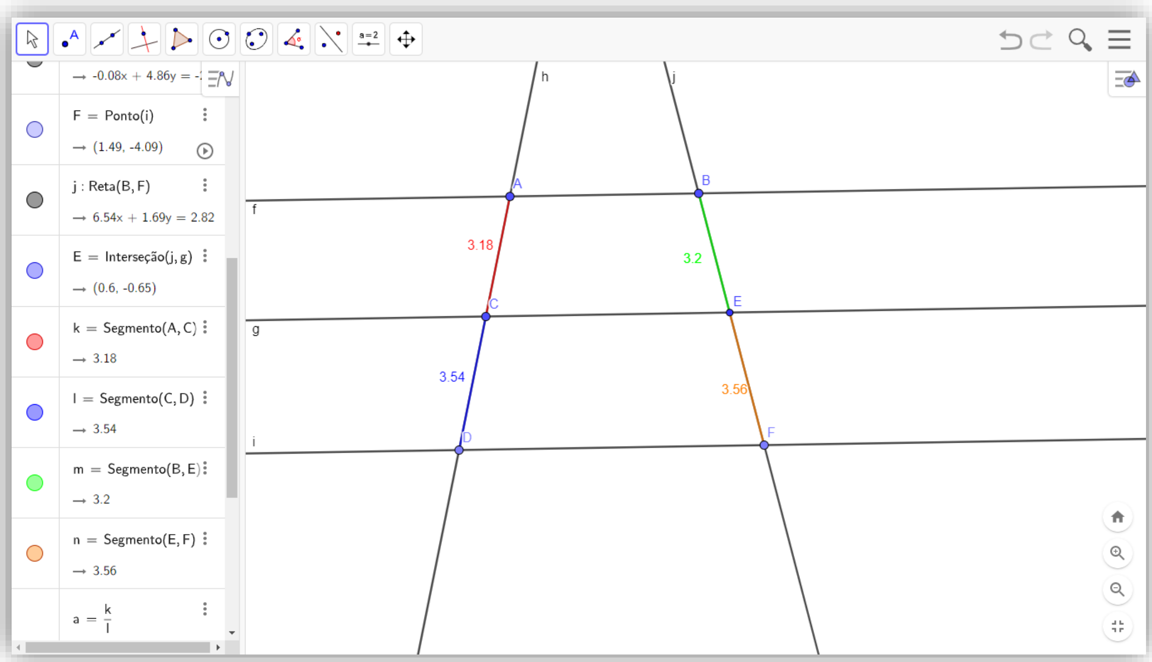

Figura 13: Segmentos AB, BC, DE, e EF com valores no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Por fim na barra de entrada do *software* digita-se segmento AC (chamado de *k*), dividido por segmento CD (chamado *l*), isso igual à segmento BE (chamado de *m*) dividido por segmento EF (chamado de *n*), na própria função de selecionar o objeto, neste caso os segmentos. Assim podemos criar uma anotação na ferramenta de texto, situada na decima seção de funções. No texto colocamos a operação anterior, selecionando-o, para assim provar que os valores são os mesmos.

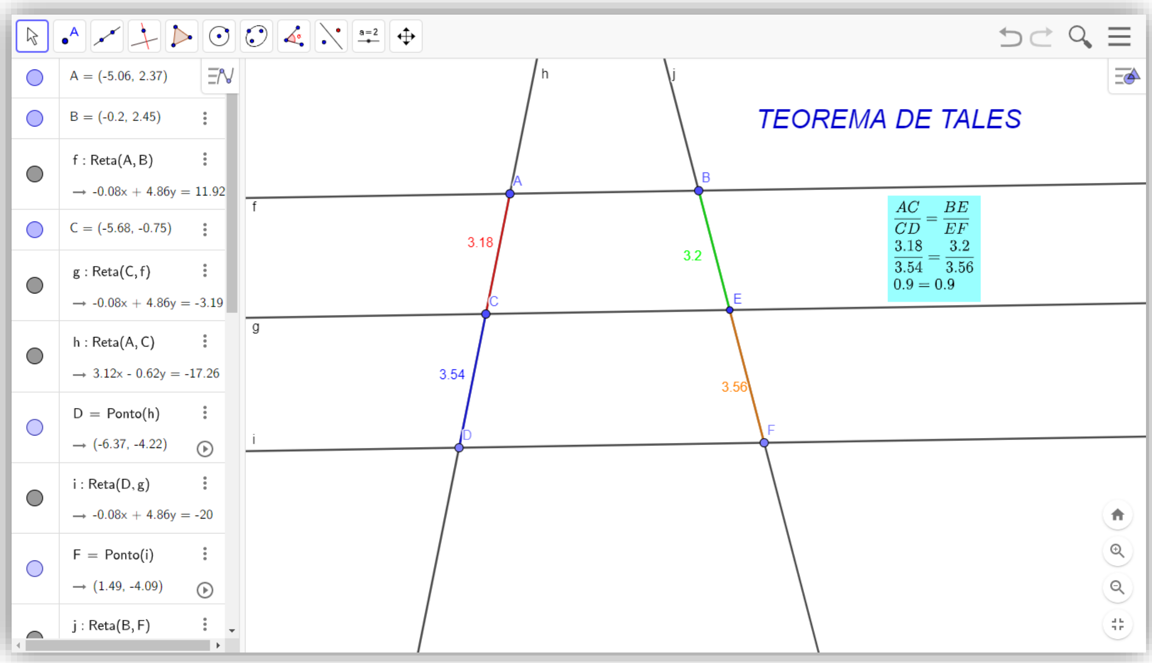

Figura 14: Representação do Teorema de Tales com sua provação no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Desde modo, se mexermos qualquer ponto ou reta, o valor continuará o mesmo. E esse tipo de justificativa do teorema que mostra as possibilidades do professor de trabalhar esse conteúdo, pois a partir dessa construção ele pode continuar sobre outros assuntos que dependem do Teorema de Tales, como a demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando semelhança de triângulo.

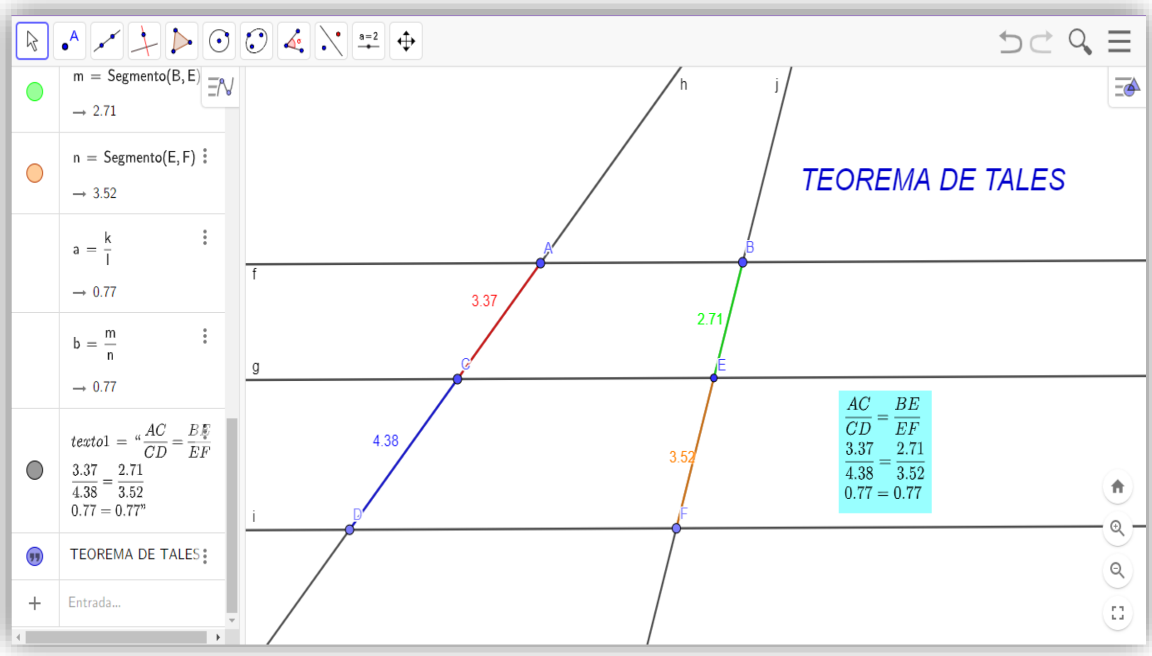

Figura 15: Demonstração final do Teorema de Tales no Geogebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

3.2. PITÁGORAS E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Talvez nenhuma outra relação geométrica seja tão utilizada em matemática como teorema de Pitágoras. Na geometria cartesiana, muito usada em ciência e engenharia, a maioria dos cálculos que envolvem relações espaciais e trigonometria tem como base esse teorema. É possível utilizar o teorema de Pitágoras em todos os polígonos, pois eles podem ser divididos em triângulos e esses triângulos em triângulos retângulos, e em todos os poliedros. Mas quem foi Pitágoras?

