

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

**DISTRIBUIÇÕES DE VELOCIDADE EM REGIMES CLÁSSICO E RELATIVÍSTICO
COM APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMA E AO QUASAR 3C 273**

GILBERTO JONAS DAMIÃO

GOIÂNIA
Dezembro / 2021

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

GILBERTO JONAS DAMIÃO

**DISTRIBUIÇÕES DE VELOCIDADE EM REGIMES CLÁSSICO E RELATIVÍSTICO
COM APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMA E AO QUASAR 3C 273**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

GOIÂNIA
Dezembro / 2021

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado

**DISTRIBUIÇÕES DE VELOCIDADE EM REGIMES CLÁSSICO E RELATIVÍSTICO
COM APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMA E AO QUASAR 3C 273**

elaborado por

Gilberto Jonas Damião

como requisito parcial para obtenção do grau de

Licenciado em Física.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof.Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.
(Presidente/Orientador)

Prof.Dr. Anderson Costa da Silva
(Membro)

Prof.Dr. André Luiz Cardoso da Silva
(Membro)

GOIÂNIA
Dezembro / 2021

Dedicatória

Dedico este trabalho ao amor da minha vida, minha namorada Juliana, que me inspira e apoia nos estudos e em todos os momentos. Seu afeto e respeito são os tesouros que impulsionam minha caminhada.

Agradecimentos

A Deus, por abençoar minha vida em todos os momentos, fáceis ou difíceis.

A meus pais, Maura Menezes Jonas Damião e Gilberto Pereira Damião, por me darem a vida e o suporte que permitem que eu aprenda mais e evolua a cada dia.

A minha namorada, Juliana Ramos Alves, pelo carinho, companheirismo, doçura e exemplo de empenho e persistência nos estudos.

Aos meus colegas dos cursos de licenciatura em Física, Química e Matemática da PUC Goiás, pela amizade e companheirismo nos estudos.

A todos os professores do curso de Física da PUC Goiás pelo exemplo de postura perante o conhecimento e, especialmente, ao meu orientador, Prof. Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues, pelo direcionamento, disponibilidade e paciência essenciais para a confecção deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Resumo

Este estudo propõe a dedução físico-matemática e a aplicação de distribuições de velocidades baseadas em regimes não relativístico e relativístico, sendo, respectivamente, a distribuição de Maxwell-Boltzmann e a distribuição de Maxwell-Jüttner. A aplicação se deu a sistemas físicos oriundos da Astrofísica e da Física de Plasma. Alguns destes sistemas são previstos teoricamente e outros estimados a partir de observações experimentais. A opção pelo método de pesquisa bibliográfico e exploratório possibilitou, a partir da teoria existente, a descrição e dedução detalhada dos parâmetros de cada distribuição, o cálculo dos valores médios de velocidade, o esboço dos gráficos com a utilização de softwares e a comparação dos traços e magnitudes encontradas. Pôde-se observar que a determinação do regime do sistema depende da massa das partículas (parâmetro microscópico) e da temperatura (parâmetro macroscópico), sendo que as distribuições se aproximam em regimes clássicos. Os regimes relativísticos apresentados em alguns sistemas proporcionaram dados numéricos e gráficos cuja possibilidade de ocorrência provocam a Física; tais situações foram tratadas à luz do conhecimento teórico atual.

Palavras-Chave: Maxwell-Boltzmann; Maxwell-Jüttner; Relatividade; Distribuição de Velocidades; Teoria Cinética dos Gases.

Abstract

This study proposes the physical-mathematical deduction and the application of velocity distributions based on non-relativistic and relativistic regimes, being, respectively, the Maxwell-Boltzmann distribution and the Maxwell-Jüttner distribution. The application was given to physical systems from Astrophysics and Plasma Physics. Some of these systems are theoretically predicted and others estimated from experimental observations. The option for the bibliographic and exploratory research method allowed, based on the existing theory, the detailed description and deduction of the parameters of each distribution, the calculation of mean velocity values, the sketching of graphics using software and the comparison of traces and magnitudes found. It was observed that the determination of the system regime depends on the particle mass (microscopic parameter) and temperature (macroscopic parameter), and the distributions are similar in classical regimes. The relativistic regimes presented in some systems provided numerical and graphical data whose possibility of occurrence provokes Physics; such situations were dealt with in the light of current theoretical knowledge.

Keywords: Maxwell-Boltzmann; Maxwell-Jüttner; Relativity; Speed Distribution; Kinetic Theory of Gases.

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 – Cubo com molécula de gás. | 15 |
| Figura 2.1 – Espaço de velocidades. | 21 |
| Figura 2.2 – Função de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para dois valores de temperatura. O valor adotado para a massa m_0 foi a massa do próton. . | 28 |
| Figura 2.3 – Representação do espaço de velocidades com distribuição de magnitudes. | 29 |
| Figura 4.1 – Distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para prótons à temperatura da superfície do Sol. | 45 |
| Figura 4.2 – Distribuição de velocidades de Maxwell-Jüttner para prótons à temperatura da superfície do Sol. | 45 |
| Figura 4.3 – Distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para prótons à temperatura da superfície do Sol: Valores esperados. | 46 |
| Figura 4.4 – Distribuição de velocidades de Maxwell-Jüttner para prótons à temperatura da superfície do Sol: Valores esperados. | 46 |
| Figura 4.5 – Plotagem das distribuições para elétrons com $\zeta = 39,5335$ | 48 |
| Figura 4.6 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann para elétrons à temperatura do critério de Lawson com os valores esperados. | 48 |
| Figura 4.7 – Distribuição de Maxwell-Jüttner para elétrons à temperatura do critério de Lawson com os valores esperados. | 48 |
| Figura 4.8 – Plotagem das distribuições para elétrons com $\zeta = 3,9533$ | 49 |
| Figura 4.9 – Plotagem das distribuições para elétrons com $\zeta = 3,9533$ e $0 < \beta < 1.49$ | |
| Figura 4.10 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann para elétrons com $\zeta = 3,9533$ e valores esperados. | 50 |
| Figura 4.11 – Área perdida (em cinza) pelo uso da Distribuição de Maxwell-Boltzmann: $\zeta = 3,9533$ | 50 |
| Figura 4.12 – Distribuição de Maxwell-Jüttner para $\zeta = 3,9533$ e $\beta < 1$ | 51 |
| Figura 4.13 – Comparativo entre as distribuições com $\zeta = 1,0888$ | 52 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.14 – Comparativo entre as distribuições com $\zeta = 1,0888$ e ênfase na distribuição de Maxwell-Boltzmann. | 52 |
| Figura 4.15 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann para $\zeta = 1,0888$ | 52 |
| Figura 4.16 – Área perdida (em cinza) pelo uso da Distribuição de Maxwell-Boltzmann: $\zeta = 1,0888$ | 53 |
| Figura 4.17 – Distribuição de Maxwell-Jüttner para prótons à temperatura do quasar 3C 273..... | 53 |

Lista de Tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 4.1 – Valores esperados para $T = 5800$ K..... | 46 |
| Tabela 4.2 – Parâmetro ζ (reação D-D). | 47 |
| Tabela 4.3 – Valores esperados (MB) para $\zeta = 39,5335$ | 48 |
| Tabela 4.4 – Valores esperados (MJ) para $\zeta = 39,5335$ | 48 |
| Tabela 4.5 – Valores esperados (MB) para $\zeta = 3,9533$ | 50 |
| Tabela 4.6 – Valores esperados (MJ) para $\zeta = 3,9533$ | 51 |
| Tabela 4.7 – Valores esperados (MB) para $\zeta = 1,0888$ | 52 |
| Tabela 4.8 – Valores esperados (MJ) para $\zeta = 1,0888$ | 53 |
| Tabela 4.9 – Diferença percentual entre os valores esperados. | 54 |
| Tabela 4.10 – Diferença entre $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ e $\langle \beta_{MB}^2 \rangle$ | 55 |
| Tabela 4.11 – Diferença entre $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ e $\langle \beta_{MJ}^2 \rangle$ | 55 |

Sumário

| | |
|--|----|
| Introdução..... | 10 |
| 1. A Teoria Cinética dos Gases | 14 |
| 1.1 Introdução..... | 14 |
| 1.2 Desenvolvimento Teórico | 15 |
| 2. A Função de Distribuição de Velocidades de Maxwell-Boltzmann | 20 |
| 2.1 Introdução..... | 20 |
| 2.2 Desenvolvimento Teórico | 20 |
| 2.3 Valores Esperados | 29 |
| 3. A Função de Distribuição de Velocidades de Maxwell-Jüttner | 32 |
| 3.1 Introdução..... | 32 |
| 3.2 Desenvolvimento Teórico | 32 |
| 3.3 Valores Esperados | 39 |
| 4. Comparações Entre as Distribuições de Velocidades | 43 |
| 4.1 Introdução..... | 43 |
| 4.2 Desenvolvimento Teórico | 43 |
| Considerações Finais | 56 |
| Apêndices | 57 |
| A. Tabela de Integrais (Fonte: Software Referenciado em [25])..... | 57 |
| A.1 Capítulo 2 | 57 |
| A.2 Capítulo 3 | 57 |
| B. Dedução da Relação Trigonométrica Hiperbólica (Capítulo 3) | 58 |
| C. Passagens Matemáticas da Expressão de β_p (Capítulo 3)..... | 60 |
| D. Função Gama Incompleta (Capítulo 3) | 61 |
| E. Cálculo de $\langle \beta^2 \rangle$ (Capítulo 3) | 62 |
| F. Funções Especiais Oriundas da Equação Diferencial de Bessel (Capítulo 3) .. | 67 |
| F.1 Função Modificada de Bessel | 67 |
| F.2 Função Modificada de Struve..... | 68 |
| G. Distribuição de Maxwell-Boltzmann em Função de β (Capítulo 4) | 69 |
| H. Cálculo de $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ (Capítulo 4)..... | 71 |
| Referências..... | 75 |

Introdução

O desenvolvimento da Física se dá a partir da observação de fenômenos e da construção de modelos teóricos embasados nos dados fenomenológicos. A escala dos fenômenos observáveis, por sua vez, depende da confiabilidade das medidas e da capacidade de processamento daqueles dados.

Se as medições possuem grandes erros ou se o volume de dados é muito grande de modo a impossibilitar a extração de informações do sistema e a sua análise, a escala do fenômeno deve ser alterada ou os dados devem ser extraídos a partir de outras observações.

Tal questão é intrínseca ao estudo dos gases, dos plasmas e da matéria altamente energizada em geral, pois as grandezas observáveis que determinam o estado de um sistema possuem escala macroscópica, e, conforme [1], a partir de observáveis como temperatura, pressão e volume, é possível expressar a energia média das partículas.

Medidas determinísticas da velocidade dos minúsculos corpúsculos de um gás são inviáveis, pois sua quantidade é imensa. O número de Avogadro, por exemplo, que traz a quantidade de átomos por mol de determinada substância, é de aproximadamente $6,022 \times 10^{23}$ unidades, o que corresponderia a mais de seiscentos bilhões de trilhões de partículas [2]; ademais, trabalha-se frequentemente com múltiplos desse valor.

Isso implica que a consideração e cálculos de grandezas físicas como a energia e a velocidade individual de cada uma delas tornam-se impraticáveis. Para estes casos, buscam-se abordagens estatísticas de grandezas físicas microscópicas a partir de observáveis macroscópicos [3, 4].

Logo, encontrar a relação entre a temperatura, parâmetro macroscópico, e os valores médios da velocidade, grandeza microscópica, bem como determinar a distribuição probabilística de velocidades torna-se imprescindível para caracterizar tais sistemas de partículas.

A distribuição de Maxwell-Boltzmann aplica-se satisfatoriamente a partículas de baixas velocidades, como a elétrons e íons – separadamente – de um plasma a temperaturas da ordem de alguns milhares de kelvin. Entretanto,

valores muito altos desta grandeza podem resultar em um regime relativístico de velocidades corpusculares. Neste caso, a distribuição de Maxwell-Boltzmann pode não ser o melhor modelo que descreve o sistema físico [5].

Conforme [6], a Teoria da Relatividade Restrita implica no limite de velocidades dos corpos de massa não nula de aproximadamente $2,9979 \times 10^8$ m/s. A partir deste limite, Ferencz Jüttner deduziu, em 1911, uma distribuição de velocidades (denominada distribuição de Maxwell-Jüttner) que o levasse em consideração [7].

Altas temperaturas e, possivelmente, altas velocidades de partículas ocorrem na teoria e em experimentos de fusão nuclear controlada. Em objetos astrofísicos elas também são observadas. Coloca-se, então, o seguinte questionamento: entre as distribuições de velocidades de Maxwell-Boltzmann e de Maxwell-Jüttner, qual é a que melhor descreve o conjunto de velocidades de partículas a temperaturas muito elevadas como as que se observam em alguns corpos celestes e na teoria da fusão nuclear controlada?

Pretende-se, a partir do problema exposto, aplicar as distribuições de velocidades de Maxwell-Boltzmann e de Maxwell-Jüttner a valores de temperatura encontrados em objetos astrofísicos e na teoria da fusão nuclear controlada. Para tanto, espera-se encontrar, de forma analítica (se possível), as expressões da velocidade mais provável, da velocidade média e da raiz quadrada da velocidade média quadrática das partículas para as duas distribuições de velocidades; aplicar as distribuições a valores de temperatura e de massa de corpúsculos observados em objetos astrofísicos e nas previsões teóricas da fusão nuclear controlada; e comparar os parâmetros resultantes das distribuições de velocidades.

O estudo das distribuições de velocidade e sua aplicação em situações teóricas e práticas permite que se teste a validade e a adequação dos modelos físico-matemáticos, que buscam, em última análise, melhor descrever a realidade. Aí reside um argumento em favor da relevância deste trabalho.

Ademais, observou-se, na pesquisa bibliográfica, grande quantidade de material relativo à distribuição de Maxwell-Boltzmann. Com relação à distribuição de Maxwell-Jüttner, há, no entanto, poucas publicações que a enfoquem da maneira que se optou por abordá-la.

Pode se aliar a isso o fato desta distribuição relativística, em razão de sua complexidade e especificidade, não ser parte do conteúdo ministrado durante o curso de graduação em Física. Por isso, a busca pelo seu entendimento e a tradução deste em uma pesquisa acadêmica apenas engrandece a relevância desta para o seu autor.

Para os fins a que se propõe o projeto, e por sua natureza eminentemente teórica, esta pesquisa se caracteriza como exploratória [8], pois busca explicitar o problema e familiarizar sua compreensão. Além disso, é bibliográfica, pois se embasa unicamente em materiais científicos publicados para, então, apresentar uma aplicação hipotética de uma teoria utilizando critérios de outra teoria, ou seja, aplica-se a teoria na teoria.

A partir de tal metodologia, algumas atividades em fontes de coleta de informações foram realizadas, quais sejam:

- 1) A investigação, em artigos científicos e livros, bem como a caracterização das distribuições de velocidades em relação à teoria qualitativa e dedução matemática. As soluções de funções que representam grandezas físicas podem ser encontradas de forma analítica e/ou de forma numérica. Assim, reconhecer os parâmetros estatísticos que podem ser calculados analiticamente e, na sua impossibilidade, via métodos numéricos, é etapa essencial;
- 2) A montagem das equações e o cálculo nos softwares online Wolfram Alpha (<https://www.wolframalpha.com/>) e Integral Calculator (<https://www.integral-calculator.com/>) dos parâmetros estatísticos oriundos da distribuição de Maxwell-Boltzmann e da distribuição de Maxwell-Jüttner para valores de temperatura teorizados pelos estudiosos da geração de energia via fusão nuclear e de locais astrofísicos como a superfície do Sol e o disco de acreção do quasar 3C 273 e;
- 3) A construção de tabelas e de gráficos das distribuições de velocidades para cada valor de massa e temperatura utilizando o software Rstudio.

