PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS (PUC-GO)

ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO

LEANDRO HENRIQUE FERREIRA NUNES

GEOMETRIA EUCLIDIANA, POSTULADOS E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

GOIÂNIA

2021/2

LEANDRO HENRIQUE FERREIRA NUNES

GEOMETRIA EUCLIDIANA, PÓSTULADOS E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Monografia apresentada à Escola de Formação de Professores e Humanidades como requisito necessário para a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Goiás.

Orientadora: prof. Vanda Domingos Vieira

GOIÂNIA

2021/2

LEANDRO HENRIQUE FERREIRA NUNES

GEOMETRIA EUCLIDIANA, PÓSTULADOS E AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Este trabalho foi julgado adequado e aprovado para a obtenção do título de graduação em Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Goiânia, 10 de dezembro de 2021

Prof. M Rosimara Fachin Pela

Coordenadora do Curso de Matemática

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr Vanda Domingos Vieira

Pontifícia Universidade Católica de Goiás

ORIENTADORA

Prof. M Rosimara Fachin Pela

Pontifícia Universidade Católica de Goiás

BANCA

Prof. Dr Bianka Carneiro Leandro

Pontifícia Universidade Católica de Goiás

BANCA

Mestrando Leandro Henrique Ferreira Nunes

Pontifícia Universidade Católica de Goiás

BANCA

AGRADECIMENTOS

Queria agradecer a Deus, por me ajudar nos momentos difíceis e sempre por uma prova que eu pudesse passar, com meu esforço e dedicação, por colocar as condições necessárias para minha formação e pela vida de todos que estiveram na minha caminhada acadêmica.

Agradecer a Pontifícia Universidade Católica, por ser justo nas horas de ser justa e humana na hora de ser humana, a disponibilizar os recursos necessários para minha formação.

Agradecer pela vida de cada professor que passou pela minha vida e também a professora orientadora Vanda Domingos Viera mesmo com as dificuldades que tivemos de horários e compromissos sempre esteve me ajudando em tudo.

Aos meus amigos Gabriel e Higor que só pela amizade deles superei grandes obstáculos no meio do curso e essa amizade vai ser levada para sempre.

A minha família, minha mãe que nunca desacreditou de mim, meu pai e meus irmãos cada um deles fazem parte não só da minha formação, mas da minha vida.

A minha noiva Andressa que sempre me apoiou sonhou muitas vezes mais do que eu nessa formatura e estamos chegando ao fim dessa caminhada, Deus te colocou na minha vida e ele sabe de tudo que passamos a passaremos.

Resumo

Essa monografia tem como tema a Geometria não Euclidiana, um trabalho abordado, mas na parte histórica dessas geometrias, usando de fundamento a Geometria Euclidiana e as Geometrias Hiperbólica e vamos abordar a Geometria Elíptica e a Esférica como uma única geometria. Sobre a geometria de EUCLIDES (300-a.c) vamos ver momentos históricos e também seus fundamentos teóricos para desenvolver essa famosa geometria, também vamos ver a história do surgimento e do que causou a criação das novas geometrias ou Geometrias não euclidianas, usando de base a tradução do livro do próprio EUCLIDES (300-a.c) feito por BICUDO (2009). Iremos analisar cada proposição, postulados e noções comum estudar mais a fundo o famoso quinto postulado (o postulado das paralelas) e suas consequências durante a história e pela vida de muitos matemáticos. E sobre as geometrias não euclidianas, vamos abordar o surgimento de cada uma delas, seus fundamentos, consequências e suas aplicações no campo da metafísica e na teoria da relatividade etc. Esta monografia irá trabalhar a parte histórica dessas geometrias e não terá um aprofundamento teórico sobre.

Palavra-chave: Geometria Euclidiana; Geometrias não Euclidianas; História da Matemática; Geometria Hiperbólica; Geometria Esférica; Geometria Elíptica;

ABSTRACT

This monograph has as its theme Euclidean geometries, a work discussed, but in the historical part of these geometries, using Euclidean geometry and hyperbolic geometries as a foundation, and we will address elliptic and spherical geometry as a single geometry. About Euclid's geometry, we will see historical moments and also its theoretical foundations to develop this famous geometry, we will also see the history of the emergence and what caused the creation of new non-Euclidean geometries or geometries, based on the translation of the book by the author. Euclid by BICUDO (2009), we will study each proposition, postulates and common notions to further study the famous fifth postulate (the parallel postulate) and its consequences during the history and for the lives of many mathematicians. And about non-Euclidean geometries, we will discuss the emergence of each of them, their foundations, consequences and their applications in the field of metaphysics and the theory of relativity, etc. This monograph will work the historical part of these geometries will not have a theoretical deepening about.