Nascido na ilha grega de Samos por volta de 572 a.C, Pitágoras de Samos foi um dos principais filósofos e matemáticos da Antiguidade, suas principais áreas de estudo era a reflexão filosófica e cientifica, também a metafisica, a matemática, a ética, a música, e astronomia e política. Sabe se pouco sobre sua história, onde várias lendas foram criadas ao seu respeito, porém alguns dados, vários historiadores confirmam.

Pitágoras encontrou o poder tirano de Polícrates e de Jônia sob o domínio persa, então decidiu se mudar para Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália, onde ele fundou a famosa escola pitagórica, que além de ser um centro de estudo de filosofia, ciências naturais e matemática, era também uma irmandade bastante unida e repleta de ritos e cerimonias secretas.

Com o tempo as influências aristocráticas da irmandade se tornaram tão grande que as forças democráticas do sul da Itália derrubaram prédios da escola, fazendo que a confraria se dispersasse. Segundo relatos, Pitágoras então fugiu para Metaponto onde faleceu, talvez assassinado, com idade por volta de 75 e 80 anos. A tradição pitagórica se estendeu por aproximadamente dez séculos, em várias ramificações, como por exemplo os neopitagóricos.

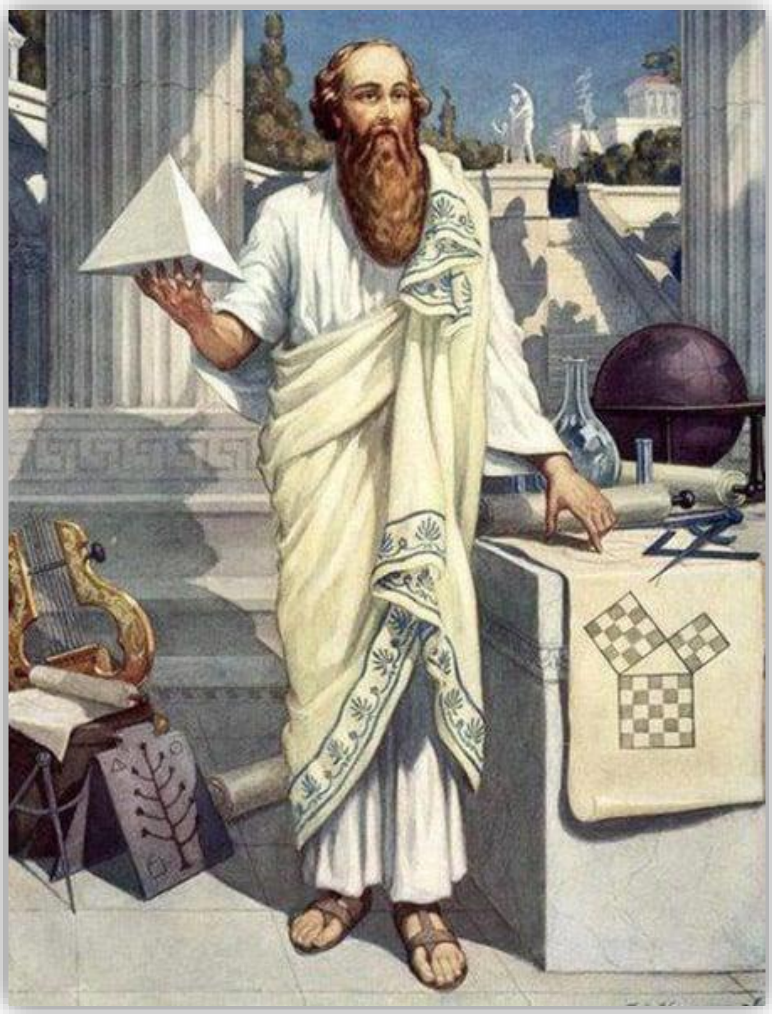

Figura 16: Retrato ilustrado de Pitágoras de Samos.

Fonte: disponível em https://www.freemason.pt/pitagoras-e-a-maconaria/, 2022

Pitágoras e seus discípulos deixaram diversas descobertas para a humanidade, entre elas, a teoria dos números é o estudo das relações abstratas que envolvem os números, outro estudo pitagórico interessante são os números amigáveis, onde dois números são amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Além disso, outras importantes descobertas relacionadas aos pitagóricos são: a aritmética pitagórica; as identidades algébricas;

as resoluções geométricas de equações quadráticas; as diversas transformações de áreas e uma das principais, e mais importantes dos trabalhos dos pitagóricos é o Teorema de Pitágoras,

Em busca de mais conhecimento, Pitágoras viajava por vários lugares, como Egito, Creta e Palestina, diz a lenda que em uma dessas viagens para o Egito, que o grego formulou sua teoria mais famosa, o Teorema de Pitágoras. No Egito ele teria se impressionado com as pirâmides e começado a estudar a estrutura dos triângulos retângulos, o que levou à formatura de seu teorema.

3.2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é uma regra que pode ser aplicada a qualquer triângulo retângulo, sendo uma figura geométrica de três lados que possua um ângulo reto (de 90°). O Teorema diz que a soma dos quadrados do lado com os menores valores de um triângulo retângulo (chamados de catetos) é equivalente ao quadrado do lado de maior valor (chamado de hipotenusa). Assim chega-se à fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são os lados de menor valor, os catetos, e c é o lado de maior valor do triângulo, a hipotenusa.

Algumas sociedades antes de Pitágoras, já utilizaram alguns dos fundamentos da teoria do filosofo na construção de monumentos como pirâmides por exemplo, mas ninguém havia formulado uma lei universal de fato, até ele. Dentro da geometria, o Teorema é aplicado em diversos tipos de problemas, e é uma parte fundamental da geometria plana. Através de sua aplicação, é possível descobrir a distância entre dois pontos, se baseando num terceiro, que forme um triângulo retângulo, ele também é usado na construção civil e na aeronáutica, na hora de formular rotas para as aeronaves. Com toda certeza, a descoberta de Pitágoras mudou o mundo através da matemática.

3.2.2. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR SEMELHAÇA DE TRIÂNGULOS

Quando se fala de Teorema de Pitágoras e suas demonstrações, a mais conhecida é usando a semelhança de triângulos, partindo da definição, dois triângulos são ditos semelhantes se, e somente se, existir uma correspondência biunívoca, que associa os vértices de um triângulo aos vértices do outro triângulo, onde:

- Ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
- Lados opostos a vértices correspondentes têm medidas proporcionais.