A estrutura desta pesquisa é a seguinte: o Capítulo 1 aborda a teoria cinética dos gases, com algumas deduções e correlações entre grandezas macroscópicas e microscópicas. Os capítulos 2 e 3 expõem, respectivamente, as deduções das distribuições de Maxwell-Boltzmann e de Maxwell-Jüttner.

O capítulo 4 contém as aplicações destas distribuições de velocidades a algumas situações. As considerações finais sintetizam observações realizadas nos capítulos antecedentes e, por fim, há os apêndices com o detalhamento de muitas das deduções matemáticas cujos resultados figuram no texto do trabalho.

Capítulo 1

A Teoria Cinética dos Gases

1.1 Introdução

O movimento das partículas de um gás é muito complexo de ser analisado, pois envolve um número imenso de corpúsculos com suas posições e momentos lineares. Trabalha-se, comumente, com múltiplos do número de Avogadro. Isso inviabiliza o cálculo de grandezas físicas individuais como a energia cinética e a velocidade.

Nesse caso, para se extrair informações físicas relevantes do modelo, utiliza-se uma abordagem estatística das grandezas individuais daqueles corpos microscópicos. Estas, por sua vez, implicam efeitos macroscópicos mensuráveis na forma de pressão, temperatura e volume – aspectos envolvidos na equação de estado de determinada substância [1].

Conceitualmente, a pressão de um gás nas paredes de um recipiente é a razão entre a força exercida por suas partículas nas faces internas deste e esta área superficial interna. Sua temperatura é a medida da energia cinética média de seus átomos ou moléculas [2]. O volume do gás é o volume do recipiente que o envolve.

A energia cinética média $\langle E \rangle$, por sua vez, considera o valor médio quadrático da velocidade $\langle v^2 \rangle$ das partículas do gás a partir da seguinte relação:

$$\langle E \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}, \quad (1.1)$$

onde m_0 é a massa de repouso de seus átomos ou moléculas [2].

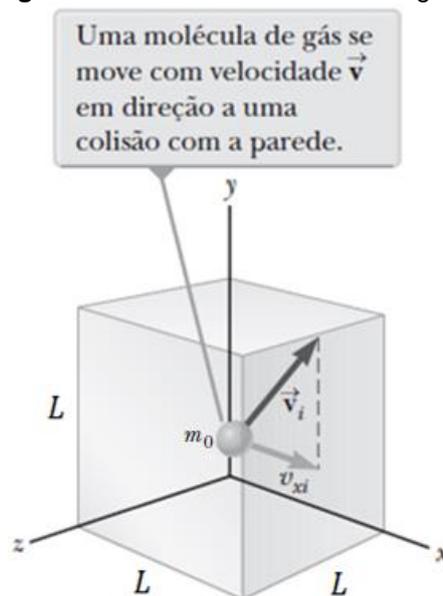
Busca-se, então, um modelo físico-matemático que relacione os parâmetros macroscópicos temperatura, pressão e volume do gás a sua energia cinética média e velocidade média quadrática das partículas.

1.2 Desenvolvimento Teórico

A dedução apresentada por [2] considera um recipiente cúbico cujo gás em seu interior está a uma temperatura constante. A pressão que suas partículas exercem nas paredes internas depende da transferência de momento na forma de colisões elásticas entre aquelas e estas. Neste modelo, o gás é composto por átomos ou moléculas puntiformes e as forças oriundas da interação entre os corpúsculos, bem como suas colisões, são desprezíveis.

Uma partícula isolada tem massa m_0 e velocidade \vec{v} . Ela se submete às leis de movimento de Newton, mas o movimento total é isotrópico, isto é, as direções e módulos das velocidades são livres. A figura abaixo ilustra o choque elástico entre a parede e o átomo/molécula:

Figura 1.1–Cubo com molécula de gás.



Fonte: [2], p. 142 (adaptação).

A transferência de momento da parede para a partícula se dá, matematicamente, na direção x , da seguinte forma:

$$p_{x(\text{inicial})} = m_0 v_{x(\text{inicial})} \quad (1.2)$$

$$p_{x(\text{final})} = m_0 v_{x(\text{final})} \quad (1.3)$$

$$v_x(\text{final}) = -v_x(\text{inicial}) \quad (1.4)$$

$$p_x(\text{final}) = -p_x(\text{inicial}) \quad (1.5)$$

$$\Delta p = m_0 v_x(\text{final}) - m_0 v_x(\text{inicial}) = -p_x(\text{inicial}) - p_x(\text{inicial}) \quad (1.6)$$

$$\Delta p = -2m_0 v_x . \quad (1.7)$$

Portanto, o momento transferido da molécula do gás para a parede interna é $2m_0 v_x$. O tempo necessário para que a partícula atinja a parede frontal e retorne, considerando a dimensão de aresta L do cubo, é:

$$v_x = \frac{2L}{\Delta t} \quad (1.8)$$

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} . \quad (1.9)$$

A variação do momento linear relacionada à variação temporal consiste na grandeza física força (2ª Lei de Newton):

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F \quad (1.10)$$

$$\Delta p = F \Delta t \quad (1.11)$$

$$F \Delta t = 2m_0 v_x \quad (1.12)$$

$$F = \frac{2m_0 v_x}{\Delta t} \quad (1.13)$$

$$F = \frac{2m_0 v_x}{2L/v_x} \quad (1.14)$$

$$F = \frac{m_0 v_x^2}{L} . \quad (1.15)$$

Esta é a expressão da força que uma partícula faz na parede do recipiente. Para encontrar a pressão P exercida nesta interface, deve-se, primeiro, encontrar a força que todas as N partículas aplicam naquela, para, então, relacioná-la com a sua área L^2 :

$$F_{total} = \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_{xi}^2}{L} \quad (1.16)$$

$$P = \frac{F_{total}}{L^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_{xi}^2}{L}}{L^2} \quad (1.17)$$

$$P = \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_{xi}^2}{L^3}. \quad (1.18)$$

Retirando os termos constantes para fora do somatório, tem-se:

$$P = \frac{m_0}{L^3} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2. \quad (1.19)$$

A média do quadrado das velocidades na direção x pode ser encontrada com a multiplicação da expressão acima pela fração N/N :

$$P = \frac{m_0}{L^3} \left(\sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \right) \left(\frac{N}{N} \right) \quad (1.20)$$

$$P = \frac{m_0 N}{L^3} \langle v_x^2 \rangle. \quad (1.21)$$

L^3 é o volume do cubo. Logo:

$$P = \frac{m_0 N}{V} \langle v_x^2 \rangle. \quad (1.22)$$

As velocidades médias independem da direção adotada[3], pois há um número muito grande de partículas se movendo aleatoriamente de forma muito rápida. Dessa forma, o modelo considera que os módulos das velocidades médias são iguais em qualquer direção. Portanto:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \quad (1.23)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \quad (1.24)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle. \quad (1.25)$$

A pressão exposta em (1.22) seria alterada da seguinte forma:

$$P = \frac{m_0 N}{3V} \langle v^2 \rangle \quad (1.26)$$

$$PV = \frac{m_0 N}{3} \langle v^2 \rangle. \quad (1.27)$$

É possível relacionar tal modelo com a equação dos gases ideais [4]:

$$PV = nRT \quad (1.28)$$

$$nRT = \frac{m_0 N}{3} \langle v^2 \rangle, \quad (1.29)$$

sendo R a constante universal dos gases ideais e $N = nN_A$, onde n é o número de mols do gás e N_A o número de Avogadro:

$$nRT = \frac{m_0 n N_A}{3} \langle v^2 \rangle \quad (1.30)$$

$$RT = \frac{m_0 N_A}{3} \langle v^2 \rangle. \quad (1.31)$$

Considerando que a massa molar M do gás é a multiplicação entre a sua massa molecular e o número de Avogadro, isto é, $M = m_0 N_A$, tem-se:

$$RT = \frac{M}{3} \langle v^2 \rangle. \quad (1.32)$$

Isolando $\langle v^2 \rangle$ e extraindo sua raiz quadrada, encontra-se a velocidade eficaz [1] ou velocidade rms, designada por v_{rms} (acrossemia do inglês: *root meansquare* = rms), dada por:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (1.33)$$

ou

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (1.34)$$

pois $R/N_A = k = 1,3806 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann, cuja unidade é joules por kelvin [4]. Pode-se afirmar, também, que a velocidade quadrática média de cada uma das componentes v_x , v_y e v_z é, adotando-se v_x :

$$RT = M\langle v_x^2 \rangle \quad (1.35)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{RT}{M} \quad (1.36)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m_0}. \quad (1.37)$$

Logo:

$$v_{x(rms)} = \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (1.38)$$

ou

$$v_{x(rms)} = \sqrt{\frac{kT}{m_0}}. \quad (1.39)$$

Capítulo 2

A Função de Distribuição de Velocidades de Maxwell-Boltzmann

2.1 Introdução

Os resultados obtidos no Capítulo anterior são muito significativos, pois, a partir de uma grandeza física macroscópica como a temperatura T é possível determinar a velocidade rms com a qual se movem as partículas do gás. Entretanto, a dedução exposta leva a outra hipótese.

Se existe v_{rms} , parâmetro estatístico da velocidade, pode existir uma distribuição de prováveis velocidades, isto é, uma função densidade de probabilidade que descreva os intervalos de velocidades a serem assumidos pelos corpúsculos deste gás.

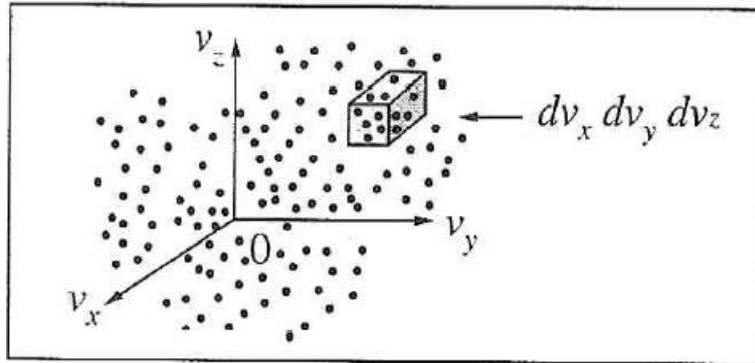
O físico britânico James Clerk Maxwell apresentou, em 1859, um trabalho no qual expôs uma distribuição de velocidades de um gás em equilíbrio térmico [9] e, em 1876, Ludwig Boltzmann chegou ao mesmo resultado por um modelo diferente.

Apresenta-se, a seguir, uma possível dedução desta função distribuição de velocidades.

2.2 Desenvolvimento Teórico

Conforme [9], considerando um espaço tridimensional de velocidades moleculares, como na Figura 2.1, busca-se encontrar a probabilidade de as partículas de um gás, que possuem velocidades diversas, apresentarem as componentes desta grandeza entre os valores de v_x e $v_x + dv_x$; v_y e $v_y + dv_y$; e v_z e $v_z + dv_z$.

Figura 2.1– Espaço de velocidades.



Fonte: [9], p. 275.

Seja $f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$ uma fração do total de partículas de um gás com componentes v_x , v_y e v_z compreendidas na faixa de velocidades exposta no parágrafo anterior. Deseja-se descobrir qual é esta função distribuição de velocidades. Como a velocidade média quadrática depende da temperatura do gás, supõe-se que esta distribuição também dependa. Considere-se o gás em equilíbrio térmico, com a temperatura T constante [1].

Pela definição de probabilidade de variáveis aleatórias contínuas [10], e considerando que o número de moléculas é suficientemente grande para que se adotem como contínuos os valores de velocidades contidas num intervalo cujos limites tendam a $-\infty$ e $+\infty$ em cada dimensão do espaço de velocidades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (2.1)$$

OU

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z) dW = 1, \quad (2.2)$$

sendo dW o elemento de volume do espaço de velocidades igual a $dv_x dv_y dv_z$.

Contudo, duas considerações devem ser novamente feitas, similares às determinadas para a dedução da velocidade média quadrática. Em primeiro lugar, as componentes são independentes, isto é, o valor de v_x , por exemplo, não está vinculado aos valores de v_y e v_z . Isso é válido para cada componente em relação às outras duas. Em segundo lugar, não há direção espacial

preferencial para onde as moléculas caminham, ou seja, o espaço é isotrópico[11].

Matematicamente, estes princípios se expressam com a adoção da mesma forma funcional para cada componente (isotropia espacial) e com a separação da função principal em funções autônomas em relação às outras (independência entre as componentes):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)dv_x = 1 ; \quad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_y)dv_y = 1 ; \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_z)dv_z = 1 . \quad (2.5)$$

Como essas componentes são independentes e suas funções são interpretadas probabilisticamente, a função $f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$ é igual ao produto das funções componentes:

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = f(v_x)dv_x f(v_y)dv_y f(v_z)dv_z \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_y)dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_z)dv_z . \quad (2.7)$$

A isotropia espacial implica a não dependência da direção que se adota, pois a probabilidade de se encontrar determinado número de partículas em uma fração do espaço de velocidades deve ser a mesma que a de outra região equidistante da origem daquele espaço. Portanto, faz-se necessário considerar não mais as componentes da velocidade, mas o módulo desta na função distribuição de velocidades[11]:

$$f(v)dW = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dW, \quad (2.8)$$

onde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Então:

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z). \quad (2.9)$$

Tomando a derivada de $f(v)$ em relação a v_x , tem-se

$$\frac{df(v)}{dv_x} = \frac{df(v_x)}{dv_x} f(v_y)f(v_z) \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial f(v)}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial v_x}\right) = \frac{df(v_x)}{dv_x} f(v_y)f(v_z). \quad (2.11)$$

Como $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}. \quad (2.12)$$

Além disso:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} = f'(v) \quad (2.13)$$

e

$$\frac{df(v_x)}{dv_x} = f'(v_x). \quad (2.14)$$

Portanto:

$$\frac{f'(v)}{v} v_x = f'(v_x)f(v_y)f(v_z). \quad (2.15)$$

O quociente entre (2.15) e (2.9) promove o cancelamento do termo $f(v_y)f(v_z)$:

$$\frac{f'(v)v_x}{f(v)v} = \frac{f'(v_x)}{f(v_x)} \quad (2.16)$$

$$\frac{f'(v)}{f(v)v} = \frac{f'(v_x)}{f(v_x)v_x}. \quad (2.17)$$

Neste ponto, cabe uma análise mais profunda. Um dos lados da igualdade em (2.17) é função que depende do valor de uma das componentes, enquanto que o outro lado vincula-se ao módulo da velocidade v . Esta, por sua vez, subordina-se aos valores de v_x , v_y e v_z . Então, para um dado valor de v_x , há infinitas combinações de v_y e v_z que tornam a igualdade acima válida. Dessa forma, a relação acima só faz sentido matemático se for igual a um valor constante[11], isto é:

$$\frac{f'(v)}{f(v)v} = \frac{f'(v_x)}{f(v_x)v_x} = \frac{f'(v_y)}{f(v_y)v_y} = \frac{f'(v_z)}{f(v_z)v_z} = \text{constante} . \quad (2.18)$$