Keyword: Euclidean geometry; non-Euclidean geometries; history of mathematics; hyperbolic geometry; spherical geometry; elliptical geometry;

FIGURAS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana é uma referência para várias outras geometrias, como essa ideia como fundamento teórico, esse trabalho aborda de forma histórica, e usando de base a formação das Geometrias não Euclidianas, um ponto de vista diferente de olhar esse conteúdo. O tema de Geometrias não Euclidianas não foi abordado durante o curso de matemática, por esse motivo o escolhi para mostrar aos alunos do curso um pouco do que é, e como surgiram essas novas geometrias.

Mostraremos de forma histórica a formação dos fundamentos de EUCLIDES (300-a.c) e o postulado das paralelas. Uma das consequências diretas desse postulado, é a dúvida de sua veracidade ou não, se é um postulado ou uma proposição que precisa ser provada. Foi o surgimento das Geometrias não Euclidianas.

Abordando a historicidade vamos ver, os trabalhos desses matemáticos e suas contribuições para as Geometrias não Euclidianas, tais como JOHN PLAYFAIR (1748-1777), SACCHERI (1667-1733), NIKOLAI LOBACHEVSKY (1792-1856), RIEMANN (1826-1866) e JÓNOS BOLYAI (1802-1860). Estudando um pouco dos seus trabalhos e suas contribuições, usando as ideias dos planos Hiperbólico, Elíptico e Esférico, é veremos algumas das suas aplicações em áreas específicas como, campo Esférico e Elíptico nas áreas de cartografia e o campo Hiperbólico na área da teoria da relatividade e na metafisico, isso mostrando com base históricas ao passar dos séculos.

Usando essa abordagem e olhando como a geometria foi se desenvolvendo, ao longo do tempo, a ideia é mostrar algo que não foi abordado em sala de aula, e mostrar que esse estudo ainda pode gerar mais pesquisas ao longo do tempo, a ideia é despertar o olhar para esse conteúdo tão rico a fim de gerar mais conhecimento e curiosidade para novas pesquisas.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para falar sobre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas vamos relatar os momentos históricos de EUCLIDES (300-a.c) e sua trajetória de vida e conquistas durante sua vida como matemático e filósofo.

EUCLIDES (300-a.c) nasceu na Grécia, não se tem uma data definida do seu nascimento, mas está estorno de 300 anos A.C, e sua história começa em Alexandria no Egito. Alexandria nos tempos antigos foi uma cidade muito importante para o mundo, ela foi fundada em volta de um pequeno vilarejo, 301 anos A.C por Alexandre o Grande e permaneceu como capital do Egito por mais de mil anos.

Embora as informações sobre EUCLIDES (300-a.c) sejam poucas, sabe-se que ele foi um dos fundadores da escola Real de Alexandria, fazendo com que a cidade de Alexandria fosse um dos centros de estudo e conhecimento do mundo na época. E não há muitos registros sobre a construções da cidade, mas os estudos de EUCLIDES (300-a.c) foram base pra várias construções egípcias da época.

A antiga escola Real de Alexandria foi fundada no reinado de Ptolomeu I, foi onde teve uma busca por diversas obras literárias da época como os livros de Euclides, Os Elementos, uma coleção de 13 livros organizados por EUCLIDES (300-a.c), em torno de século III A.C; foi um dos fundamentos pra famosa geometria egípcia, essa escola foi um berço para diversos filósofos da época, com o apoio do reinado de Ptolomeu I, filósofos importante como, APOLÔNIO DE PERGA (262-194 A.C), ARISYTARCO DE SAMOS (310-230 A.C) e ARQUIMEDES DE SIRACUSA (287-212 A.C).

Em seus 13 livros, engloba vários elementos da geometria geral como, postulados (axiomas), proposições (teoremas e instruções) e diversas provas matemáticas de várias proposições. Os 13 livros cobrem toda a geometria euclidiana e ele tinha um projeto de reunir todo seu estudo e resolver três dos problemas que a matemática tinha naquela época, mas ele não conseguiu terminar esse projeto. Seus livros são 5 sobre geometria plana, 3 sobre números, 1 sobre a teoria das proposições, 1 sobre os incomensuráveis e 3 sobre geometrias espaciais.