Vejamos o exemplo de dois triângulos, sendo eles ABC e DEF, que são semelhantes se, e somente se $\hat{A} \cong \widehat{D}$, $\hat{C} \cong \widehat{F}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, como mostra a figura abaixo:

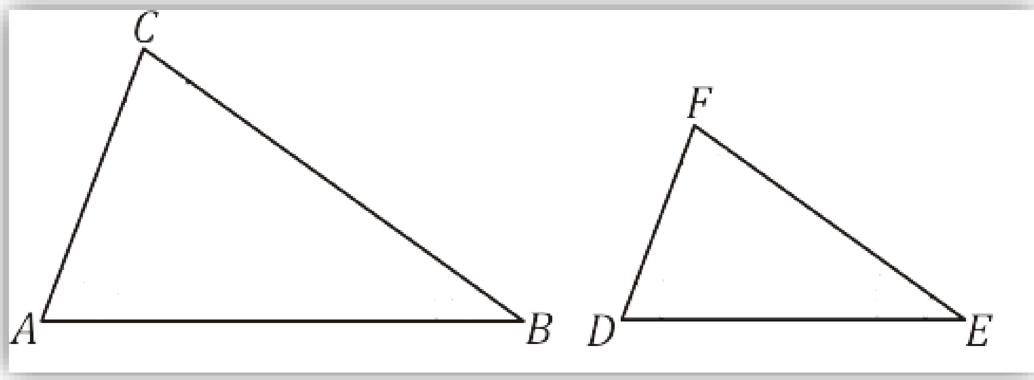

Figura 17: Imagem representando as semelhanças dos triângulos.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

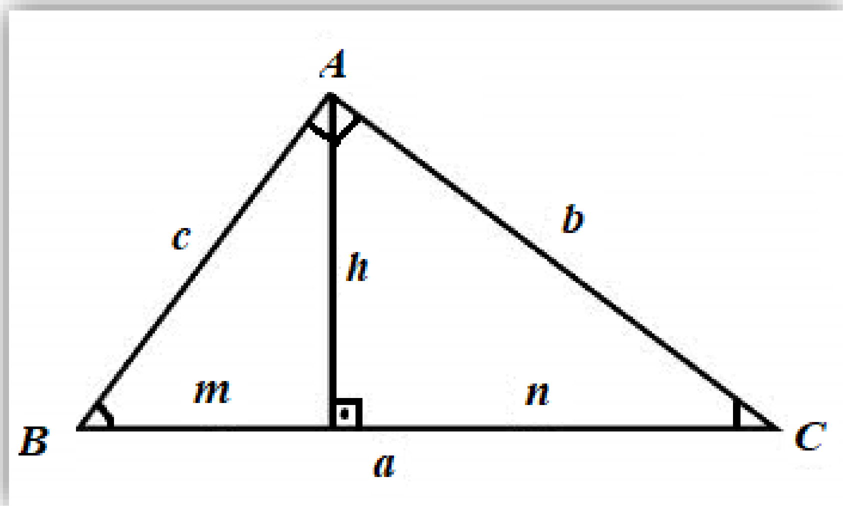

Figura 18: Imagem representando triângulo ABC e altura h.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Sendo ***h*** a altura do triângulo relativa á hipotenusa ***a***, onde ***m*** é a projeção ortogonal do cateto ***c*** sobre a hipotenusa, e ***n*** a projeção ortogonal do cateto ***b*** sobre a hipotenusa. Assim podemos considerar os 3 triângulos: Δ ***ABC,*** Δ ***DAB*** e Δ ***DAC.*** Como mostra a figura.

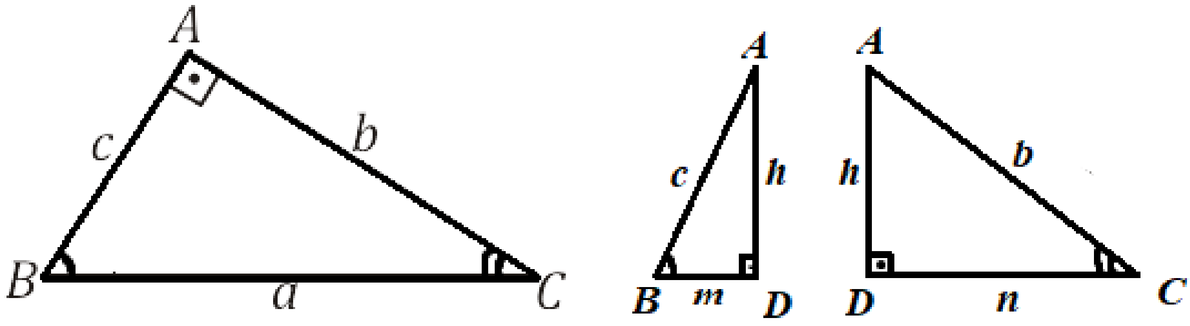

Figura 19: As semelhanças dos triângulos ABC, ABD e ADC.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Note que estes três triângulos são semelhantes, pelo caso AA de semelhança (dois ângulos congruentes). Então temos.

$\Delta\, \boldsymbol{ABC} \sim \Delta\, \boldsymbol{DAB} \leftrightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$, e assim formamos as seguintes definições:

a.h = b.c (1)

b.m = h.c (2)

a.m = $\boldsymbol{c^2}$ ***(3)***

$\Delta\, \boldsymbol{ABC} \sim \Delta\, \boldsymbol{DAC} \leftrightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{c}{h} = \frac{b}{n}$, e assim formamos as seguintes definições:

a.h = b.c (4)

b.h = n.c (5)

a.n = $\boldsymbol{b^2}$ ***(6)***

$\Delta\, \boldsymbol{DAB} \sim \Delta\, \boldsymbol{DCA} \leftrightarrow \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$, por fim temos as últimas definições:

c.n = b.h (7)

$\boldsymbol{h^2}$ ***= m.n (8)***

b.m = c.h (9)

Igualando (3) e (6), teremos:

$\boldsymbol{b^2 + c^2 = a.n + a.m = a.(m + n)}$, mas como $\boldsymbol{(m + n) = a}$, logo provamos o que queríamos $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$.

Note que essa demonstração tem relação com o Teorema de Tales, já que trabalha com as proporções e razões de segmentos, desta forma mostra continuação do conteúdo de geometria, já que para demonstrar o Teorema de Pitágoras, precisamos do Teorema de Tales. Assim o professor pode relacionar os conteúdos partindo da continuação já realizada neste trabalho, e com a ajuda do *software* GeoGebra construir a progressão relacionando os temas.

3.2.3. DEMONSTRAÇÃO ILUSTRADA DO TEOREMA DE PITÁGORA

No livro *The Pythagorean Proposition*, capítulo 2 chamado Provas geométricas, encontra-se as provas apenas ilustrativas, onde o livro demonstra o teorema usando somente a figura. Um caso particular ilustrativo é o triângulo com lados 3, 4 e 5 unidades, desde modo o quadrado de lado igual a 5 terá 25 unidades quadradas, e os demais lados terão quadrados de 9 e 16 unidades quadradas, respectivamente, assim a soma das unidades dos menores quadrados, dará exatamente o valor das unidades do quadrado maior, neste caso 9+16=25. Abaixo veremos o passo a passo dessa demonstração ilustrada.

Vamos começar considerando um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e consequentemente, de hipotenusa igual à 5. Depois vamos construir quadrados sobre os catetos e a hipotenusa, como mostra a figura abaixo. Agora preenche os quadrados com quadriculados, para assim verificar a veracidade da proposição.