A constante a ser adotada é -2α em virtude da maior facilidade em se trabalhar com o expoente negativo após a integração de uma das equações acima. Portanto:

$$\frac{f'(v)}{f(v)v} = -2\alpha \quad (2.19)$$

e

$$\frac{f'(v_x)}{f(v_x)v_x} = -2\alpha . \quad (2.20)$$

Substituindo (2.14) em (2.20):

$$\frac{df(v_x)}{dv_x f(v_x)v_x} = -2\alpha \quad (2.21)$$

$$\frac{df(v_x)}{f(v_x)} = -2\alpha v_x dv_x . \quad (2.22)$$

Integrando (2.22), tem-se

$$\int \frac{df(v_x)}{f(v_x)} = \int -2\alpha v_x dv_x \quad (2.23)$$

$$\ln(f(v_x)) = -\alpha v_x^2 + C . \quad (2.24)$$

A inversão do logaritmo expõe $f(v_x)$:

$$f(v_x) = e^{-\alpha.v_x^2 + C} \quad (2.25)$$

$$f(v_x) = Ae^{-\alpha.v_x^2}, \quad (2.26)$$

onde $A = e^C$. A Equação (2.26) apresenta uma curva gaussiana semelhante à distribuição normal [10]. De posse desta relação, pode-se encontrar $f(v)$. Considerando que as funções das outras componentes do espaço de velocidades são $f(v_y) = Ae^{-\alpha.v_y^2}$ e $f(v_z) = Ae^{-\alpha.v_z^2}$, relacionam-se estas e (2.26) a (2.9), resultando em:

$$f(v) = Ae^{-\alpha.v_x^2} Ae^{-\alpha.v_y^2} Ae^{-\alpha.v_z^2} \quad (2.27)$$

$$f(v) = A^3 e^{-\alpha.(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \quad (2.28)$$

$$f(v) = A^3 e^{-\alpha.v^2}. \quad (2.29)$$

Resta determinar as constantes A e α . A partir da Equação (2.3) ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = 1$) e da Equação (1.37) ($\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m_0}$) é possível encontrar suas soluções. Operando (2.3) em (2.26), tem-se

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\alpha.v_x^2} dv_x = 1; \quad (2.30)$$

com relação à componente y :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_y) dv_y = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\alpha.v_y^2} dv_y = 1. \quad (2.31)$$

O produto entre (2.30) e (2.31) é

$$I_1 \cdot I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\alpha.(v_x^2 + v_y^2)} dv_y dv_x = 1. \quad (2.32)$$

Observe-se, por simetria, que $I_1 = I_2 = I$. Tomando um plano cartesiano de abscissa é v_x e ordenada v_y , pode-se utilizar as seguintes relações para converter tais coordenadas em polares:

$$v_x^2 + v_y^2 = r^2 \quad (2.33)$$

$$v_x = r\cos(\theta) \quad (2.34)$$

$$v_y = r\sin(\theta) \quad (2.35)$$

$$dv_y dv_x = \det J = \begin{vmatrix} \cos(\theta)dr & -r\sin(\theta)d\theta \\ \sin(\theta)dr & r\cos(\theta)d\theta \end{vmatrix} = r dr d\theta. \quad (2.36)$$

Os limites de integração $-\infty < v_x < +\infty$ e $-\infty < v_y < +\infty$ das coordenadas cartesianas são equivalentes aos limites $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ das coordenadas polares. Assim, define-se a multiplicação das integrais como

$$I^2 = I_1 \cdot I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} A^2 e^{-\alpha(r^2)} r dr d\theta = 1. \quad (2.37)$$

Aplicando o valor da primeira integral constante no Apêndice A.1 em (2.37):

$$I^2 = A^2 \frac{\pi}{\alpha} \quad (2.38)$$

$$I = A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2.39)$$

$$A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \quad (2.40)$$

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}. \quad (2.41)$$

Para encontrar o valor de α , utiliza-se $\langle v_x^2 \rangle$. Conceitualmente, a média quadrática de uma distribuição contínua, a exemplo de $\langle v_x^2 \rangle$, se dá pela integral

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x . \quad (2.42)$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{kT}{m_0} \quad (2.43)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 A e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{kT}{m_0} . \quad (2.44)$$

Substituindo o valor de A (Equação (2.41)) em (2.44) e aplicando o valor da segunda integral do Apêndice A.1, tem-se:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{kT}{m_0} \quad (2.45)$$

$$\alpha = \frac{m_0}{2kT} . \quad (2.46)$$

Introduzindo (2.46) em (2.41):

$$A = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} . \quad (2.47)$$

Aplicando (2.46) e (2.47) em (2.29), obtém-se a distribuição de velocidades $f(v)$:

$$f(v) = \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} . \quad (2.48)$$

O produto de $f(v)$ pelo elemento de volume $dW = dv_x dv_y dv_z = v^2 d\Omega dv$ possibilita generalizar tal modelo. Com isso, a função torna-se dependente apenas do módulo da velocidade [11], pois $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido cuja integração se dá a partir de 0 a 4π esferorradianos:

$$f(v)dW = f(v)dv_x dv_y dv_z = f(v)v^2 d\Omega dv \quad (2.49)$$

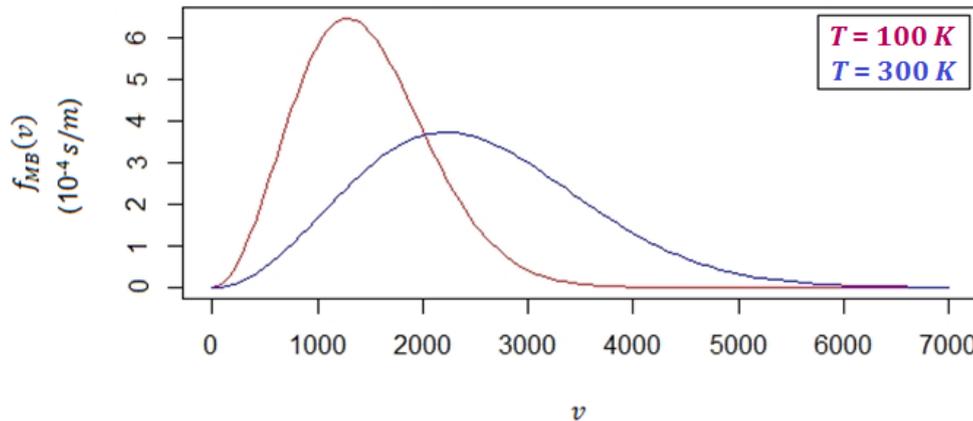
$$\int_0^{4\pi} f(v)v^2 d\Omega dv = 4\pi v^2 f(v)dv. \quad (2.50)$$

Tem-se, portanto, a função de distribuição de velocidades preconizada por Maxwell e por Boltzmann, designada por f_{MB} :

$$f_{MB}(v) = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (2.51)$$

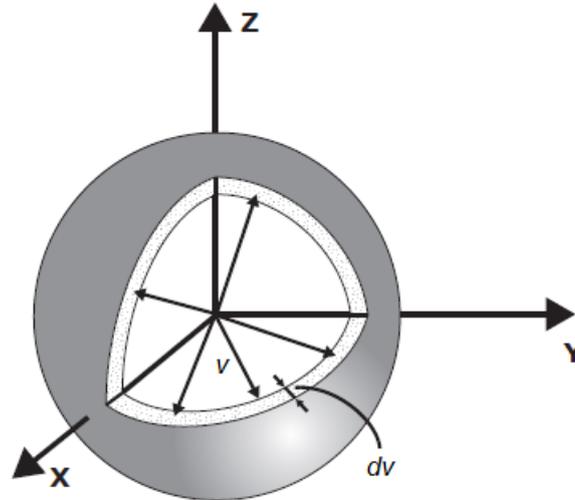
O gráfico desta distribuição assemelha-se a uma gaussiana com início na origem, crescimento quadrático e decrescimento exponencial[11], como mostra a Figura 2.2 a seguir. Nota-se que o efeito do aumento da temperatura torna a curva de probabilidade mais achatada e longa.

Figura 2.2– Função de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para dois valores de temperatura. O valor adotado para a massa m_0 foi a massa do próton.



A interpretação agora é de qual fração de partículas do gás possuem velocidade de módulo entre v e $v + dv$, não importando a direção. Ela representa, também, a probabilidade de uma partícula apresentar velocidade entre v e $v + dv$ [2]. Portanto, não se pensa mais num cubo de dimensões dv_x , dv_y e dv_z que a contém, mas em uma casca esférica de espessura dv no espaço de velocidades, conforme [9] e [11]. A Figura 2.3 ilustra tal situação:

Figura 2.3—Representação do espaço de velocidades com distribuição de magnitudes.



Fonte: [1], p. 21 (adaptação).

2.3 Valores Esperados

A velocidade mais provável (v_p) é o valor que maximiza a função $f_{MB}(v)$. Graficamente, seria o valor de velocidade responsável pelo pico do traço da função distribuição de velocidades. Portanto, tomando-se a derivada da distribuição de Maxwell-Boltzmann e igualando-a a zero [9], tem-se:

$$\frac{\partial(f_{MB}(v))}{\partial v} = \frac{\partial \left(4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right)}{\partial v} = 0 \quad (2.52)$$

$$2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{kT}} \right)^3 v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{kT}} \right)^3 \frac{m_0 v^3}{kT} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0 \quad (2.53)$$

$$2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{kT}} \right)^3 v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{kT}} \right)^3 \frac{m_0 v^3}{kT} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \quad (2.54)$$

$$2 = \frac{m_0 v^2}{kT} \quad (2.55)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} . \quad (2.56)$$

A velocidade média, isto é, a esperança da velocidade desta distribuição [10], é dada, segundo [1], pela integral:

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f_{MB}(v) dv \quad (2.57)$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv \quad (2.58)$$

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv . \quad (2.59)$$

A quarta integral do Apêndice A.1 é semelhante à integração presente em (2.59). Aplicando o valor tabelado, tem-se

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 \frac{4(kT)^2}{2m_0^2} \quad (2.60)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} . \quad (2.61)$$

A velocidade rms v_{rms} , encontrada com a utilização de outros meios físico-matemáticos, pode ser calculada a partir de conceitos estatísticos da seguinte forma [9]:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{+\infty} v^2 f_{MB}(v) dv \quad (2.62)$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{+\infty} 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv \quad (2.63)$$

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 \int_0^{+\infty} v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv . \quad (2.64)$$

Aplicando a quinta integral do Apêndice A.1 em (2.64), tem-se

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 \frac{3\sqrt{\pi(2kT)^5}}{8\sqrt{m_0^5}} \quad (2.65)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0} \quad (2.66)$$

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} . \quad (2.67)$$

Observa-se que a Equação (2.67) é igual à Equação (1.34), o que evidencia a validade desta distribuição.

Uma questão central é o fato de a distribuição de Maxwell-Boltzmann admitir uma probabilidade não nula de se encontrar partículas com velocidades maiores que a velocidade da luz no vácuo $c \cong 2,9979 \times 10^8 \text{m/s}$ [12]. No entanto, sabe-se que somente velocidades menores que c possuem sentido físico. Portanto, será analisada no próximo Capítulo uma função de distribuição de velocidades capaz de lidar com este problema: a função de distribuição proposta por Jüttner[13].

Capítulo 3

A Função de Distribuição de Velocidades de Maxwell-Jüttner

3.1 Introdução

Esta função de distribuição de velocidades foi proposta por Ferencz Jüttner em 1911, apenas seis anos após a formulação de Einstein da Teoria da Relatividade Restrita [7]. Ela leva em consideração o limite da velocidade da luz para todos os corpos cuja massa de repouso é maior que zero, algo que a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann não faz.

É possível deduzi-la de maneiras diferentes [13]. Escolheu-se, entre estas, o tratamento físico-matemático mais acessível. Trata-se da substituição da energia cinética clássica pela energia relativística na expressão do fator de Boltzmann e a consequente normalização desta função.

3.2 Desenvolvimento Teórico

O fator de Boltzmann, dado por $e^{\frac{-E}{kT}}$, compõe a expressão de probabilidade na qual consiste a distribuição de Boltzmann [9] (também conhecida como distribuição canônica ou distribuição de Gibbs [14]):

$$\Phi(p) = \frac{e^{\frac{-E}{kT}}}{Z}, \quad (3.1)$$

onde Z é o fator de normalização, que pode ser reescrito como

$$A = \frac{1}{Z}, \quad (3.2)$$

e, substituindo-o em (3.1), tem-se

$$\Phi(p) = A e^{\frac{-E}{kT}}. \quad (3.3)$$

A probabilidade Φ depende do momento linear p das partículas [7]. Tomando por $f_{MJ}(p)$ a função distribuição de momentos de Maxwell-Jüttner, tem-se, no espaço tridimensional de momentos, o seguinte fundamento probabilístico:

$$f_{MJ}(p)dp = \Phi(p_x, p_y, p_z)dp_x dp_y dp_z \quad (3.4)$$

$$f_{MJ}(p)dp = \Phi(p)p^2 d\Omega dp \quad (3.5)$$

$$f_{MJ}(p)dp = \int_0^{4\pi} \Phi(p)p^2 d\Omega dp \quad (3.6)$$

$$f_{MJ}(p)dp = 4\pi\Phi(p)p^2 dp \quad (3.7)$$

$$f_{MJ}(p)dp = 4\pi A e^{\frac{-E}{kT}} p^2 dp. \quad (3.8)$$

Calcula-se a constante de normalização de (3.8) da seguinte forma:

$$\int_0^{+\infty} f_{MJ}(p)dp = \int_0^{+\infty} 4\pi A e^{\frac{-E}{kT}} p^2 dp = 1 \quad (3.9)$$

$$A = \left(\int_0^{+\infty} 4\pi e^{\frac{-E}{kT}} p^2 dp \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

A energia relativística, dada por $E = m_0 c^2 \gamma$ [15], pode ser escrita em termos do momento linear da seguinte forma:

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}, \quad (3.11)$$

onde

$$\gamma(p) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \quad (3.12)$$

é o fator de Lorentz em função do momento linear. Substituindo (3.11) em (3.10), tem-se a constante de normalização A em função do momento linear:

$$A = \left(4\pi \int_0^{+\infty} p^2 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \right)} dp \right)^{-1} \quad (3.13)$$

ou

$$Z = 4\pi \int_0^{+\infty} p^2 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \right)} dp. \quad (3.14)$$

A função distribuição de momentos de Maxwell-Jüttner se dá, então, por

$$f_{MJ}(p) dp = \frac{4\pi p^2 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \right)}}{4\pi \int_0^{+\infty} p^2 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \right)} dp} dp. \quad (3.15)$$

Observe-se que a utilização somente da parcela cinética da energia clássica no termo exponencial da distribuição de Gibbs e sua normalização – outra forma de dedução da distribuição de Maxwell-Boltzmann [14] – pode ocorrer, de forma semelhante, para a distribuição de Maxwell-Jüttner [7]. No entanto, a utilização da energia cinética relativística, dada, segundo [6], por $E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1)$, nas exponenciais não alteraria a Equação (3.15), pois o novo termo exponencial ocorreria tanto no numerador quanto no denominador:

$$f_{MJ}(p) dp = \frac{4\pi p^2 e^{\left[\frac{-m_0 c^2}{kT} \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right) \right]}}{4\pi \int_0^{+\infty} p^2 e^{\left[\frac{-m_0 c^2}{kT} \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right) \right]}} dp \quad (3.16)$$

$$f_{MJ}(p)dp = \frac{4\pi p^2 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}\right)} e^{\left(\frac{m_0 c^2}{kT}\right)}}{4\pi \int_0^{+\infty} p^2 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}\right)} e^{\left(\frac{m_0 c^2}{kT}\right)} dp} dp. \quad (3.17)$$

Cancelando o termo $e^{\left(\frac{m_0 c^2}{kT}\right)}$, tem-se (3.15). Isso é relevante de ser ressaltado, pois [13] afirma somente que, para deduzir a distribuição de Maxwell-Jüttner, a energia relativística deve ser utilizada na expressão do fator de Boltzmann, sem mencionar se tratar apenas de sua parcela cinética ou de sua totalidade.