EUCLIDES (300-a.c) deixou um legado e isso criou uma ampla área para diversos estudos e pesquisas na geometria, como os famosos 5 postulados, as 5 noções comum e 465 teoremas, entre todos esses elementos o Quinto Postulado foi o mais criticado e mais refutado pelos estudiosos da época e isso gerou vários outros estudos como, as geometrias não euclidianas (Geometria Hiperbólica, Geometria Esférica ou Geometria Elíptica) e várias outras pesquisas baseadas nos estudos de EUCLIDES (300-a.c)

EUCLIDES (300-a.c) deixou vários trabalhos em aberto sobre ótica, acústica, consonância e dissonância, esses estudos podem ser conhecidos como os primeiros estudos sobre harmonia musical, e com isso vários outros trabalhos podem ser baseados nos seus estudos até os dias de hoje. Não se tem registros sobre sua morte, mas suas obras e estudos são incríveis e ele ficou tão famoso na área da geometria seus estudos mudaram pra sempre o jeito de estudar e observar a geometria.

3 OS FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

A Geometria Euclidiana tem sua fundamentação para estudos articulada e organizada pelo próprio EUCLIDES (300-a.c), isso torna o trabalho dele fantástico e revolucionário nessa área. Usando essa base EUCLIDES (300-a.c) de forma dedutiva demostrou vários outros teoremas. Elas são separadas por definições iniciais, os postulados e os axiomas e tudo isso está abordado no seu livro Os Elementos.

3.1 AS 23 DEFINIÇÕES DE EUCLIDES

As definições iniciais de EUCLIDES (300-a.c), foram propostas pra sustentar suas ideias, como se fossem uma legenda de atlas pra guiar ele nos seus estudos, e definir uma base de pesquisa.

1. Ponto é aquilo de que nada é parte;
2. Linha é um comprimento sem largura;
3. Extremidades de uma linha são pontos;
4. Linha reta é a que está posta por igual com os pontos entre si mesma;
5. Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura;
6. Os lados de uma superfície são linhas;
7. Superfície plana é o que está posta por igual com retas sobre si;
8. Ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma mesma reta;
9. Quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado de retilíneo;

10. Quando uma reta, é colada uma reta, sobre outra de maneira que os ângulos adjacentes sejam iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se sobrepôs é chamada uma perpendicular a primeira;

11. Ângulo obtuso é maior do que um reto;

12. Ângulo agudo é menor que um reto;

13. Fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.

14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras;

15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha (que é chamada circunferência), em relação a qual todas as retas que a encontram (até a circunferência do círculo), a partir de um ponto dos pontos no interior da figura, são iguais entre si;

16. É o ponto é chamado de centro do círculo;

17. Diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois;

18. Semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E o centro do semicírculo é o mesmo do círculo.

19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, e por três, e por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, contidas por mais do que quatro retas;

20. Das figuras triláteras, um lado triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e por outro lado, isósceles, é o que tem dois lados iguais, enquanto o escaleno, é o que tem três lados desiguais;

21. Ainda das figuras triláteras, por um triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem três ângulos agudos;

22. Das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo (retângulo), a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, e que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide (paralelogramo), a que tem tantos os lados opostos quantos os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios;

23. Paralelas são retas que, estão no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram;

3.2 OS 5 POSTULADOS DE EUCLIDES

EUCLIDES (300-a.c) chamou postulados os princípios das leis geométricas criadas por ele mesmo e que serviram de base para as várias demonstrações e estudos da geometria em geral. Visando isto ele criou os 5 postulados a fim de usar como ferramenta de estudo.

1. Pode-se traçar uma única reta (segmento) por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar de modo único uma reta infinitamente.
3. Pode-se traçar uma circunferência com qualquer centro e raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta outras duas retas formado ângulos colaterais internos cuja a soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja a soma é a menor do que dois retos.