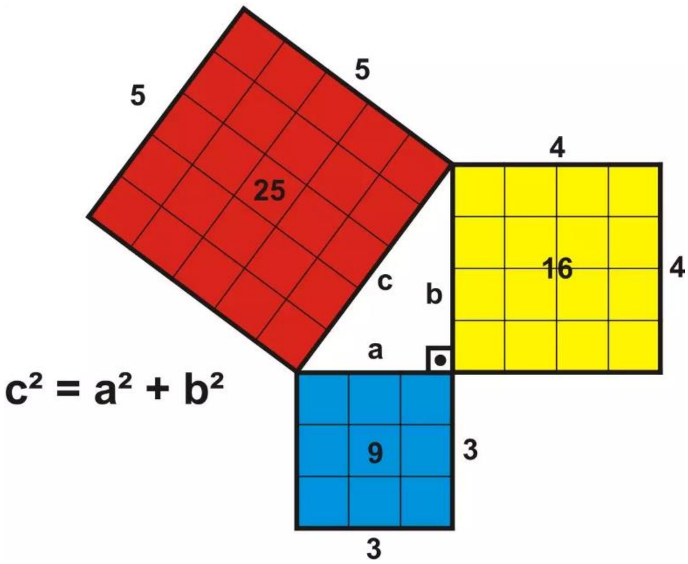

Figura 20: Demonstração ilustrada do Teorema de Pitágoras

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Como podemos perceber, temos 25 quadradinhos no quadrado cujo lado é a hipotenusa do triângulo retângulo, e cada um quadrados dos catetos tem 9 e 16 de quantidade de quadriculados, assim se chegamos ao mesmo resultado quando somamos dos quadrados dos catetos 9+16=25, e comparamos com o quadrado da hipotenusa, então temos $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow 9 + 16 = 25$. Assim provamos o teorema através de quadriculados.

3.2.4. DEMONSTRAÇÃO ILUSTRADA DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO GEOGEBRA

Dentro do GeoGebra é criado dois controles deslizantes, através da função respectiva, eles serão responsáveis pela variação dos catetos do triangulo, assim podemos chamá-los de *x* e *y*, já que vão variar nos eixos conhecidos como, *x (horizontal)* e *y (vertical).*

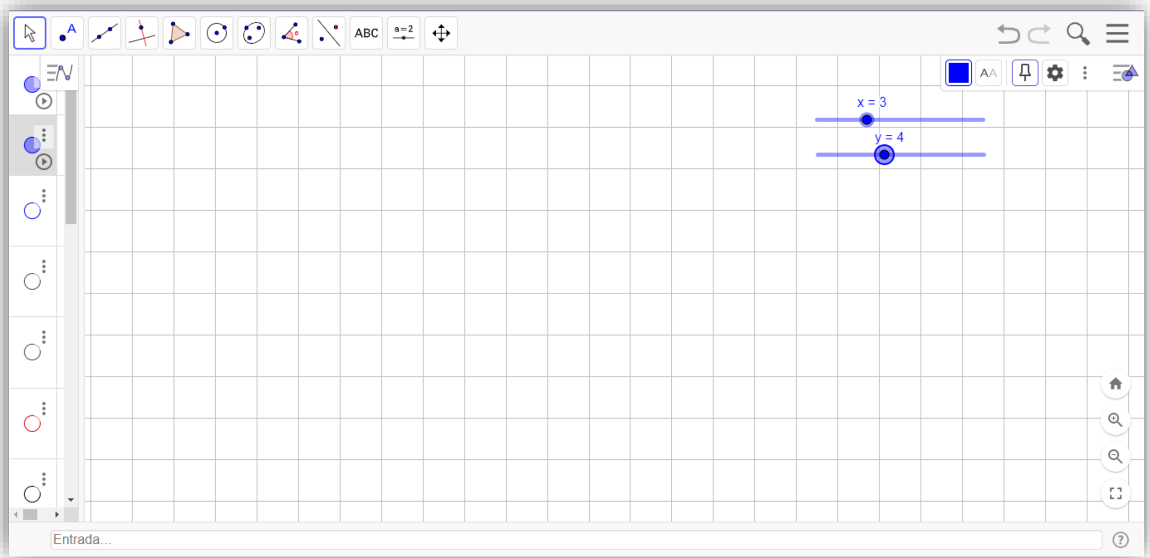

Figura 21: Criação dos controles deslizantes no GeoGebra

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Coloca-se três pontos no plano, utilizando a malha quadriculada para esses pontos formarem um triângulo retângulo, depois na função de polígono é escolhido o de três lados, clica em cada um dos pontos, formando assim o triângulo desejado. Os controles deslizantes serão os catetos deste triângulo, assim conforme amentamos ou diminuimos o valor o triângulo muda.

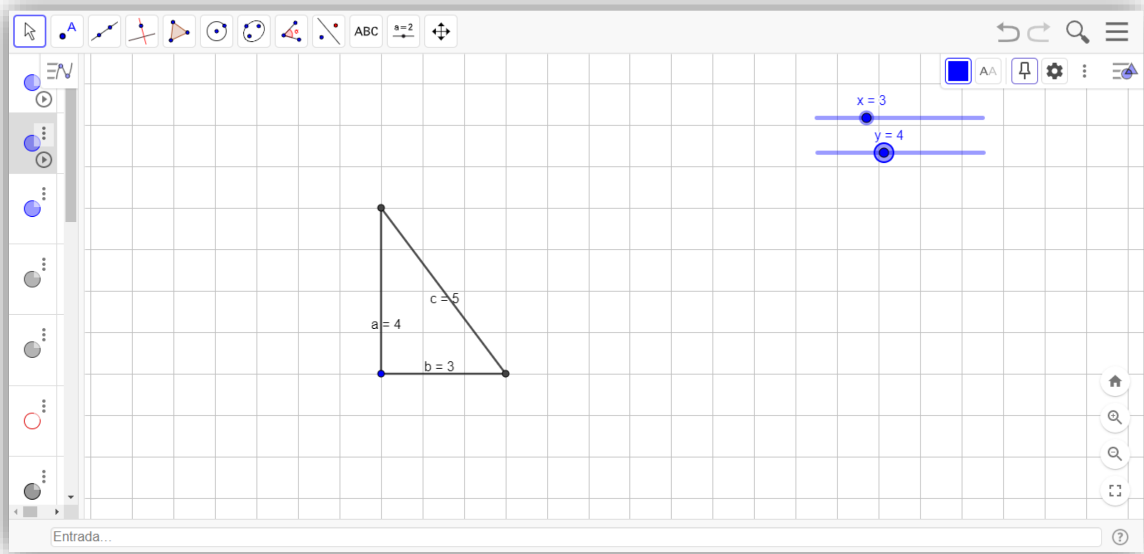

Figura 22: Criação do triângulo retângulo no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Podemos configurar o nome dos lados para nome e valor, ficando mais fácil a visualização, configura-se também a cor, já que o foco desta demonstração é justamente o visual.

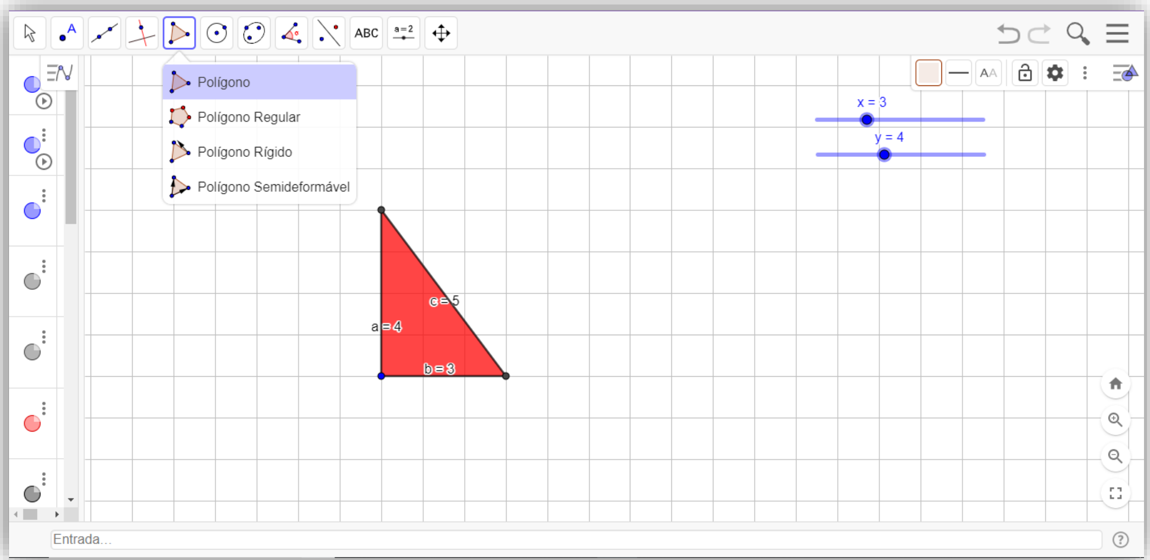

Figura 23: Configurando o triângulo no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Na função de polígono regular selecionamos cada lado do triângulo, e coloca-se o valor 4 na aba que pedirá a quantidade de lados deste polígono, mostrando a área ao quadrado de cada lado, neste caso $a^2=16$, $b^2=9$ e $c^2=25$. Porém conforme trocamos os valores dos catetos, os polígonos também terão suas áreas modificadas.