Para encontrar a distribuição de velocidades, há que se substituir a expressão do momento relativístico em função da velocidade, isto é, $p(v)$, bem como sua representação diferencial dp [7]:

$$p = m_0 v \gamma \quad (3.18)$$

$$dp = m_0 \gamma^3 dv \quad (3.19)$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \equiv \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.20)$$

Por questões de simplicidade na notação, $\gamma(v)$ e $\gamma(\beta)$ – a depender da variável adotada – serão escritos apenas como γ , sendo que

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (3.21)$$

A substituição das equações (3.18), (3.19) e (3.20) em (3.15) resulta na distribuição de velocidades de Maxwell-Jüttner exposta por [16] e [17]:

$$f_{MJ}(v)dv = \frac{4\pi m_0^3 v^2 \gamma^5 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \gamma\right)}}{4\pi m_0^3 \int_0^c v^2 \gamma^5 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \gamma\right)} dv} dv. \quad (3.22)$$

Note-se que o momento linear, dado por $p = m_0 v \gamma$, tende a infinito quando a velocidade tende a c , pois nessa situação o fator de Lorentz tende a

infinito. Por este motivo, o limite superior de integração da constante de normalização em (3.22) é c quando a variável da função é a velocidade.

O trabalho com a variável β seria, então, mais adequado neste aspecto, uma vez que quando a velocidade tende a c , β tende a 1, facilitando a análise gráfica e a relação entre as velocidades características como percentuais da velocidade da luz [5]. Dessa forma:

$$v = c\beta \quad (3.23)$$

$$dv = c d\beta. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.22) e retirando as constantes que ocorrem tanto no numerador como no denominador, tem-se:

$$f_{MJ}(\beta)d\beta = \frac{\beta^2 \gamma^5 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \gamma\right)}}{\int_0^1 \beta^2 \gamma^5 e^{\left(\frac{-m_0 c^2}{kT} \gamma\right)} d\beta} d\beta. \quad (3.25)$$

Denomina-se Z_{MJ} a constante de normalização que figura no denominador de (3.25) em função de β . Trata-se de uma integral que não possui solução analítica. Entretanto, [7] e [5] apontam para uma função modificada de Bessel de segunda espécie (há uma descrição da origem desse tipo de função no Apêndice F.1). Para encontrá-la, adota-se a proposta de substituição de variável de [18]:

$$\sinh(\theta) = \frac{p}{m_0 c}. \quad (3.26)$$

Como $\frac{p}{m_0 c} = \frac{v}{c} \gamma$, tem-se que

$$\sinh(\theta) = \beta \gamma \quad (3.27)$$

$$\cosh^2(\theta) - (\beta \gamma)^2 = 1 \quad (3.28)$$

$$\cosh(\theta) = \sqrt{1 + (\beta \gamma)^2} \quad (3.29)$$

$$\cosh(\theta) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.30)$$

$$\tanh(\theta) = \beta. \quad (3.31)$$

O elemento diferencial $d\beta$ em função de $d\theta$ é:

$$d\beta = \frac{d\theta}{\cosh^2(\theta)}. \quad (3.32)$$

Considerando apenas o denominador Z_{MJ} de (3.25) e substituindo as expressões subsequentes neste, tem-se

$$Z_{MJ} = \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \sinh^2(\theta) \cosh(\theta) d\theta, \quad (3.33)$$

sendo $\zeta = \frac{m_0 c^2}{kT}$ o parâmetro zeta, cuja análise será útil para determinar a necessidade de tratamento relativístico [19]. A mudança nos limites de integração baseia-se em (3.31), pois, se β tende a zero, $\tanh(\theta)$ e θ também o fazem, ao passo que, se β tende a 1, $\tanh(\theta)$ tende a 1, o que resulta na tendência de θ a infinito. Em atenção à Equação (3.33) e à dedução de trigonometria hiperbólica apresentada no Apêndice B, tem-se:

$$Z_{MJ} = \frac{1}{4} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \cosh(3\theta) d\theta - \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \cosh(\theta) d\theta \right). \quad (3.34)$$

O termo $K_\nu(\zeta)$ denota uma função modificada de Bessel de segunda espécie com parâmetros ν e ζ . Ela pode ser expressa na forma integral [20] por:

$$K_\nu(\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(t)} \cosh(\nu t) dt. \quad (3.35)$$

A partir de (3.35), expressa-se a constante de normalização Z_{MJ} como

$$Z_{MJ} = \frac{1}{4} [K_3(\zeta) - K_1(\zeta)]. \quad (3.36)$$

A multiplicação por 1/4 e a subtração entre as funções modificadas de Bessel de segunda espécie em (3.36) resulta em

$$Z_{MJ} = \frac{K_2(\zeta)}{\zeta}, \quad (3.37)$$

onde o numerador é função modificada de Bessel de segunda espécie e segunda ordem [5], cujo parâmetro variável é ζ , que, por sua vez, depende da temperatura e da massa das partículas. Tal resultado satisfaz a seguinte relação de recorrência [21]:

$$K_{v+1}(\zeta) - K_{v-1}(\zeta) = \left(\frac{2v}{\zeta}\right) K_v(\zeta). \quad (3.38)$$

Logo, tem-se que a distribuição de velocidades de Maxwell-Jüttner em função de β é dada por:

$$f_{MJ}(\beta)d\beta = \frac{\zeta\beta^2\gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{K_2(\zeta)} d\beta, \quad (3.39)$$

ou apenas

$$f_{MJ}(\beta) = \frac{\zeta\beta^2\gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{K_2(\zeta)}. \quad (3.40)$$

Observe-se que, para retornar à distribuição de Maxwell-Jüttner cuja variável é a velocidade, basta substituir β por v/c e $d\beta$ por dv/c em (3.39), o que resultaria em

$$f_{MJ}(v)dv = \frac{\zeta v^2 \gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{c^3 K_2(\zeta)} dv, \quad (3.41)$$

ou apenas

$$f_{MJ}(v) = \frac{\zeta v^2 \gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{c^3 K_2(\zeta)}. \quad (3.42)$$

Para efeito de comparação, entretanto, optou-se por utilizar a distribuição em função de β . Pode-se extrair informações estatísticas da Equação (3.39) a partir de integrações em relação a β de forma similar a feita no Capítulo 2 para a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

3.3 Valores Esperados

Os valores esperados e sua dedução para a distribuição de Maxwell-Boltzmann são encontrados com maior facilidade na literatura. Para a distribuição de Maxwell-Jüttner, contudo, não há tanto material disponível.

Apesar disso, entre as Referências, há estudos que tangenciam a pretensão deste tópico, que é encontrar, se possível, com base em $f_{MJ}(\beta)$ e em considerações estatísticas, soluções analíticas para o valor mais provável, o valor médio e o valor médio quadrático (que é o quadrado do valor rms) em relação à variável β .

[22] apresenta a expressão de $\langle \gamma \rangle$ para f_{MJ} em função do fator de Lorentz γ . Em [13], há ponderações acerca dos valores esperados de v , como seu valor mais provável e médio quadrático. Há, no entanto, algumas formulações e alguns significados que diferem das grandezas deduzidas a seguir.

O valor mais provável de β é obtido a partir da Equação (3.40). Derivando-a e igualando-a a zero, tem-se

$$\frac{\partial(f_{MJ}(\beta))}{\partial\beta} = 0 \quad (3.43)$$

$$\partial \left(\frac{\zeta \beta^2 \gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{K_2(\zeta)} \right) / \partial\beta = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left(\frac{\beta^2 e^{\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)}}{\sqrt{1-\beta^2}^5} \right)' = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left(\frac{e^{\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)} [\beta^2(1 - \zeta\sqrt{1-\beta^2}) - 3\beta^4 + 2]\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^9} \right) = 0, \quad (3.46)$$

ou apenas o numerador entre parênteses de (3.46):

$$e^{\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)} [\beta^2(1 - \zeta\sqrt{1-\beta^2}) - 3\beta^4 + 2]\beta = 0. \quad (3.47)$$

Para $\beta = 0$, a igualdade de (3.47) é válida. Se β tende a 1, o termo exponencial tende a zero, validando novamente a expressão. Logo, a análise pode se restringir ao termo

$$\beta^2(1 - \zeta\sqrt{1-\beta^2}) - 3\beta^4 + 2 = 0, \quad (3.48)$$

que pode ser simplificado, conforme desenvolvimento do Apêndice C[†]:

$$9\beta^6 + (\zeta^2 + 3)\beta^4 - 8\beta^2 - 4 = 0. \quad (3.49)$$

Entre as raízes da Equação (3.49), há uma entre zero e um cuja expressão é dada por

$$\beta_p = \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4}, \quad (3.50)$$

sendo β_p o valor mais provável de β . Cada σ_i é uma parte da Equação (3.50) interna ao radical. Optou-se por dividi-la dessa forma para melhor visualização e compreensão, sendo

$$\sigma_1 = -\frac{\zeta^2}{27} + \frac{\zeta^4}{27 \sqrt[3]{-\zeta^6 - 9\zeta^4 - 351\zeta^2 + 54\sqrt{3}\sqrt{-\zeta^6 - 13\zeta^4 - 375\zeta^2 + 3375}}},$$

[†]Em [13], p. 10, o termo independente da expressão da velocidade mais provável é positivo, resultando em uma equação diferente para tal grandeza e em velocidades diferentes para dados valores de ζ . Contudo, a dedução do Apêndice C e os resultados gráficos encontrados confirmam a Equação(3.49).

$$\sigma_2 = \frac{2\zeta^2}{9\sqrt[3]{-\zeta^6 - 9\zeta^4 - 351\zeta^2 + 54\sqrt{3}\sqrt{-\zeta^6 - 13\zeta^4 - 375\zeta^2 + 3375}}},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sqrt[3]{-\zeta^6 - 9\zeta^4 - 351\zeta^2 + 54\sqrt{3}\sqrt{-\zeta^6 - 13\zeta^4 - 375\zeta^2 + 3375}}}{27},$$

e

$$\sigma_4 = -\frac{1}{9} + \frac{25}{3\sqrt[3]{-\zeta^6 - 9\zeta^4 - 351\zeta^2 + 54\sqrt{3}\sqrt{-\zeta^6 - 13\zeta^4 - 375\zeta^2 + 3375}}}.$$

Calcula-se o valor médio a partir da seguinte integração:

$$\langle \beta \rangle = \int_0^1 \beta f_{MJ}(\beta) d\beta \quad (3.51)$$

$$\langle \beta \rangle = \int_0^1 \frac{\zeta \beta^3 \gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{K_2(\zeta)} d\beta \quad (3.52)$$

$$\langle \beta \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^1 \beta^3 \gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)} d\beta \quad (3.53)$$

$$\langle \beta \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^1 \frac{\beta^3 e\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{(\sqrt{1-\beta^2})^5} d\beta. \quad (3.54)$$

Aplicando a segunda integral do Apêndice A.2 em (3.54), tem-se

$$\langle \beta \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left(\frac{e\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\zeta} - \frac{\Gamma\left(3, \frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\zeta^3} \right) \Bigg|_0^1, \quad (3.55)$$

onde $\Gamma(a, b)$ designa uma função gama incompleta [23] nos moldes expostos no Apêndice D. Aplicando os limites de integração em (3.55), tem-se que

$$\langle \beta \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left(\frac{\Gamma(3, \zeta)}{\zeta^3} - \frac{e^{(-\zeta)}}{\zeta} \right). \quad (3.56)$$

O valor médio quadrático (que origina o valor *rms*) é dado por

$$\langle \beta^2 \rangle = \int_0^1 \beta^2 f_{MJ}(\beta) d\beta, \quad (3.57)$$

sendo

$$\beta_{rms} = \sqrt{\langle \beta^2 \rangle}. \quad (3.58)$$

Os softwares referenciados em [24] e [25] não retornaram solução analítica para a integral

$$\langle \beta^2 \rangle = \int_0^1 \frac{\zeta \beta^4 \gamma^5 e^{(-\zeta \gamma)} d\beta}{K_2(\zeta)}; \quad (3.59)$$

tal integração é feita apenas de forma numérica, o que traria a mesma limitação matemática para β_{rms} . É possível, no entanto, expressar $\langle \beta^2 \rangle$ a partir de funções matemáticas especiais que, em última análise, são séries de potências que entregam resultados a partir de resoluções numéricas. Utilizando a resolução exposta no Apêndice E, tem-se que

$$\langle \beta^2 \rangle = 1 - \frac{\zeta K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{\zeta \pi}{2K_2(\zeta)} [1 - \zeta K_0(\zeta) L_{-1}(\zeta) - \zeta K_1(\zeta) L_0(\zeta)], \quad (3.60)$$

onde $L_\nu(\zeta)$ são funções modificadas de Struve [26] cuja origem está descrita no Apêndice F.2. Logo,

$$\beta_{rms} = \sqrt{1 - \frac{\zeta K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{\zeta \pi}{2K_2(\zeta)} [1 - \zeta K_0(\zeta) L_{-1}(\zeta) - \zeta K_1(\zeta) L_0(\zeta)]}. \quad (3.61)$$

Capítulo 4

Comparações Entre as Distribuições de Velocidades

4.1 Introdução

As distribuições de velocidades apresentadas são utilizadas em situações específicas. Os fatores que determinam o tratamento clássico ou relativístico são a massa de repouso das partículas e, considerando que tais distribuições baseiam-se no equilíbrio térmico, a temperatura do sistema.

O parâmetro zeta contém tais variáveis de interesse:

$$\zeta = \frac{m_0 c^2}{kT}. \quad (4.1)$$

A análise desta medida é essencial para determinar se um sistema será tratado de forma clássica ou relativística. Quando ζ tende a valores muito grandes, o tratamento não relativístico é o indicado. Regimes ultra-relativísticos ocorrem quando ζ tende a zero [19].

De acordo com [27], p. 20, ζ é a “razão entre a energia de repouso e a energia térmica de uma partícula”. Para corpúsculos de mesma massa, a temperatura absoluta é o fator determinante do regime do sistema. As distribuições expostas, no entanto, devem se submeter à mesma variável para possibilitar a comparação.

4.2 Desenvolvimento Teórico

Considerando regimes relativísticos e a concentração dos gráficos em abscissas com intervalos válidos de 0 e 1, a opção pelas variáveis β e ζ é a mais correta. De acordo com a dedução exposta no Apêndice G, a distribuição de Maxwell-Boltzmann em termos de β e de ζ possui a seguinte configuração:

$$f_{MB}(\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \beta^2 e^{-\frac{\zeta \beta^2}{2}}. \quad (4.2)$$

A distribuição de Maxwell-Jüttner, dada por

$$f_{MJ}(\beta) = \frac{\zeta \beta^2 \gamma^5 e^{(-\zeta \gamma)}}{K_2(\zeta)}, \quad (4.3)$$

possui, segundo [27], a seguinte característica: no limite de baixas velocidades ($v \ll c$ e, conseqüentemente, $v/c \ll 1$), $f_{MJ}(\beta)$ tende à distribuição de Maxwell-Boltzmann. Nessa situação:

$$K_2(\zeta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} e^{-\zeta} \quad (4.4)$$

$$(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} \quad (4.5)$$

$$f_{MJ}(\beta) \approx \zeta \beta^2 \gamma^5 e^{(-\zeta \gamma)} \sqrt{\frac{2\zeta}{\pi}} e^{\zeta} \quad (4.6)$$

$$f_{MJ}(\beta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \beta^2 \left(1 + \frac{5}{2} \beta^2\right) e^{-\zeta \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)} e^{\zeta} \quad (4.7)$$

$$f_{MJ}(\beta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \beta^2 \left(1 + \frac{5}{2} \beta^2\right) e^{-\frac{\zeta \beta^2}{2}}. \quad (4.8)$$

Considerando válida a aproximação

$$1 + \frac{5}{2} \beta^2 \approx 1, \quad (4.9)$$

tem-se

$$f_{MJ}(\beta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \beta^2 e^{-\frac{\zeta \beta^2}{2}} \quad (4.10)$$

$$f_{MJ}(\beta) \approx f_{MB}(\beta). \quad (4.11)$$

Conforme [19], tal limite ocorre quando $\zeta \gg 0$. A partir disso, analisaram-se as distribuições para valores de temperatura que ocorrem na Natureza e em estudos de determinados ramos da Física. Há exemplos na Astrofísica e na Física de Plasma de fenômenos de altas energias e temperaturas.