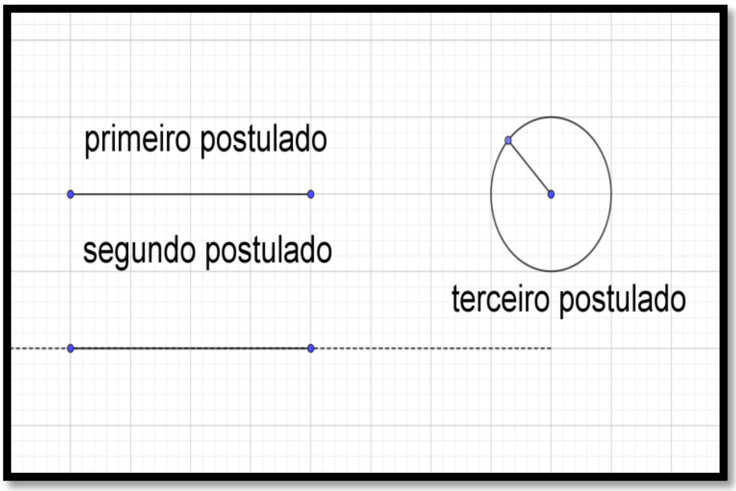

Figura 1; os 5 postulados autoria própria 01/12/2021

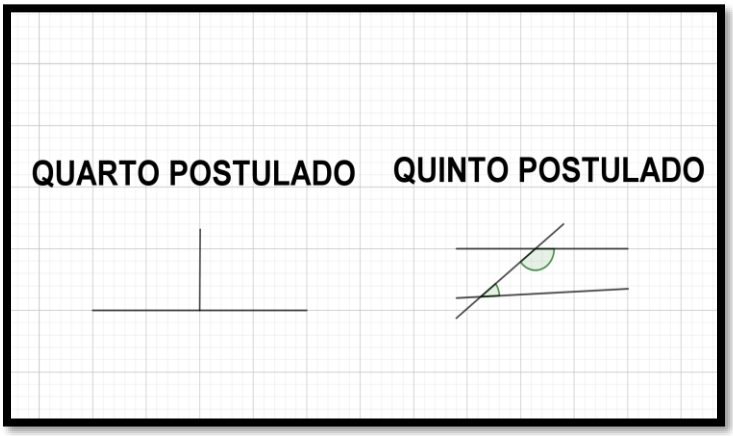

Figura 2; os 5 postulados autoria própria 01/12/2021

3.3 NOÇÕES COMUNS OU AXIOMAS

Os axiomas são definições mais aprofundadas que foram desenvolvidas com base nas definições iniciais e também nos postulados. Elas servem para definir e provar os diversos teoremas e proposições no livro “Os Elementos”.

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si;

2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais;

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;

4. O todo e maior do que qualquer uma das suas partes;

No livro I e II de EUCLIDES (300-a.c) são encontradas 23 definições, 48 proposições sobre propriedades dos triângulos, teoria das paralelas, áreas de triângulos, quadrados e paralelogramos. No livro III, 37 proposições sobre círculo, tangente, secantes, ângulos centrais e inscritos. No livro IV 16 proposições sobre figuras inscritas e circunscritas em círculo. No livro V apresenta a teoria e das proporções de Eudoxo. No livro VI usa a teoria das proporções para estudar figuras semelhantes. No livro VII inicia com 22 definições que distinguem números (impares e pares, primos e compostos). No livro VIII progressões geométricas. No IX 20 proposições sobre números primos. No livro X 115 proposições sobre números irracionais. No livro XI 39 proposições sobre geometria espacial. No XII medidas de figuras utilizando métodos de exaustão e o XIII são sobre medidas de sólidos.

Figura 3; fonte: Geometria Euclidiana; livro os elementos 12/12/2021

3.4 OS TEOREMAS DE EUCLIDES

Os postulados e os axiomas de EUCLIDES (300-a.c), são a base fundamental para demonstração de seus diversos teoremas, com essas ideias inovadoras na área da geometria ele pode provar de forma demonstrativa e dedutiva diversos princípios da Geometria Plana e Espacial. Alguns desses teoremas se firmaram bem durante o tempo e foram base de diversas discussões entre meios de estudo da geometria. Esses teoremas foram provados por formas dedutivas a partir dos postulados. Foi uma base real para diversos estudos mais avançados como física dinâmica e fins geométricos.

4 QUINTO POSTUALDO DE EUCLIDES, O POSTULADO DAS PARALELAS E SEUS SUBSTITUTOS

Entre seus diversos trabalhos e pesquisas como por exemplo PLOCO (410-485) JOHN PLAYFAIRJ (1748-1777), uma questão ficou em aberto o Quinto Postulado, esse postulado é o famoso postulado das paralelas na tradução de (BICUDO, 2009, p. 98).

> [...] caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois reto [...] (BICUDO, 2009, p. 98).