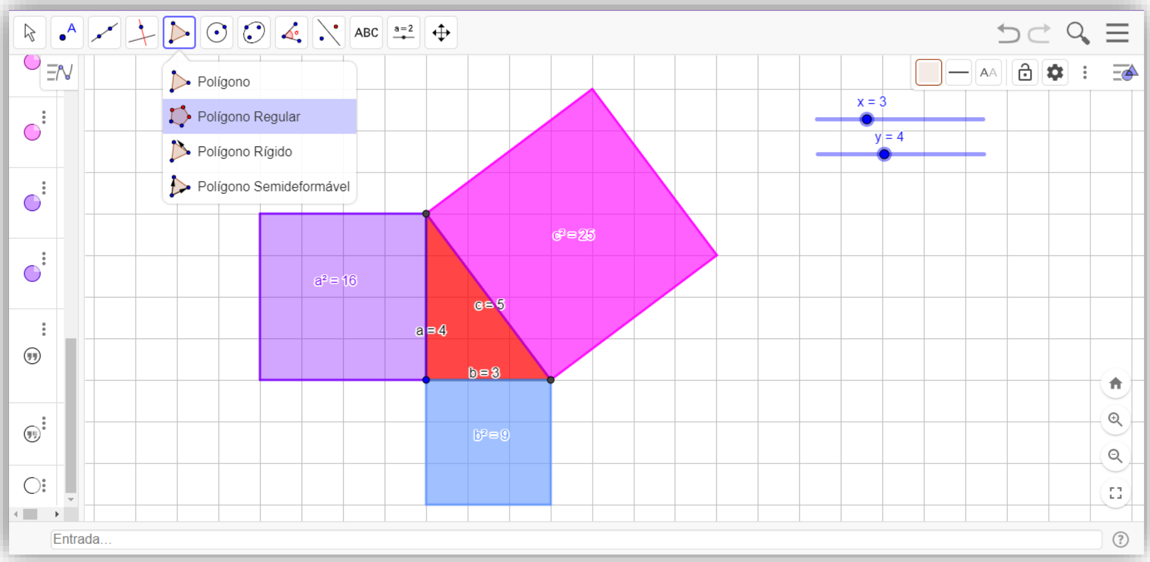

Figura 24: Áreas quadradas vinculadas aos lados do triângulo no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Na função de texto digitaremos conforme nossos valores das área dos quadrados, o proprio GeoGebra permite selecionar cada termo, assim conseguimos visualizar o Teorema de Pitágoras utilizando as quadraturas.

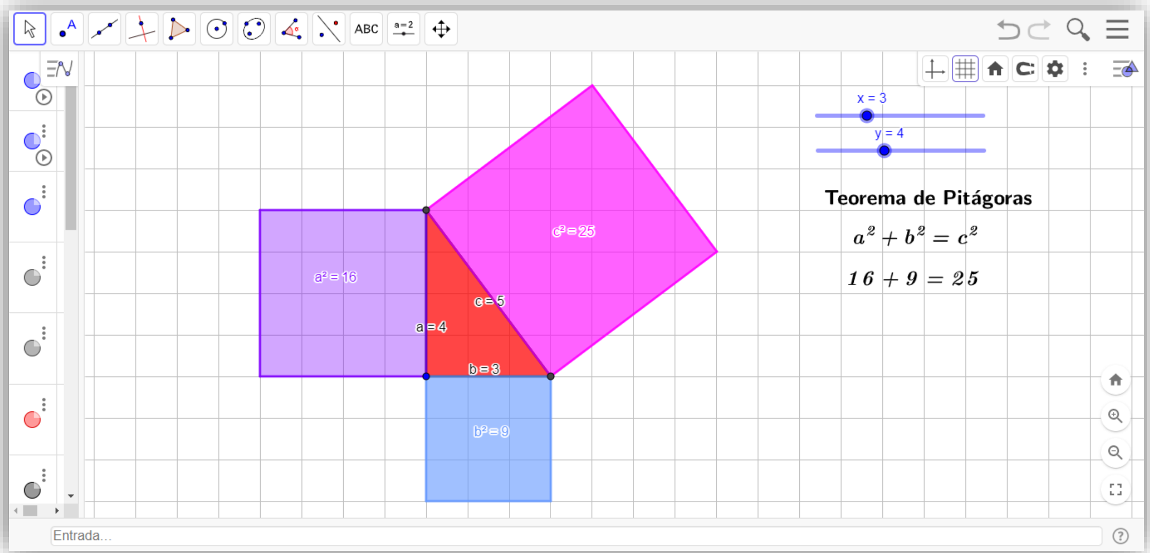

Figura 25: Teorema de Pitágoras utilizando as quadraturas no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Atraves do controle deslizante mudamos os valores e a igualdade do Teorema se mantém.

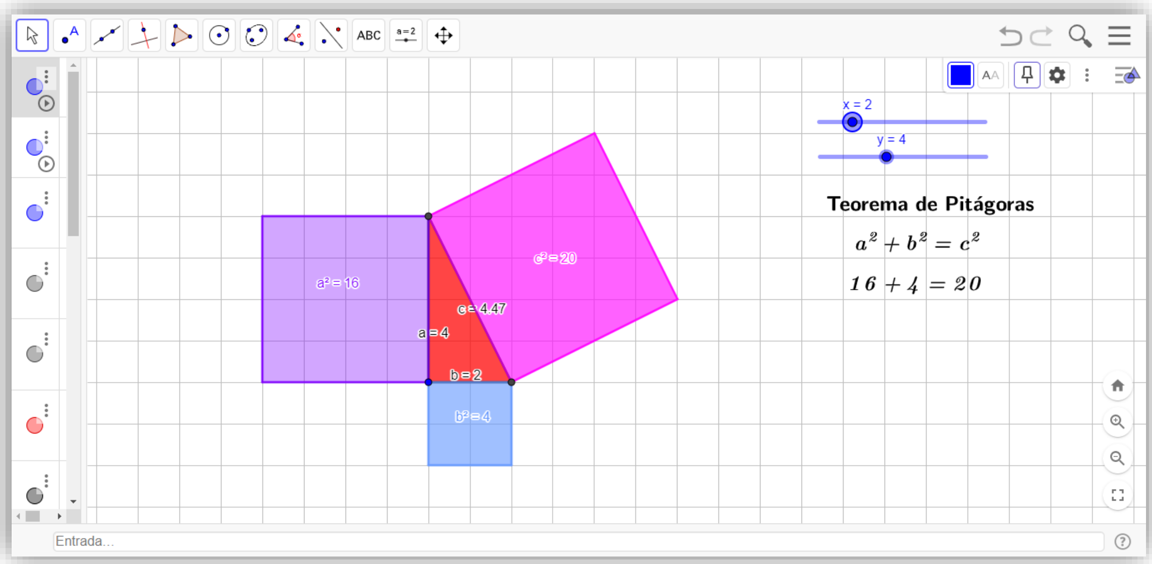

Figura 26: Teorema de Pitágoras com valores diferentes no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