A temperatura da superfície do Sol, segundo [28], é de cerca de 5800K. Para prótons (íons de hidrogênio), de massa individual de repouso $1,6726 \times 10^{-27}$ kg, tem-se que $\zeta = 1877286314,3168$ ou $1,8773 \times 10^9$, uma quantidade muito grande. Trata-se, nesse caso, de regime clássico, no qual as distribuições praticamente coincidem.

Figura 4.1– Distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para prótons à temperatura da superfície do Sol.

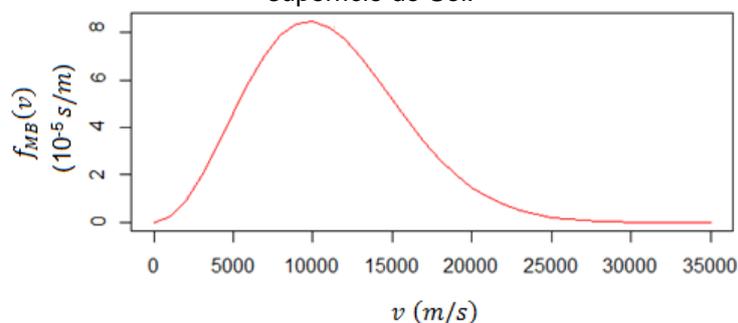
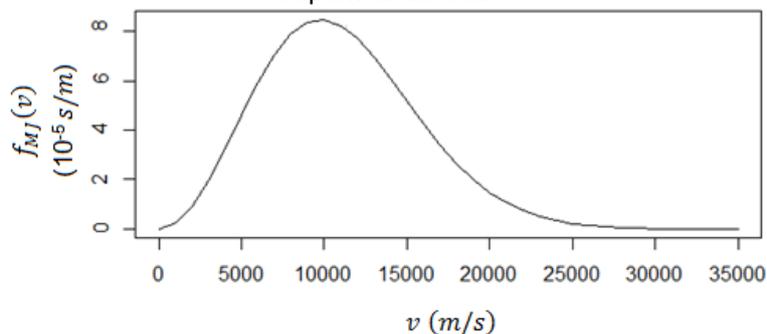


Figura 4.2– Distribuição de velocidades de Maxwell-Jüttner para prótons à temperatura da superfície do Sol.



Ressalte-se que a utilização das distribuições em função da velocidade se deu para que a análise gráfica fosse facilitada, pois se β fosse a escolhida, os gráficos de abscissas entre 0 e 1 teriam velocidades esperadas muito próximas de zero e picos muito achatados horizontalmente.

Os valores esperados apresentaram-se praticamente idênticos em magnitude e em localização gráfica:

Figura 4.3– Distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann para prótons à temperatura da superfície do Sol: Valores esperados.

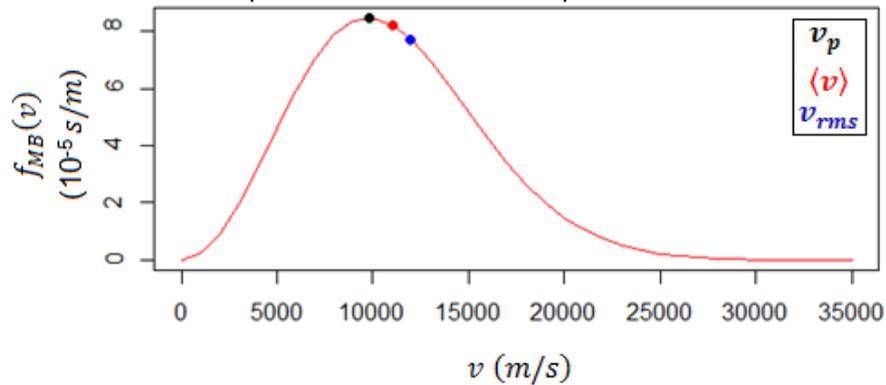
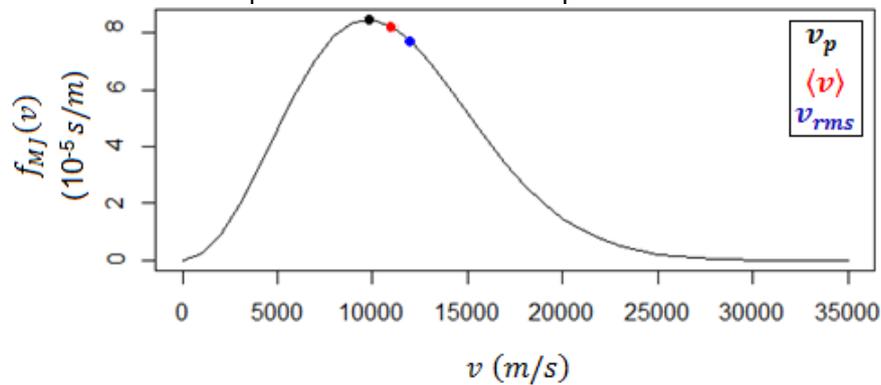


Figura 4.4– Distribuição de velocidades de Maxwell-Jüttner para prótons à temperatura da superfície do Sol: Valores esperados.



A distribuição de Maxwell-Jüttner foi plotada e os valores esperados calculados a partir da Equação (4.12) abaixo[‡], pois os softwares referenciados em [24] e [25] – de cálculo – e o programa RStudio – de cálculo e de plotagem – não conseguiram processar a Equação (3.42) com ζ muito grande:

$$f_{MJ}(v)dv \approx \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{5}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^4 \right] e^{-\frac{\zeta v^2}{2c^2}} dv . \quad (4.12)$$

Trata-se da Equação (4.8) em função da velocidade.

Os valores esperados das duas distribuições resultaram em:

Tabela 4.1 – Valores esperados para $T = 5800$ K.

| |
|--------------------------------------|
| $v_p = 9785,1364$ m/s |
| $\langle v \rangle = 11041,3441$ m/s |
| $v_{rms} = 11984,2956$ m/s |

[‡]A Equação (4.12) é uma aproximação não normalizada.

O próximo valor de ζ utilizado relaciona-se à temperatura ideal para ocorrência de fusão nuclear auto-sustentável. De acordo com [29], a fusão nuclear controlada pode produzir muita energia. Esse processo necessita de altas temperaturas para que o potencial elétrico de repulsão entre os prótons dos núcleos atômicos seja superado pela energia cinética destes. Trata-se de temperaturas capazes de ionizar completamente os átomos envolvidos, resultando em plasma de núcleos e elétrons.

Para enfrentar menos repulsão e despendar menos energia, utilizam-se elementos com poucos prótons no núcleo, como os isótopos do hidrogênio denominados deutério e trítio, os quais contêm, respectivamente, um próton e um nêutron; e um próton e dois nêutrons em seus núcleos [30].

As reações D-D (deutério-deutério) e D-T (deutério-trítio) são bastante promissoras no que tange à relação entre o gasto energético para a ocorrência da fusão e a produção de energia neste processo. Considerando as variáveis temperatura, densidade e tempo de confinamento, o físico John D. Lawson publicou, em 1957, uma medida para que a energia produzida no processo de fusão superasse as perdas por radiação e mantivesse o aquecimento do plasma a fim de observar a auto-sustentabilidade da reação [29].

Tal medida denomina-se critério de Lawson. [31] afirma que o produto entre a densidade n do plasma e o tempo de confinamento τ daquele deve ser, para a reação D-T, $n\tau > 10^{20} \text{ s/m}^3$, com temperaturas da ordem de 10^7 K e, para a reação D-D, $n\tau > 10^{22} \text{ s/m}^3$, com temperaturas da ordem de 10^8 K .

Considerando um plasma de dêuterons e elétrons de reações D-D, [29] estima, a partir do critério de Lawson, de perdas energéticas por radiação e de taxas de fusão volumétricas, que a temperatura mínima para que ocorra fusão nuclear é de $1,5 \times 10^8 \text{ K}$. A tabela a seguir apresenta o parâmetro ζ das partículas envolvidas.

Tabela 4.2 – Parâmetro ζ (reação D-D).

| | Massa (kg) | Temperatura (K) | ζ |
|----------|--------------------------|-------------------|----------------------|
| Dêuteron | $3,3436 \times 10^{-27}$ | $1,5 \times 10^8$ | $1,4511 \times 10^5$ |
| Elétron | $9,1094 \times 10^{-31}$ | $1,5 \times 10^8$ | 39,5335 |

Observa-se que o parâmetro ζ para o dêuteron tem valor muito alto, o que indica um regime não-relativístico de velocidade das partículas. Já em relação aos elétrons, [5] expõe que, a depender da temperatura do plasma,

podem alcançar velocidades percentualmente consideráveis em relação a c . Apresentam-se, a seguir, os gráficos das distribuições de Maxwell-Boltzmann e de Maxwell-Jüttner relativos ao valor de ζ encontrado em função de β .

Figura 4.5– Plotagem das distribuições para elétrons com $\zeta = 39,5335$.

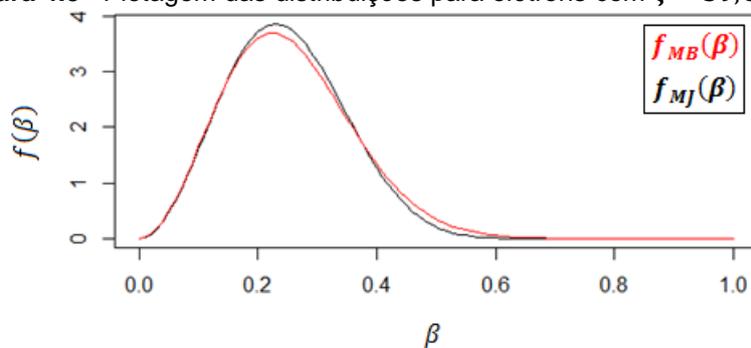


Figura 4.6– Distribuição de Maxwell-Boltzmann para elétrons à temperatura do critério de Lawson com os valores esperados.

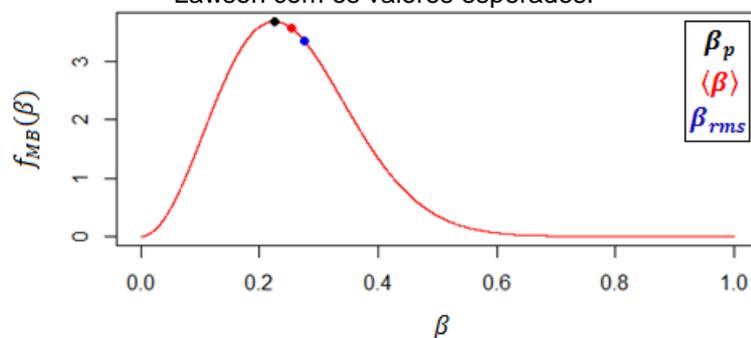


Tabela 4.3– Valores esperados (MB) para $\zeta = 39,5335$.

| |
|----------------------------------|
| $\beta_p = 0,2249$ |
| $\langle \beta \rangle = 0,2538$ |
| $\beta_{rms} = 0,2755$ |

Figura 4.7– Distribuição de Maxwell-Jüttner para elétrons à temperatura do critério de Lawson com os valores esperados.

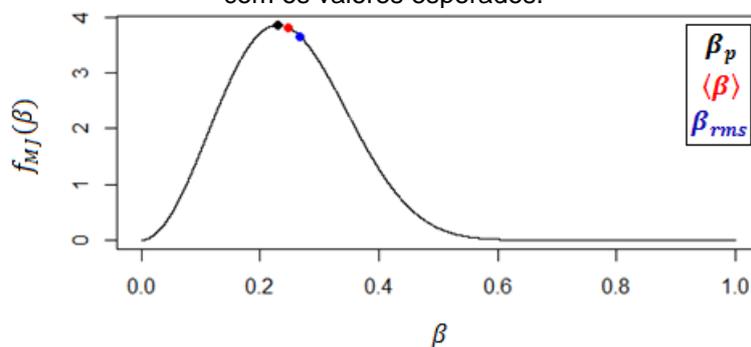
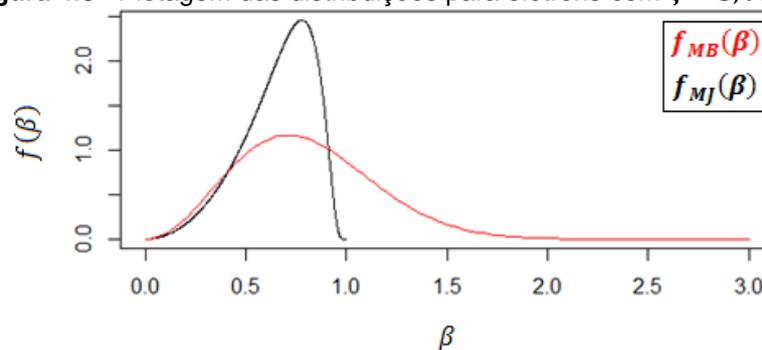


Tabela 4.4– Valores esperados (MJ) para $\zeta = 39,5335$.

| |
|----------------------------------|
| $\beta_p = 0,2305$ |
| $\langle \beta \rangle = 0,2483$ |
| $\beta_{rms} = 0,2672$ |

O aumento da temperatura poderia, segundo [32], fazer cessar a fusão nuclear auto-sustentada de D-D. O autor pontua que temperaturas da ordem de 10^9K resultariam em perdas energéticas similares à energia produzida. Os elétrons de uma reação D-D a temperatura de dez vezes o valor utilizado acima, isto é, $1,5 \times 10^9\text{K}$, apresentariam ζ dez vezes menor, ou seja, $\zeta = 3,9533$. Os gráficos abaixo expõem uma diferença maior entre as curvas das distribuições e os valores esperados de β .

Figura 4.8– Plotagem das distribuições para elétrons com $\zeta = 3,9533$.

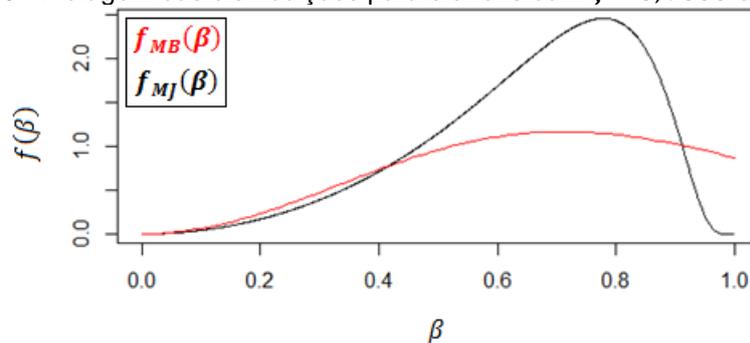


Quanto à distribuição de Maxwell-Boltzmann, os valores de β maiores ou iguais a 1 não possuem sentido físico. Levando isso em consideração, o percentual de observações perdido com a utilização desta distribuição para $\zeta = 39,5335$ é de $1,3379 \times 10^{-8}$. Já para ζ dez vezes menor, a perda é superior a um quarto, pois:

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (3,9533)^{\frac{3}{2}} \beta^2 e^{-\frac{3,9533\beta^2}{2}} d\beta = 0,2665. \quad (4.13)$$

Tal perda fica mais clara quando se limita a abscissa β a 1:

Figura 4.9– Plotagem das distribuições para elétrons com $\zeta = 3,9533$ e $0 < \beta < 1$.