3.2.5. DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses, James Abram Garfield, foi general e apaixonado por matemática, e através de seus estudos sobre essa ciência, conseguiu formular uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando trapézio em 1876.
Segue a demonstração feita por James

Analisando a figura abaixo, temos um trapézio que foi decomposto em três triângulos retângulos de lados a, b e c. Onde a área do trapézio é composta por base a, b e altura $a + b$, onde isso será igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas dos três triângulos retângulos. Vejamos:

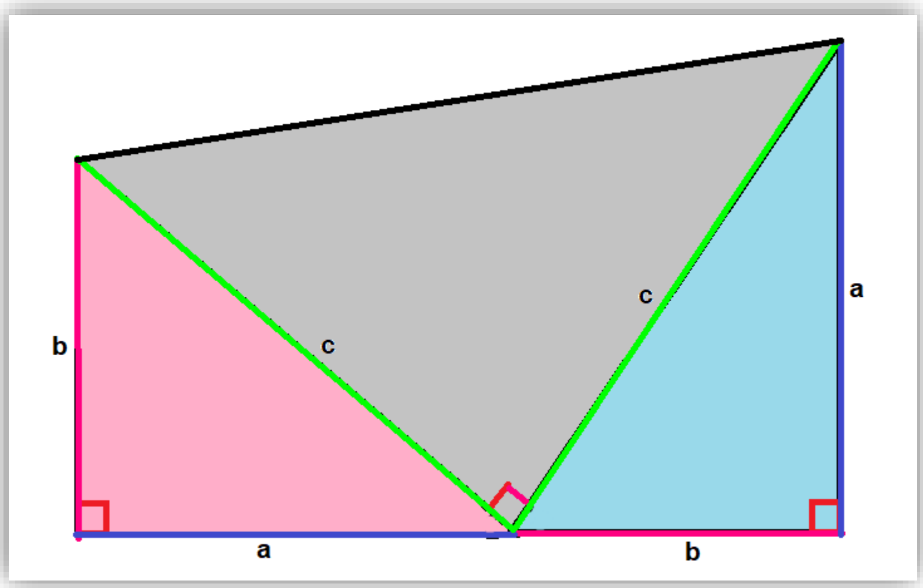

Figura 27: Trapézio decomposto em três triângulos retângulos de lado a, b, e c.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

$$Área\ do\ trapézio = \frac{(base\ maior\ +\ base\ menor).\,altura}{2}$$

Neste caso a base maior é *a,* base menor é *b,* e a altura é $(a + b)$. Assim substituindo os valores na área do trapézio.

$$Àrea\ do\ trapézio = \frac{(a + b).(a + b)}{2}$$
$$Área\ do\ trapézio = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

Observando a imagem vemos três triângulos retângulos, onde se calcularmos as áreas destes triângulos, teremos a área do trapézio, assim temos então:

$$Área\ dos\ triângulos = \frac{a.b}{2} + \frac{b.a}{2} + \frac{c.c}{2}$$

$$Área\ dos\ triângulos = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$Área\ dos\ triângulos = \frac{c^2 + 2ab}{2}$$

Como o que fizemos é basicamente, calcular a área do trapézio de duas formas diferentes, podemos então igualá-las.

$$Área\ do\ trapézio =\ Área\ dos\ triângulos$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{c^2 + 2ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

E assim está demonstrado o teorema de Pitágoras utilizando a área do trapézio, podemos continuar então com a demonstração visual utilizando a plataforma GeoGebra.

3.2.6. DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO GEOGEBRA

Devemos construir dois triângulos opostos um com o outro, e com catetos maiores *a* e catetos menores *b*, para isso devemos seguir os passos a seguir. Primeiro para visualizar melhor, devemos desabilitar os eixos (X, Y), para isso clicamos com o botão direito do cursor e desmarcamos a opção Exibir Eixos.

Na área de trabalho devemos clicar nos três pontos aleatórios que irão definir o primeiro triângulo retângulo. Após utilizar a mesma ferramenta para criar o segundo triângulo retângulo, inversamente proporcional ao primeiro triângulo. De acordo com as construções devemos ter o seguinte objeto:

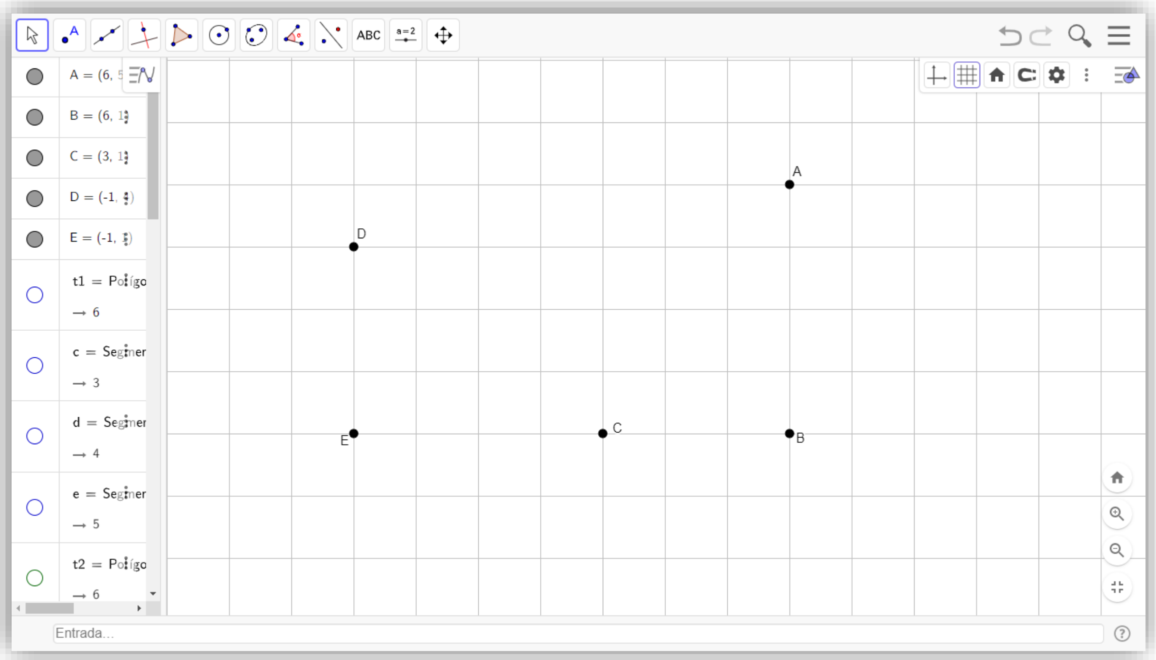

Figura 28: Pontos para a criação dos triângulos no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Agora na ferramenta de polígonos, iremos selecionar o de triângulo, em seguida clicamos nos pontos respectivos de cada triângulo, para assim montamos nossa estrutura principal da demonstração.

Para deixar a imagem mais limpa de informações, e destacada por cores, clicamos em cada um dos termos à esquerda, depois em configuração, rotulo para colocar o valor correspondente, e em cor, podemos escolher uma dentro de várias opções. Para que fique melhor apresentável, a construção deve seguir esses padrões.

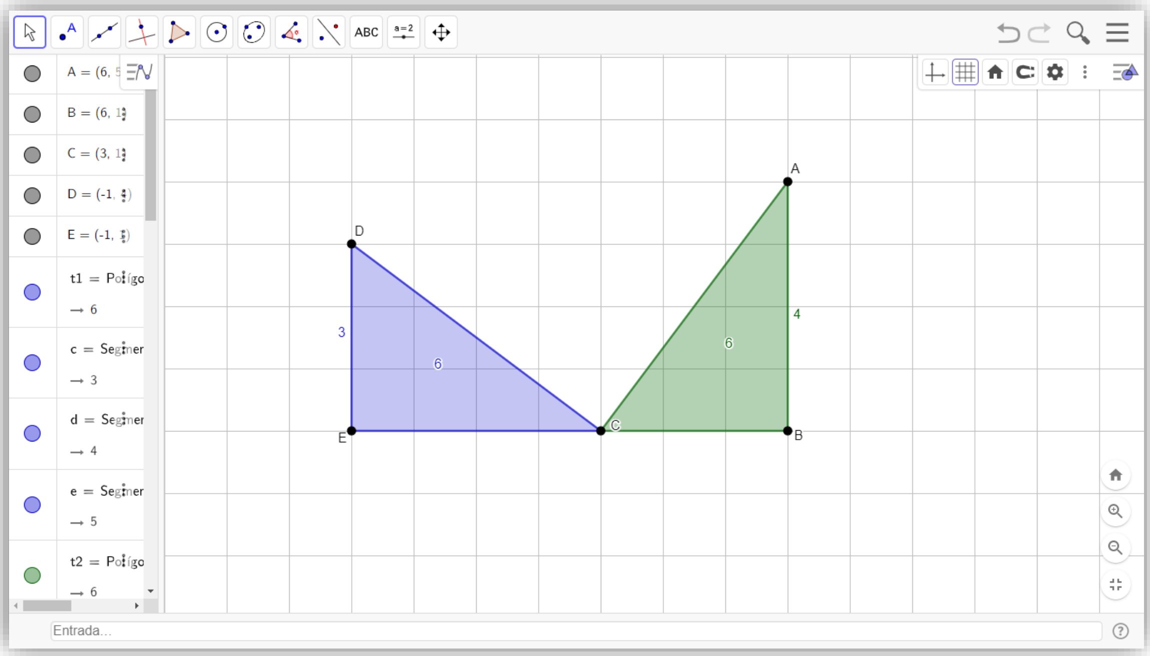

Figura 29: Criação dos triângulos com os pontos no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022

Deve-se clicar na ferramenta de Polígono novamente e clicar, respectivamente, nos pontos D, C, A e novamente no ponto D. Lembrar-se de retirar também os rótulos dos segmentos, conforme citado anteriormente. Também já podemos trocar a cor e definir os rótulos com os valores, de cada polígono, assim já sabendo suas respectivas áreas.

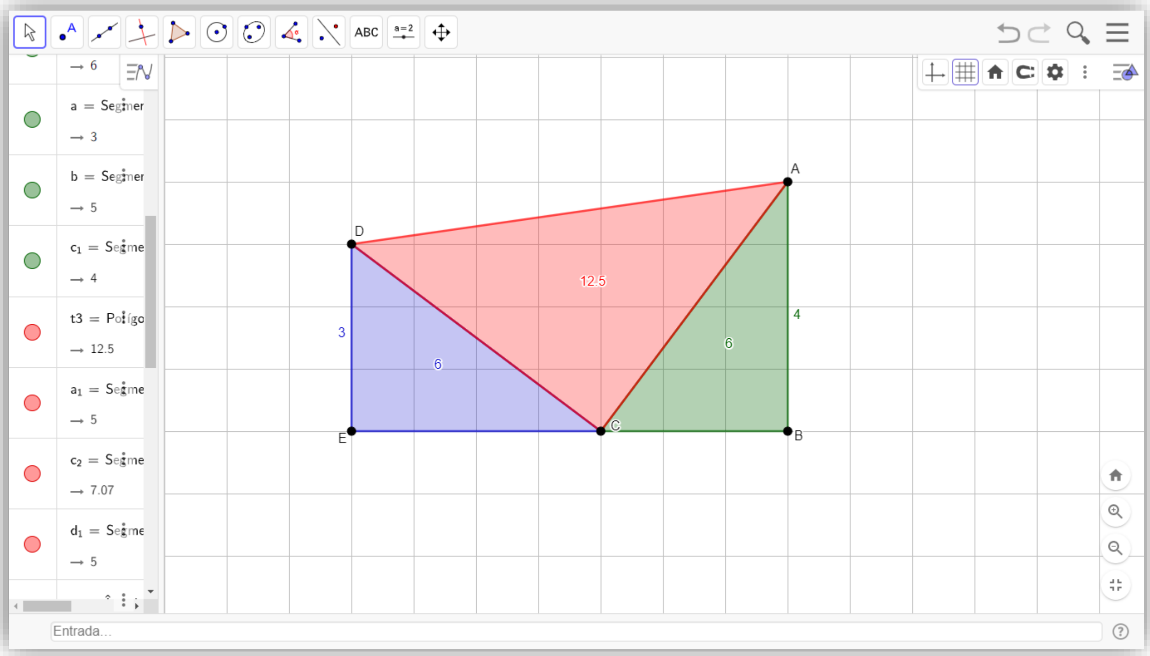

Figura 30: Criação do triângulos D, C e A no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Com isso está verificado o teorema de Pitágoras utilizando trapézios, também conhecido como demonstração do Presidente. Verifica-se que a soma dos catetos do triângulo retângulo ao quadrado é igual à hipotenusa ao quadrado, conforme enuncia o teorema de Pitágoras. Com esta demonstração, utilizamos diversas ferramentas do *software* GeoGebra, de maneira prática e didática, o que possibilita uma visualização e participação do aluno no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo.

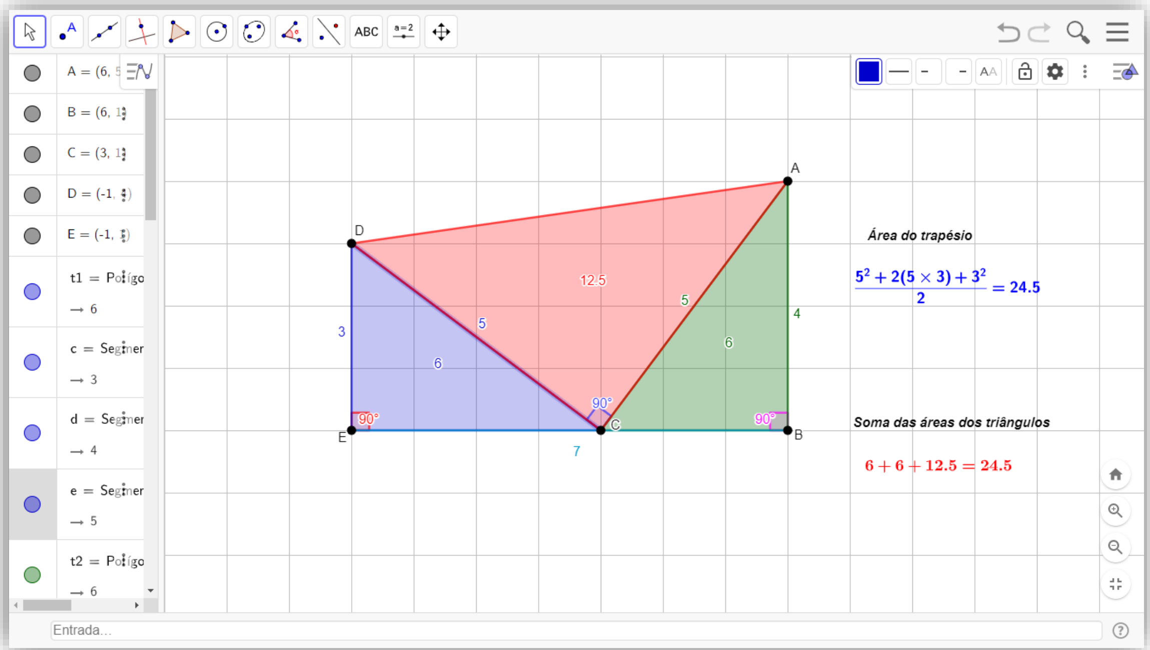

Figura 31: Representação final do Presidente do Teorema de Pitágoras no GeoGebra.

Fonte: elaborado pelo autor, 2022.