Observa-se que a curva da distribuição de Maxwell-Boltzmann continua a ter um crescimento quadrático e um decrescimento exponencial [11], independente do valor de ζ . A média $\langle\beta\rangle$ dessa distribuição é sempre maior que sua moda β_p , o que lhe atribui assimetria positiva ou à direita [33], pois $\langle\beta\rangle - \beta_p > 0$.

Figura 4.10– Distribuição de Maxwell-Boltzmann para elétrons com $\zeta = 3,9533$ e valores esperados.

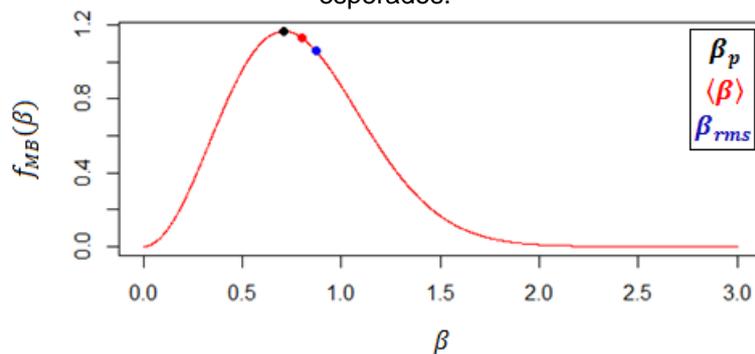


Figura 4.11– Área perdida (em cinza) pelo uso da Distribuição de Maxwell-Boltzmann: $\zeta = 3,9533$.

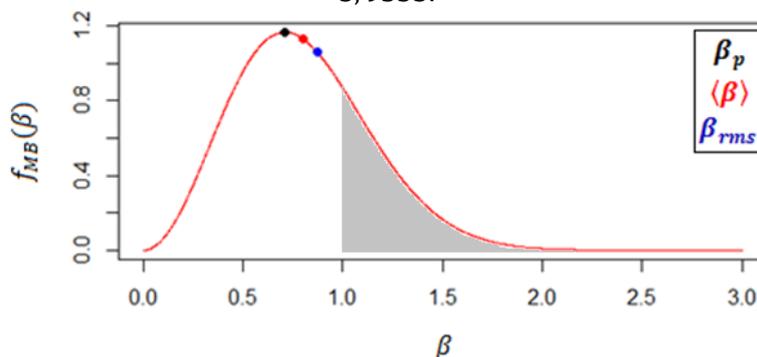


Tabela 4.5– Valores esperados (MB) para $\zeta = 3,9533$.

| |
|--------------------------------|
| $\beta_p = 0,7113$ |
| $\langle\beta\rangle = 0,8026$ |
| $\beta_{rms} = 0,8711$ |

A distribuição de Maxwell-Jüttner, contudo, não mantém o mesmo formato para valores de ζ próximos de 1. Observam-se características gráficas e de valores esperados apresentadas por distribuições assimétricas à esquerda [33], como o valor da moda β_p maior que o da média $\langle\beta\rangle$ e $\langle\beta\rangle - \beta_p < 0$:

Figura 4.12– Distribuição de Maxwell-Jüttner para $\zeta = 3,9533$ e $\beta < 1$.

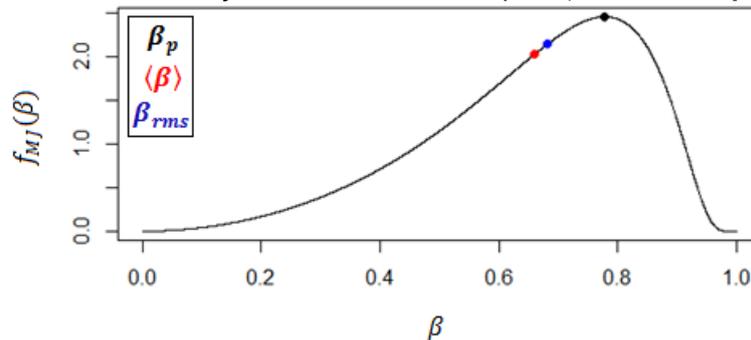


Tabela 4.6– Valores esperados (MJ) para $\zeta = 3,9533$.

| |
|----------------------------------|
| $\langle \beta \rangle = 0,6604$ |
| $\beta_{rms} = 0,6828$ |
| $\beta_p = 0,7786$ |

A partir da Tabela 4.2, observa-se que, para uma dada temperatura, o valor do parâmetro ζ varia a depender da massa das partículas envolvidas. Partículas massivas como prótons precisariam de temperaturas bem maiores que as dos elétrons do plasma de fusão nuclear para que o valor de ζ se aproximasse de 1.

De acordo com [34], existem objetos astrofísicos muito distantes da Terra e altamente luminosos denominados quasares. Eles se localizam nos centros de algumas galáxias e são compostos por um buraco negro e uma imensa nuvem de gás que o orbita. A atração gravitacional do buraco negro faz com que o gás seja sugado e, nesse processo, as partículas do gás atingem altíssimas temperaturas e velocidades.

Entre os quasares conhecidos, o 3C 273 é o que possui maior luminosidade. Em razão disso, é um dos mais estudados. Há pesquisas que estimam que este objeto pode apresentar temperaturas da ordem de 10^{13} K [35]. Tal quantidade pode provocar velocidades muito altas dos átomos e dos íons que compõem o gás no entorno do buraco negro.

Prótons à temperatura $T = 10^{13}$ K possuem $\zeta = 1,0888$. As distribuições de velocidades relativas a tais parâmetros têm a seguinte configuração:

Figura 4.13– Comparativo entre as distribuições com $\zeta = 1,0888$.

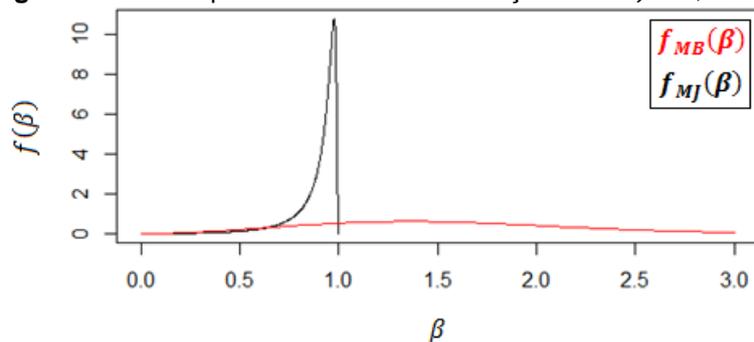
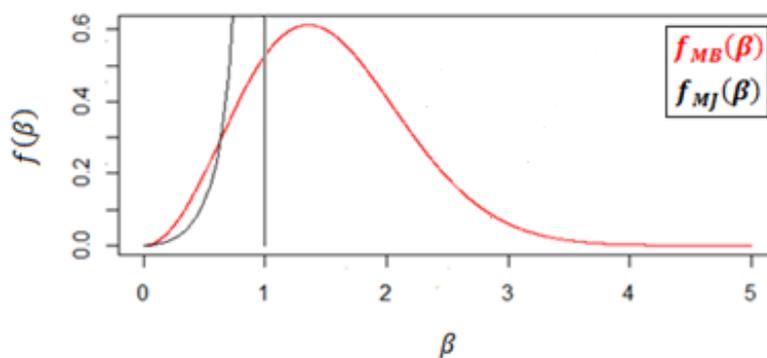


Figura 4.14– Comparativo entre as distribuições com $\zeta = 1,0888$ e ênfase na distribuição de Maxwell-Boltzmann.



Todos os valores esperados da distribuição de Maxwell-Boltzmann para prótons à temperatura do quasar 3C 273 não possuem sentido físico, pois o pico do gráfico da figura abaixo ocorre em $\beta > 1$:

Figura 4.15– Distribuição de Maxwell-Boltzmann para $\zeta = 1,0888$.

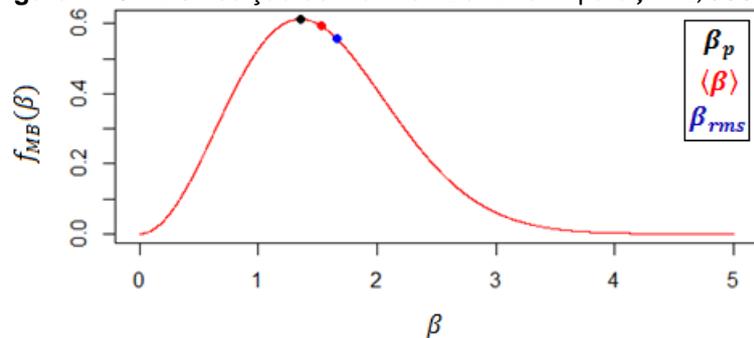


Tabela 4.7– Valores esperados (MB) para $\zeta = 1,0888$.

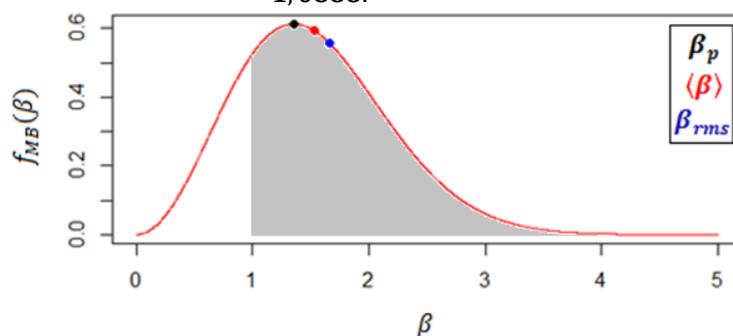
| |
|----------------------------------|
| $\beta_p = 1,3553$ |
| $\langle \beta \rangle = 1,5293$ |
| $\beta_{rms} = 1,6599$ |

As observações perdidas pela utilização da distribuição de Maxwell-Boltzmann com um parâmetro ζ tão pequeno, indicativo de um regime relativístico, seriam superiores a três quartos do total:

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1,0888)^{\frac{3}{2}} \beta^2 e^{-\frac{1,0888\beta^2}{2}} d\beta = 0,7798. \quad (4.14)$$

Este percentual perdido corresponde à área em cinza do seguinte gráfico:

Figura 4.16– Área perdida (em cinza) pelo uso da Distribuição de Maxwell-Boltzmann: $\zeta = 1,0888$.



A distribuição de Maxwell-Jüttner de prótons à temperatura do quasar 3C 273 teria a curva e os valores esperados que se seguem:

Figura 4.17– Distribuição de Maxwell-Jüttner para prótons à temperatura do quasar 3C 273.

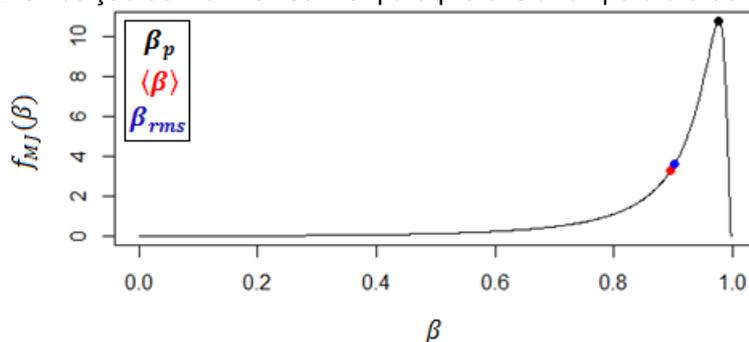


Tabela 4.8– Valores esperados (MJ) para $\zeta = 1,0888$.

| |
|----------------------------------|
| $\langle \beta \rangle = 0,8953$ |
| $\beta_{rms} = 0,9024$ |
| $\beta_p = 0,9769$ |

Considerando apenas as distribuições cujos valores de ζ utilizados possibilitaram sua distinção, pode-se comparar percentualmente os valores esperados:

Tabela 4.9– Diferença percentual entre os valores esperados.

| ζ | Medidas | Maxwell-Boltzmann | Maxwell-Jüttner | Diferença (%) |
|---------|-----------------------|-------------------|-----------------|---------------|
| 39,5335 | β_p | 0,2249 | 0,2305 | 2,43 |
| | $\langle\beta\rangle$ | 0,2538 | 0,2483 | 2,17 |
| | β_{rms} | 0,2755 | 0,2672 | 3,01 |
| 3,9533 | β_p | 0,7113 | 0,7786 | 8,64 |
| | $\langle\beta\rangle$ | 0,8026 | 0,6604 | 17,72 |
| | β_{rms} | 0,8711 | 0,6828 | 21,62 |
| 1,0888 | β_p | 1,3553 | 0,9769 | 27,92 |
| | $\langle\beta\rangle$ | 1,5293 | 0,8953 | 41,46 |
| | β_{rms} | 1,6599 | 0,9024 | 45,64 |

Observa-se que a semelhança entre as curvas das distribuições com $\zeta = 39,5335$ traduz-se na proximidade entre os valores esperados e no reduzido erro percentual, o que não ocorre quando aquele parâmetro aproxima-se da unidade.

Algumas considerações sobre a velocidade média quadrática relativística $\langle\beta^2\rangle$ são feitas por [13] e por [22]. Segundo [13], p. 10-11 (tradução nossa),

Pode parecer que seria suficiente tomar o valor médio relativístico de v^2 para obter uma definição coerente para a velocidade térmica (...). No entanto, tal definição não envolve o conteúdo de energia usual incluído na definição clássica; isso ocorre devido à relação diferente entre energia e velocidade. ([13], p. 10-11, tradução nossa).

A proposta de [13] envolve considerar o conceito de energia média que, em um regime relativístico, é

$$\langle E \rangle = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \langle \beta_{th}^2 \rangle}} \quad (4.15)$$

$$\langle \beta_{th}^2 \rangle = \frac{\langle E \rangle^2 - (m_0 c^2)^2}{\langle E \rangle^2}, \quad (4.16)$$

onde $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ designa a velocidade térmica. Calcula-se $\langle E \rangle$, de acordo com [13], através do tensor de energia-momento. Disso resulta que

$$\langle \beta_{th}^2 \rangle = 1 - \left(\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta} \right)^{-2}. \quad (4.17)$$

É possível, contudo, encontrar tal resultado sem a utilização de cálculo tensorial. [22] apresenta o fator de Lorentz médio $\langle \gamma \rangle$ extraído da distribuição de Maxwell-Jüttner:

$$\langle \gamma \rangle = \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta}. \quad (4.18)$$

A partir da igualdade

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle \beta_{th}^2 \rangle}} = \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta}, \quad (4.19)$$

chega-se à Equação (4.17). Portanto, para encontrar $\langle \beta_{th}^2 \rangle$, basta tomar a distribuição de Maxwell-Jüttner em função de γ e calcular seu valor médio, conforme exposto no Apêndice H.

Utilizando os valores de ζ da Tabela 4.9, é possível comparar os parâmetros médios quadráticos com $\langle \beta_{th}^2 \rangle$:

Tabela 4.10– Diferença entre $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ e $\langle \beta^2 \rangle_{MB}$.

| ζ | $\langle \beta^2 \rangle_{MB}$ | $\langle \beta_{th}^2 \rangle_{MJ}$ | Diferença (%) |
|---------|--------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| 39,5335 | 0,0759 | 0,0739 | 2,63 |
| 3,9533 | 0,7589 | 0,5396 | 28,90 |
| 1,0888 | 2,7553 | 0,8990 | 67,37 |

Tabela 4.11– Diferença entre $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ e $\langle \beta^2 \rangle_{MJ}$.

| ζ | $\langle \beta^2 \rangle_{MJ}$ | $\langle \beta_{th}^2 \rangle_{MJ}$ | Diferença (%) |
|---------|--------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| 39,5335 | 0,0714 | 0,0739 | 3,38 |
| 3,9533 | 0,4662 | 0,5396 | 13,60 |
| 1,0888 | 0,8143 | 0,8990 | 9,42 |

Observa-se que a distribuição de Maxwell-Boltzmann apresenta apenas um valor de velocidade média quadrática, apesar da diferença entre as deduções de (1.34) e (2.67) – resultados iguais. A distribuição de Maxwell-Jüttner, contudo, possui $\langle \beta^2 \rangle \neq \langle \beta_{th}^2 \rangle$, sendo uma calculada através de procedimentos estatísticos de integração e a outra encontrada a partir da energia média relativística. A comparação entre $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ e $\langle \beta^2 \rangle$ difere para cada distribuição de velocidades, pois para todos os valores de ζ utilizados, $\langle \beta_{th}^2 \rangle_{MJ} < \langle \beta^2 \rangle_{MB}$ e $\langle \beta_{th}^2 \rangle_{MJ} > \langle \beta^2 \rangle_{MJ}$.

Considerações Finais

O estudo das distribuições de velocidades e a aplicação destas a sistemas simples, nos quais apenas a massa das partículas e a temperatura definem a estatística das velocidades corpusculares, demonstraram que a opção pela distribuição depende do regime com o qual se trabalha. Este, por sua vez, é definido pelo valor do parâmetro ζ , que combina os valores de massa corpuscular e de temperatura.

Observou-se que, apesar dos softwares utilizados não conseguirem computar valores muito grandes de ζ para a distribuição de Maxwell-Jüttner, tal estatística tende para a distribuição de Maxwell-Boltzmann nesta situação. É possível, portanto, utilizar aquela distribuição relativística de velocidades em sistemas físicos, qualquer que seja o regime.

A adoção da estatística de Maxwell-Boltzmann em sistemas nos quais ζ tende a valores baixos, no entanto, mostrou-se inadequada em razão da perda de observações. Apesar dessa limitação, a dedução físico-matemática de entendimento mais acessível e a concordância com os resultados experimentais explicam o predomínio de sua utilização em regimes clássicos.

Em relação à distribuição de Maxwell-Jüttner, a diferença entre $\langle \beta^2 \rangle$ – resultado calculado a partir da Estatística – e $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ – valor médio embasado em conceitos físicos – é um aspecto que a distribuição de Maxwell-Boltzmann não possui.

A desconsideração de efeitos magnéticos e quânticos dos sistemas nos quais foram aplicadas as distribuições (Sol, fusão nuclear controlada e Quasar 3C 273) pode ser apontada como uma das perspectivas desta pesquisa e, ao mesmo tempo, como uma oportunidade de novos estudos, pois, conforme [13], há estatísticas que consideram tais efeitos.

O desenvolvimento estatístico de parâmetros como variância, desvio padrão, entre outras medidas relativas às distribuições também é uma vertente de pesquisa a se explorar. Há, portanto, a partir deste estudo, tópicos que podem ser estudados futuramente, não se limitando aos supracitados.

Apêndices

A. Tabela de Integrais (Fonte: Software Referenciado em [25])

A.1 Capítulo 2

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a(r^2)} r dr d\theta = \frac{\pi}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a^3}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a^3}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\sqrt{a^5}}$$

A.2 Capítulo 3

$$\int \frac{x^3 e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}{\sqrt{1-x^2}^5} dx = \frac{(2a\sqrt{1-x^2} + (a^2 - 2)x^2 + 2)e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}{a^3(x^2 - 1)} + C$$

$$\int \frac{x^3 e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}{\sqrt{1-x^2}^5} dx = \frac{e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}{a} - \frac{\Gamma\left(3, \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{a^3} + C$$

B. Dedução da Relação Trigonométrica Hiperbólica (Capítulo 3)

A igualdade

$$\sinh^2(x)\cosh(x) = \left(\frac{1}{4}\right) [\cosh(3x) - \cosh(x)]$$

pode ser encontrada a partir dos passos a seguir.

Deduz-se, com base na relação fundamental da trigonometria hiperbólica, dada por

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad (\text{B. 1})$$

que

$$\sinh^2(x)\cosh(x) = \cosh^3(x) - \cosh(x). \quad (\text{B. 2})$$

Além disso,

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \quad (\text{B. 3})$$

$$\cosh(2x)\cosh(x) = \cosh^3(x) + \sinh^2(x)\cosh(x) \quad (\text{B. 4})$$

$$\cosh(2x)\cosh(x) - \sinh^2(x)\cosh(x) = \cosh^3(x). \quad (\text{B. 5})$$

Outra relação trigonométrica útil é

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \quad (\text{B. 6})$$

$$\sinh(2x)\sinh(x) = 2\sinh^2(x)\cosh(x) \quad (\text{B. 7})$$

$$\frac{\sinh(2x)\sinh(x)}{2} = \sinh^2(x)\cosh(x). \quad (\text{B. 8})$$

Subtraindo (B. 2) de (B. 5):

$$\cosh(2x) \cosh(x) - 2\sinh^2(x)\cosh(x) = \cosh(x)$$

$$2\sinh^2(x) \cosh(x) = \cosh(2x) \cosh(x) - \cosh(x). \quad (\text{B. 9})$$

Introduzindo (B. 8) em (B. 9):

$$2 \left(\frac{\sinh(2x)\sinh(x)}{2} \right) = \cosh(2x) \cosh(x) - \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) \cosh(x) - \sinh(2x)\sinh(x) - \cosh(x) = 0. \quad (\text{B. 10})$$

Adicionando o termo $2\sinh(2x)\sinh(x)$ em ambos os lados de (B. 10):

$$\cosh(2x) \cosh(x) + \sinh(2x)\sinh(x) - \cosh(x) = 2\sinh(2x)\sinh(x). \quad (\text{B. 11})$$

Substituindo a relação seguinte

$$\cosh(3x) = \cosh(2x) \cosh(x) + \sinh(2x)\sinh(x)$$

em (B. 11), tem-se

$$\cosh(3x) - \cosh(x) = 2\sinh(2x)\sinh(x) \quad (\text{B. 12})$$

Introduzindo(B. 7) em(B. 12):

$$\cosh(3x) - \cosh(x) = 2[2\sinh^2(x)\cosh(x)]$$

$$4\sinh^2(x)\cosh(x) = \cosh(3x) - \cosh(x)$$

$$\sinh^2(x)\cosh(x) = \left(\frac{1}{4}\right) [\cosh(3x) - \cosh(x)] \quad (\text{B. 13})$$

C. Passagens Matemáticas da Expressão de β_p (Capítulo 3)

A derivação da distribuição de Maxwell-Jüttner e sua igualdade a zero resulta em 3.48:

$$\beta^2 (1 - \zeta \sqrt{1 - \beta^2}) - 3\beta^4 + 2 = 0$$

Expandindo seus termos, tem-se

$$-3\beta^4 + 2 + \beta^2 - \beta^2 \zeta \sqrt{1 - \beta^2} = 0$$

Multiplica-se a expressão pela seguinte fração a fim de gerar um produto da diferença pela soma e, com isso, tirar todas as raízes quadradas do numerador:

$$\left(-3\beta^4 + 2 + \beta^2 - \beta^2 \zeta \sqrt{1 - \beta^2}\right) \left(\frac{-3\beta^4 + 2 + \beta^2 + \beta^2 \zeta \sqrt{1 - \beta^2}}{-3\beta^4 + 2 + \beta^2 + \beta^2 \zeta \sqrt{1 - \beta^2}}\right) = 0$$

$$9\beta^8 + (\zeta^2 - 6)\beta^6 - (\zeta^2 + 11)\beta^4 + 4\beta^2 + 4 = 0$$

Tanto 1 quando -1 são raízes desta equação. Logo, pode-se reduzi-la a um polinômio de grau 6 – mesmo grau do polinômio exposto por [13] por meio do qual se encontra o valor mais provável do percentual β de velocidade em relação a c . Assim:

$$(\beta - 1)(\beta + 1)[9\beta^6 + (\zeta^2 + 3)\beta^4 - 8\beta^2 - 4] = 0$$

Busca-se valores de β entre 0 e 1. Logo:

$$9\beta^6 + (\zeta^2 + 3)\beta^4 - 8\beta^2 - 4 = 0.$$

D. Função Gama Incompleta (Capítulo 3)

De acordo com [23], a função gama incompleta é dada pela integral

$$\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

No Capítulo 3, para o cálculo de $\langle \beta \rangle$, tem-se $a = 3$:

$$\Gamma(3, b) = \int_b^{\infty} t^2 e^{-t} dt.$$

Tal integral possui a solução analítica

$$\Gamma(3, b) = \frac{e^{-b}(b^3 + 2b^2 + 2b)}{b}.$$

Tomando $b = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e aplicando os limites de integração da variável β na Equação (3.55):

$$\Gamma\left(3, \frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \Big|_0^1 = \lim_{\beta \rightarrow 1} \Gamma\left(3, \frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \Gamma(3, \zeta).$$

Quando β tende a 1, $\sqrt{1-\beta^2}$ tende a 0 e $\frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ tende a infinito. Em tal situação,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma(3, b) = 0.$$

Portanto:

$$\Gamma\left(3, \frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \Big|_0^1 = -\Gamma(3, \zeta).$$

E. Cálculo de $\langle \beta^2 \rangle$ (Capítulo 3)

A integral

$$\langle \beta^2 \rangle = \int_0^1 \frac{\zeta \beta^4 \gamma^5 e^{(-\zeta \gamma)} d\beta}{K_2(\zeta)}$$

não possui solução tabelada. Busca-se, a partir deste fato, encontrar uma expressão que dependa de funções matemáticas especiais, mesmo que sejam dadas por operações com séries de potências.

Fazendo a mesma transformação de variável proposta por [18] e exposta no Capítulo 3:

$$\sinh(\theta) = \beta \gamma$$

$$\cosh^2(\theta) - (\beta \gamma)^2 = 1$$

$$\cosh(\theta) = \sqrt{1 + (\beta \gamma)^2}$$

$$\cosh(\theta) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\tanh(\theta) = \beta$$

$$d\beta = \frac{d\theta}{\cosh^2(\theta)}.$$

Expressando $\langle \beta^2 \rangle$ em função de θ :

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \sinh^3(\theta) \tanh(\theta) d\theta.$$

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \sinh^2(\theta) \tanh^2(\theta) \cosh(\theta) d\theta .$$

Aplicando a igualdade $\sinh^2(\theta) \tanh^2(\theta) = \sinh^2(\theta) - \tanh^2(\theta)$:

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \cosh(\theta) [\sinh^2(\theta) - \tanh^2(\theta)] d\theta$$

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^{+\infty} [e^{-\zeta \cosh(\theta)} \sinh^2(\theta) \cosh(\theta) - e^{-\zeta \cosh(\theta)} \tanh^2(\theta) \cosh(\theta)] d\theta .$$

Conforme demonstrado no Capítulo 3,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \sinh^2(\theta) \cosh(\theta) d\theta = \frac{K_2(\zeta)}{\zeta};$$

Como $\tanh^2(\theta) = 1 - \operatorname{sech}^2(\theta)$, tem-se

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left[\frac{K_2(\zeta)}{\zeta} - \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \cosh(\theta) d\theta + \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta \right].$$

Como

$$K_\nu(\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(t)} \cosh(\nu t) dt,$$

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left[\frac{K_2(\zeta)}{\zeta} - K_1(\zeta) + \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta \right].$$

A integral restante pode ser resolvida por derivação sob o sinal de integral [36] para uma variável α tal que

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta$$

$$\frac{d(f(\alpha))}{d\alpha} = f'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \zeta e^{-\alpha\zeta \cosh(\theta)} \cosh(\theta) \operatorname{sech}(\theta) d\theta$$

$$f'(\alpha) = -\zeta \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\zeta \cosh(\theta)} d\theta$$

$$f'(\alpha) = -\zeta K_0(\alpha\zeta)$$

$$f(\alpha) = -\zeta \int K_0(\alpha\zeta) d\alpha .$$

O resultado desta integral é, de acordo com a resposta do software referenciado em [24]:

$$f(\alpha) = -\frac{\pi\zeta\alpha}{2} [L_{-1}(\zeta\alpha)K_0(\zeta\alpha) + L_0(\zeta\alpha)K_1(\zeta\alpha)] + C,$$

onde $L_\nu(z)$ são funções modificadas de Struve de ordem ν [26]. Logo,

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta = -\frac{\pi\zeta\alpha}{2} [L_{-1}(\zeta\alpha)K_0(\zeta\alpha) + L_0(\zeta\alpha)K_1(\zeta\alpha)] + C .$$

Para determinar a constante C , o caminho mais simples seria fazer $\alpha = 0$. Para a expressão

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta ,$$

tal substituição não acarretaria inconsistências, pois

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sech}(\theta) d\theta$$

$$f(0) = 2 \arctan \left[\tanh \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

No entanto, a expressão

$$f(\alpha) = -\frac{\pi \zeta \alpha}{2} [L_{-1}(\zeta \alpha) K_0(\zeta \alpha) + L_0(\zeta \alpha) K_1(\zeta \alpha)] + C$$

apresentaria indeterminações, pois ocorreriam os produtos $L_{-1}(\zeta \alpha) K_0(\zeta \alpha) \alpha$ e $L_0(\zeta \alpha) K_1(\zeta \alpha) \alpha$. Considerando que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_0(\zeta \alpha) = \infty$$

e

$$K_1(\zeta \alpha) = \infty,$$

onde, de acordo com o resultado apresentado pelo software referenciado em [24], ∞ representa o infinito complexo, ter-se-iam duas multiplicações de zero por infinito. Tomando o limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\pi \zeta \alpha}{2} [L_{-1}(\zeta \alpha) K_0(\zeta \alpha) + L_0(\zeta \alpha) K_1(\zeta \alpha)] + C \right\},$$

têm-se, conforme os resultados do software [24], os seguintes limites válidos :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_0(\zeta \alpha) \alpha = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_{-1}(\zeta\alpha)K_0(\zeta\alpha)\alpha = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_0(\zeta\alpha)\alpha \right] L_{-1}(0) = 0[L_{-1}(0)] = 0 ;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_0(\zeta\alpha)K_1(\zeta\alpha) = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_0(\zeta\alpha)K_1(\zeta\alpha)\alpha = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_0(\zeta\alpha)K_1(\zeta\alpha) \right] 0 = 0 .$$

Portanto:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = C .$$

Como

$$f(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta ,$$

tem-se que

$$C = \frac{\pi}{2} .$$

Tomando $\alpha = 1$, encontra-se o resultado da integral definida de interesse:

$$f(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(\theta)} \operatorname{sech}(\theta) d\theta = -\frac{\pi\zeta}{2} [L_{-1}(\zeta)K_0(\zeta) + L_0(\zeta)K_1(\zeta)] + \frac{\pi}{2} .$$

Tem-se, finalmente, que

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \left\{ \frac{K_2(\zeta)}{\zeta} - K_1(\zeta) + \frac{\pi}{2} [1 - \zeta K_0(\zeta)L_{-1}(\zeta) - \zeta K_1(\zeta)L_0(\zeta)] \right\} ,$$

ou apenas

$$\langle \beta^2 \rangle = 1 - \frac{\zeta K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{\zeta\pi}{2K_2(\zeta)} [1 - \zeta K_0(\zeta)L_{-1}(\zeta) - \zeta K_1(\zeta)L_0(\zeta)] .$$

F. Funções Especiais Oriundas da Equação Diferencial de Bessel (Capítulo 3)

F.1 Função Modificada de Bessel

Conforme [20], a equação diferencial de Bessel é dada por

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0.$$

A equação diferencial modificada de Bessel de ordem ν é obtida com a simples alteração de sinal do termo z^2 do coeficiente de w :

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = 0.$$

As funções modificadas de Bessel são soluções desta equação. Denomina-se $I_\nu(z)$ a função modificada de Bessel de primeira espécie:

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(1+n+\nu)}.$$

A função modificada de Bessel de segunda espécie, representada por $K_\nu(z)$, consiste em uma série de potências que se relaciona com $I_\nu(z)$ da seguinte forma:

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Quando ν é um número $n \in \mathbb{Z}$, toma-se o limite $\nu \rightarrow n$ para que o seno do denominador da equação acima não se anule. No Capítulo 3, a Equação (3.35) representa esta função modificada de Bessel por meio de uma integral.