Já o professor pode utilizar como proposta de exploração do Teorema de Pitágoras a representação da diagonal de um quadrado, ou seja, uma figura geométrica com quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos. Então calcula-se a diagonal de um quadrado ou de um retângulo que possa ser calculada com o Teorema de Pitágoras. Outra aplicação que possui um formas de trabalhar o teorema de Pitágoras é altura de um triângulo equilátero já que quando traçamos a altura de um triangulo equilátero obtemos dois triângulos retângulos, por ultimo o Teorema de Pitágoras é fundamental para determinar as razões seno e cosseno de ângulos notáveis como: 30°, 45° e 60°, deste modo vemos a versatilidade em trabalhar com o Teorema de Pitágoras em sala de aula, e todos esses exemplos citados podem ser construídos dentro do *Software* GeoGebra.

4. CONCLUSÃO

Vemos que as escolas já vêm buscando meios de adaptação para as novas tecnologias e meios de comunicação, muito por conta do período pandêmico. Onde antigamente era extremamente comum usar somente livros físicos, impressos, lousas e cadernos, porém hoje boa parte das universidades e escolas já vem buscando adquirir apostilas impressas por PDF digitais no lugar de cadernos com cópias, ou até mesmo apresentações em *PowerPoint* no lugar de quadros escritos na hora. Dentro da matemática em si é observado a adição de *softwares* em propostas de metodologias ativas para uma variedade de conteúdos, como foi mostrado neste trabalho.

A responsabilidade para a inserção dessas tecnologias na escola, depende do professor e de como ele iria aplicá-la, da escola e seus gestores para preparar o espaço físico e as condições necessárias, para que a experiência professor-aluno seja maximizada, o que no Brasil infelizmente não ocorre tão bem por conta de diversos fatores, como por exemplo falta de investimento público e privado em tecnologias.

A estrutura escolar precisa dar ao aluno a capacidade que ele necessita para realizar suas atividades, favorecendo as relações interpessoais, possibilitando conceder uma dinâmica de aquisição de conhecimento, ou seja, a escola e sua estrutura devem ser atrativas para os alunos, assim eles estarão estimulados para realizar o que for proposto. Um ambiente mal estruturado passa a ser na visão do aluno, um lugar tedioso e cansativo, para o professor o processo de ensino se torna um fardo, já que ele não conseguirá exercer a função na qual lhe foi dedicado.

O uso da tecnologia, por meio do computador e seus *softwares*, pode mudar a maneira do professor ministrar a sua aula de matemática, com contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem para o aluno. É necessário que haja uma integração entre, professores, *softwares*, laboratórios de informática e alunos para otimizar o uso da tecnologia digital nas aulas de matemática.

Quanto ao uso dos *softwares* matemáticos, é incontestável sua importância nas aulas de matemática, porém deve-se haver uma escolha correta do *software*, bem como o treinamento dos professores e alunos referente ao uso deles.

Finalmente, acredita-se que a utilização das Novas Tecnologias não se destina, apenas, a facilitar os cálculos ou as medidas, mas sim permite transformar os processos de pensamento e construção do conhecimento. O uso das NTICs tornou-se, nas últimas décadas, um instrumento essencial na investigação matemática e outras áreas científicas. Infelizmente o uso da tecnologia ainda é visto com desconfiança por muitos professores, apesar de ser hoje evidente a influência que se tem sobre o uso de equipamentos computacionais na criação de conhecimento científico.

Esperamos que através deste trabalho, seja mostrado que a interação entre o professor, aluno e as NTICs, transforme profundamente o espaço escolar, onde o ensino de matemática passará a ser menos temido pelos alunos, e que seja mais utilizado os recursos e meios tecnológicos, para o maior aproveitamento dessa disciplina. Porém é importante que o professor entenda também que o fato de estar bem equipada com os mais modernos recursos tecnológicos, não é sinônimo de melhoria na qualidade de ensino.

Os aparatos podem dinamizar o processo de aprendizagem, mas isso não é fator para se eliminar as práticas pedagógicas. Mesmo que haja o uso de ferramentas tecnológicas na educação matemática é importante que se tenha a compreensão por parte da docência que esses métodos devem ser adaptados ao uso didático, ou seja, inserindo os meios de acordo com a necessidade do projeto de educação, não às demandas particulares dos alunos, dessa forma possibilitando distração em sala de aula.

Contudo, podemos dizer que tecnologia em sala de aula é uma mediação entre conteúdo e aluno, professor e aluno e professor e conteúdo. Já que os recursos tecnológicos tornaram possíveis fazer isso de forma simplificada, exemplo disso foi a utilização desta metodologia em um projeto de intervenção. Onde foi usado o software GeoGebra para aplicar o teorema de Pitágoras, assim podíamos ver um interesse e curiosidade dos alunos sobre o conteúdo e sobre a forma como foi aplicado, buscando sempre a exploração da ferramenta tecnológica da melhor forma possível. Assim os resultados obtidos no projeto de intervenção possibilitaram a realização deste trabalho, sendo usado como experimento da metodologia estudada durante todo esse artigo. Portanto podemos ver um exemplo claro de realização e aplicação da teoria estudada, e resultados excelentes sobre o uso de tecnologias digitais em sala de aula.

5. REFERÊNCIAS

EVES, H. Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

CYSNEIROS, Paulo Gileno. Novas tecnologias na sala de aula: melhoria do ensino ou inovação conservadora? INFORMATICA EDUCATIVA, v. 12, n. 1, 1999, 11-24.

ASTH, Rafael: Teorema de Tales; Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/teorema-de-tales/ . Acesso em: 15 out. 2022.

FIORENTINI, Dario. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodologia/ Dario Fiorentini, Sergio Lorenzato. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SANCHO, Juana Maria. Tecnologia para transformar a educação, tradução Valério Campos. Porto Alegre, RS: Artmed, 2006.

CARR. Nicholas. A geração superficial (The Shallows) – O que a internet está fazendo com nossos cérebros, tradução Mônica Gagliotti. **Norton, 2010**

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Teorema de Tales"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm . Acesso em 02 de novembro de 2022.

FREITAS, Raquel. Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para a organização do ensino. Goiânia, GO: educativa, 2016.

SILVA, Gabriele. Os benefícios das novas tecnologias na educação: Educa mais Brasil. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/noticias/os-beneficios-das-novas-tecnologias-na-educacao . Acesso em 25 de outubro de 2022.

RAMOS, Jefferson. Pitágoras: biografia resumida: Sua Pesquisa.com. Disponível em: https://www.suapesquisa.com/pesquisa/pitagoras.htm . Acesso em 07 de outubro de 2022.

SCOTT, Elisha. The pythagorean proposition. Washington D.C: Classics 1968.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/moduloII/conteudos2_criterios1.html. Acesso em 07 de outubro. 2022.

SANTOS, Marconi Coelho dos. Teorema de Pitágoras: Suas diversas demonstrações. Paraíba, 2011.

SARAIVA, Karla. A educação em tempos de COVID-19: ensino remoto e exaustão docente. Ponta Grossa PR: Práxis Educativa, 2020

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. BRASIL. Guia de livros didáticos: PNL

FELCHER, C. D. O.; PINTO, A. C. M.; ALVES, R. DA S. Os desafios do uso do QR code encontrados por professores no ensino remoto. Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (Educitec), v. 6, e151020, 2020.

ZORZAN, A. S. L. Ensino-aprendizagem: algumas tendências na Educação Matemática. Rev. Ciências Humanas, Frederico Westphalen, v. 8, nº 10, p. 77-93, jun. 2007. Disponível em: http://revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/download/303/563.

RODRIGUES, Ricardo Batista. Novas Tecnologias da Informação e da Comunicação/ Ricardo Batista Rodrigues. Recife: IFPE, 2016.

PACIEVITCH, Thais. Tecnologia da informação e comunicação. Disponível em https://www.infoescola.com/informatica/tecnologia-da-informacao-e-comunicacao/ . Acesso em 10 de outubro de 2022

GERDES, Paulus. Etnogeometria: Cultura e o Despertar do Pensamento Geométrico. Moçambique: ISTEG, 1992.