F.2 Função Modificada de Struve

Segundo [20], a equação diferencial de Struve é dada por:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}.$$

De acordo com [37], trata-se de uma equação diferencial de Bessel não homogênea. A mesma alteração feita no coeficiente de w da equação de Bessel é suficiente, na equação acima, para gerar a equação modificada de Struve, que, conforme [26], se expressa por:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = \frac{4 \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}.$$

A função modificada de Struve $L_\nu(z)$, que ocorre em 3.60 (Capítulo 3), é solução desta equação. Esta função representa a seguinte série de potências:

$$L_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1}}{\Gamma\left(n + \nu + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}.$$

G. Distribuição de Maxwell-Boltzmann em Função de β (Capítulo 4)

A função distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann é dada por

$$f_{MB}(v) = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Para fins de comparação gráfica entre o traço desta função e o da distribuição de Maxwell-Jüttner, faz-se necessário submetê-las à mesma variável. Adota-se $\beta = \frac{v}{c}$ para aferição do percentual das velocidades em relação a c . Para a distribuição de Maxwell-Boltzmann, tem-se

$$c\beta = v$$

$$cd\beta = dv$$

$$f_{MB}(\beta)d\beta = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 \beta^2 c^2 e^{-\frac{m_0 \beta^2 c^2}{2kT}} cd\beta$$

$$f_{MB}(\beta)d\beta = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \right)^3 \beta^2 c^3 e^{-\frac{m_0 c^2 \beta^2}{2kT}} d\beta$$

$$f_{MB}(\beta)d\beta = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\pi kT}} \right)^3 \beta^2 e^{-\frac{m_0 c^2 \beta^2}{2kT}} d\beta$$

$$f_{MB}(\beta)d\beta = \frac{4\pi}{(\sqrt{2\pi})^3} \left(\sqrt{\frac{m_0 c^2}{kT}} \right)^3 \beta^2 e^{-\frac{m_0 c^2 \beta^2}{2kT}} d\beta$$

Considerando que $\zeta = \frac{m_0 c^2}{kT}$, tem-se

$$f_{MB}(\beta)d\beta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \beta^2 e^{-\frac{\zeta\beta^2}{2}} d\beta$$

ou

$$f_{MB}(\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\zeta)^{\frac{3}{2}} \beta^2 e^{-\frac{\zeta\beta^2}{2}}.$$

A partir desta nova equação, os valores esperados da distribuição de Maxwell-Boltzmann em função de β seriam:

$$\langle \beta \rangle_{MB} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{8}{\pi \zeta}},$$

$$\beta_{p(MB)} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{2}{\zeta}},$$

e

$$\beta_{rms(MB)} = \sqrt{\langle \beta^2 \rangle_{MB}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{3}{\zeta}}.$$

H. Cálculo de $\langle \beta_{th}^2 \rangle$ (Capítulo 4)

A distribuição de Maxwell-Jüttner em função da velocidade β é dada por

$$f_{MJ}(\beta)d\beta = \frac{\zeta\beta^2\gamma^5 e^{(-\zeta\gamma)}}{K_2(\zeta)} d\beta .$$

Tomando β em função do fator de Lorentz, dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

tem-se

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}}$$

e

$$d\beta = \frac{1}{\gamma^2\sqrt{\gamma^2 - 1}} d\gamma .$$

A distribuição de Maxwell-Jüttner como função do fator de Lorentz γ tem, então, a seguinte forma:

$$f_{MJ}(\gamma)d\gamma = \frac{\zeta e^{(-\zeta\gamma)}\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{K_2(\zeta)} d\gamma$$

ou apenas

$$f_{MJ}(\gamma) = \frac{\zeta e^{(-\zeta\gamma)}\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{K_2(\zeta)} .$$

A esperança $\langle \gamma \rangle$ desta distribuição é calculada a partir da integral

$$\langle \gamma \rangle = \int_1^{\infty} \gamma f_{MJ}(\gamma) d\gamma = \int_1^{\infty} \frac{\zeta e^{(-\zeta\gamma)} \gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}{K_2(\zeta)} d\gamma ,$$

na qual os novos limites de integração decorrem da relação entre β e γ .

Aplica-se a substituição de variável proposta por [18]:

$$\gamma = \cosh(\theta)$$

$$d\gamma = \sinh(\theta) d\theta$$

$$\langle \gamma \rangle = \frac{\zeta}{K_2(\zeta)} \int_0^{\infty} \cosh^2(\theta) \sinh^2(\theta) e^{(-\zeta \cosh(\theta))} d\theta .$$

O software referenciado em [24] reconhece como válida a seguinte relação trigonométrica hiperbólica:

$$\cosh^2(\theta) \sinh^2(\theta) = \frac{\cosh(4\theta) - 1}{8} .$$

Então:

$$\langle \gamma \rangle = \frac{\zeta}{8K_2(\zeta)} \int_0^{\infty} [\cosh(4\theta) - 1] e^{(-\zeta \cosh(\theta))} d\theta .$$

Como

$$K_\nu(\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\zeta \cosh(t)} \cosh(\nu t) dt ,$$

então

$$\langle \gamma \rangle = \frac{\zeta}{8K_2(\zeta)} [K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] .$$

De acordo com [22],

$$\langle \gamma \rangle = \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta}.$$

Portanto:

$$\frac{\zeta}{8K_2(\zeta)} [K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] = \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta}. \quad (\text{H.1})$$

Pode-se desenvolver a equação acima para atestar a validade da igualdade:

$$\frac{\zeta}{K_2(\zeta)} [K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] = \frac{8\zeta K_1(\zeta) + 24K_2(\zeta)}{\zeta K_2(\zeta)}$$

$$\zeta [K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] = 8K_1(\zeta) + \frac{24K_2(\zeta)}{\zeta}$$

Da relação de recorrência exposta por [21]:

$$K_{v+1}(\zeta) - K_{v-1}(\zeta) = \left(\frac{2v}{\zeta}\right) K_v(\zeta)$$

extrai-se que

$$\frac{K_2(\zeta)}{\zeta} = \frac{1}{4} [K_3(\zeta) - K_1(\zeta)].$$

Logo,

$$\zeta [K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] = 8K_1(\zeta) + \frac{24}{4} [K_3(\zeta) - K_1(\zeta)]$$

$$\zeta [K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] = 8K_1(\zeta) + 6K_3(\zeta) - 6K_1(\zeta)$$

$$\zeta[K_4(\zeta) - K_0(\zeta)] = 2K_1(\zeta) + 6K_3(\zeta)$$

$$K_4(\zeta) - K_0(\zeta) = \frac{2K_1(\zeta)}{\zeta} + \frac{6K_3(\zeta)}{\zeta}$$

Aplicando a mesma relação de recorrência apresentada por [21] aos termos do lado direito da equação acima, tem-se

$$\frac{2K_1(\zeta)}{\zeta} = K_2(\zeta) - K_0(\zeta)$$

e

$$\frac{6K_3(\zeta)}{\zeta} = K_4(\zeta) - K_2(\zeta).$$

Assim:

$$K_4(\zeta) - K_0(\zeta) = K_2(\zeta) - K_0(\zeta) + K_4(\zeta) - K_2(\zeta)$$

$$K_4(\zeta) - K_0(\zeta) = K_4(\zeta) - K_0(\zeta).$$

Logo, a Equação (H.1) é válida. Tomando $\langle \gamma \rangle$ como função da velocidade térmica:

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle \beta_{th}^2 \rangle}} = \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \langle \beta_{th}^2 \rangle}} \right)^2 = \left(\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta} \right)^2$$

$$1 - \langle \beta_{th}^2 \rangle = \frac{1}{\left(\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta} \right)^2}$$

$$\langle \beta_{th}^2 \rangle = 1 - \left(\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta} \right)^{-2}.$$

Trata-se do mesmo resultado apresentado por [13].

Referências

- [1] SCHIFINO, J. **Tópicos de Físico-Química**. 1ª ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2013.
- [2] SERWAY, R. A.; JEWETT JR, J. W. **Princípios de Física – Oscilações, Ondas e Termodinâmica**. 5ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- [3] YOUNG, H.D.; FREEDMAN, R. A. **Física II – Termodinâmica e Ondas**. 12ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.
- [4] HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. Vol. 2, 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [5] RONCHI, G. **Estudo de Perfis de Pressão no Tokamak TCABR**. 2017. 172 f. Tese (Doutorado em Ciências). Departamento de Física Aplicada, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-22022017-125032/publico/Tese_GRonchi_0.pdf.
- [6] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade, Física Quântica**. Vol. 4, 1ª ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- [7] DUNKEL, J.; TALKNER, P.; HÄNGGI, P. Relative entropy, Haar measures and relativistic canonical velocity distributions. **New Journal of Physics**, v. 9, mai. 2007. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/9/5/144>.
- [8] GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2007.

[9] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. Vol. 2, 4ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

[10] DEVORE, J. L. **Probabilidade e Estatística Para Engenharia e Ciências**. 6ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

[11] BAGNATO, V. S. **Física Moderna – Aula 8: Distribuição de Maxwell Boltzmann**. 2016. (39min30s). Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=hGzDCefizFg>.

[12] BRITANNICA (Editores). Physical constant. **Encyclopedia Britannica**, 2016. Disponível em:

<https://www.britannica.com/science/physical-constant>.

[13] HAKIM, R. **Introduction to Relativistic Statistical Mechanics: Classical and Quantum**. Singapore: World Scientific, 2011.

[14] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Statistical Physics: Part 1**. 3rd ed. revised and enlarged. Oxford: Pergamon Press, 1980.

[15] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 4rd ed. revised. Oxford: Pergamon Press, 1975.

[16] GERMANI, F. T. L. **Simulações de Dinâmica Molecular em um Gás Relativista**. 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado em Física). Programa de Pós-Graduação em Física, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro. Disponível em:

http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/Dissertacao_Felipe_Tolentino_Lopes_Germani.2014_09_19_09_41_03.pdf.

[17] KUBLI, N.; HERRMANN, H. J. Thermostat for a relativistic gas. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 561, jan. 2021. Disponível em:

<http://www.comphys.ethz.ch/hans/p/763.pdf>.

[18] CHANDRASEKHAR, S. **An Introduction to the Study of Stellar Structure**. Dover Publications, 2013.

[19] PATSKO, C. H. **Teoria Cinética de Gases Relativísticos Ionizados**. 2001. 100 f. Dissertação (Mestrado em Física). Departamento de Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/36611/D%20-%20CARLOS%20HENRIQUE%20PATSKO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

[20] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables**. New York: Dover Publications, 1968.

[21] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. Tradução por Arlete Simille Marques, 6^a ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

[22] RUEDA-BECERRIL, J. M.; MIMICA, P.; ALOY, M. A. On the influence of a hybrid thermal–non-thermal distribution in the internal shocks model for blazars, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 468, jun. 2017, p. 1169 – 1182. Disponível em: <https://academic.oup.com/mnras/article/468/1/1169/3051678>.

[23] NIST. **Incomplete Gamma Functions**. 2020. Disponível em: <https://dlmf.nist.gov/8.2#ii>.

[24] WOLFRAM ALPHA. **Wolfram Alpha: Computational Intelligence**. 2021. Disponível em: <https://www.wolframalpha.com/>.

[25] INTEGRAL CALCULATOR. **Integral Calculator: Calculate Integrals Online**. 2021. Disponível em: <https://www.integral-calculator.com/>.

[26] MOSIUN, J. A. A.; HALIM, S. A. Properties of Functions Involving Struve Function. **Mathematics**, v. 6, n. 11, nov. 2018. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2227-7390/6/11/240>.

[27] SAMOJEDEN, L. L. **As Equações de Burnett Segundo a Teoria Cinética Relativística e a Propagação das Ondas Sonoras**. 2000. 173 f. Tese (Doutorado em Ciências). Departamento de Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/36661/T%20-%20LAURO%20LUIZ%20SAMOJEDEN.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

[28] LANG, K.; ZIRIN, H. Sun. **Encyclopedia Britannica**, 2021. Disponível em: <https://www.britannica.com/place/Sun>.

[29] ZOHURI, B. **Inertial Confinement Fusion Driven Thermonuclear Energy**. Switzerland: Springer International Publishing, 2017.

[30] CHEN, F. F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion**. 3rd ed. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[31] BITTENCOURT, J. A. **Fundamentals of Plasma Physics**. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2004.

[32] LAWSON, J. D. Some criteria of a power producing thermonuclear reactor. **Proceedings of the Physical Society B**, IOP Publishing, v. 70, n. 1, p. 6-10, 1957. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0370-1301/70/1/303>.

[33] MACERAU, W. M. O. **Comparação das Distribuições α -Estável, Normal, t de Student e Laplace Assimétricas**. 2012. 95 f. Dissertação (Mestrado em Estatística). Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. Disponível em:

<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4555/4185.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

[34] PETERSON, B. Quasar. **Encyclopedia Britannica**, 2019. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/quasar>.

[35] KOVALEV, Y. Y. *et al.* RadioAstron Observations of the Quasar 3C273: a Challenge to the Brightness Temperature Limit. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 820, n. 1, mar. 2016. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8205/820/1/L9>.

[36] FEYNMAN, R. P. **Surely You're Joking, Mr. Feynman!** New York: Bantam, 1985.

[37] BARICZ, A.; POGÁNY, T. K. **Integral Representations and Summations of Modified Struve Function**. arXiv: 1301.6432v1, 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1301.6432.pdf>.

RESOLUÇÃO n°038/2020 – CEPE

ANEXO I

APÊNDICE ao TCC

Termo de autorização de publicação de produção acadêmica

O estudante Gilberto Jonas Damião do Curso de Licenciatura em Física, matrícula 2018.1.0018.0041-0, e-mail: gilbertojonas@gmail.com, na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei n° 9.610/98 (Lei dos Direitos do autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **DISTRIBUIÇÕES DE VELOCIDADE EM REGIMES CLÁSSICO E RELATIVÍSTICO COM APLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMA E AO QUASAR 3C 273**, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF); Imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); Vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão pela internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 07 de dezembro de 2021.

Assinatura do autor: 

Nome completo do autor: Gilberto Jonas Damião

Assinatura do professor-orientador: 
Nome completo do professor-orientador: Clóves Gonçalves Rodrigues