O quinto postulado gerou uma série de pesquisas para saber se ele podia ser considerado válido ou não, se era um postulado ou um teorema que deveria ser provado por meio das definições e também pelos quatro postulados restantes. Com essa base vários filósofos, matemáticos e pesquisadores, como PTOLOMEU (410-485), POSIDÔNIO DE APAMEIA (135-51 a.C.), usaram a base da geometria para provar o Quinto Postulado. Ao passar do tempo a literatura da época foi mudando o Quinto Postulado, mas não sua essência nas literaturas atuais é usada um postulado diferente podemos chamar ele de o “Novo Quinto Postulado” que é *“dado uma reta é um ponto fora dela passa-se uma única reta a reta dada”* foi a base para vários estudos sobre as duas possíveis negações a esse postulado.

Usando a base da Geometria Euclidiana muitos estudiosos da época tentaram de diversas maneiras provar ou substituir por algo mais solido ou usar uma forma de negação a existência do quinto postulado. Um desses estudiosos que deu um grande passo nas pesquisas foi um padre jesuíta, chamado GIOVANNI GIROLAMO SACCHERI (1667-1733). SACCHERI (1667-1733), desenvolveu sua pesquisa analisando e criticando as pesquisas dos demais matemáticos e filósofos da época. Baseou seu estudo ignorando a existência do quinto postulado e tentando usar no lugar do quinto postulado um quadrilátero, conhecido hoje por "*quadrilátero de Saccheri*", que consiste em ter um par de retas iguais e perpendiculares a um terceiro lado. Este lado chama-se base e o oposto é o topo. Os ângulos β e α são os ângulos de topo. Intuitivamente, a tendência será dizer que é um quadrilátero com dois lados iguais perpendiculares à base. Com tudo o quinto postulado virou uma base de estudos complexa, onde várias pessoas tinham suas opiniões, uma nova base de estudos e novas teorias usando a mesma base sólida de EUCLIDES (300-a.c)

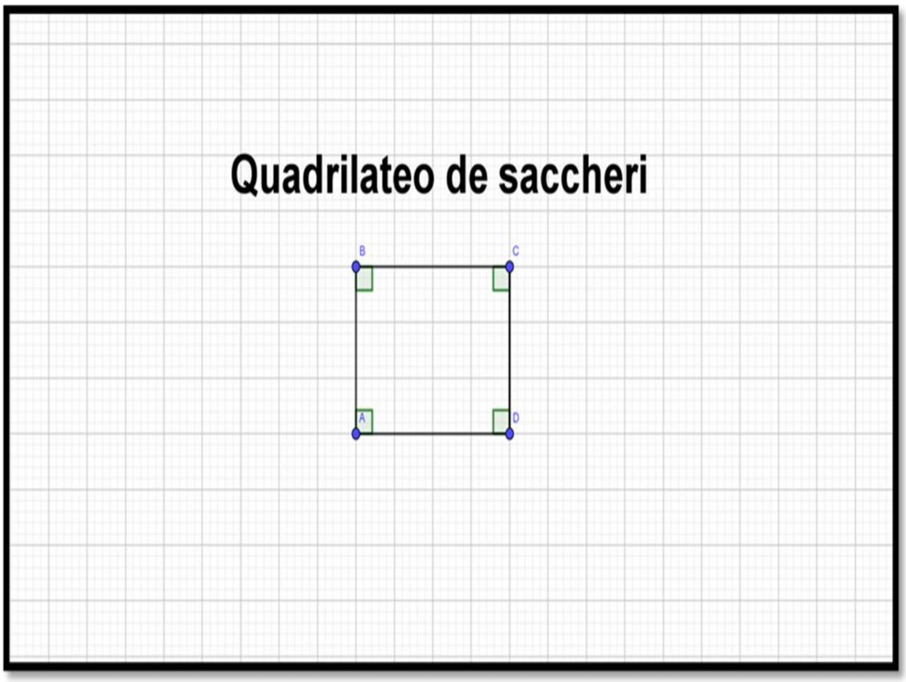

Figura 4; quadrilátero de Saccheri autoria própria 15/12/2021

O Quinto Postulado teve vários substitutos que vieram da tentativa de negar a ideia dele mesmo, que usando-os de fundamento melhorava a ideia dos outros 4 postulados e ficava fácil de usar em outros estudos, a ideia de que "*Se uma reta corta outras duas retas formado ângulos colaterais internos cuja a soma e menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja a soma e a menor do que dois retos",* difícil de entender e de usar em outros estudos. Então tem os seus substitutos que equivalem ao Quinto Postulado.

1. *a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.*
2. *existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.*
3. *existe um par de retas equidistantes.*
4. *se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.* PINA (2000)

Contudo o quinto postulado gerou, um novo jeito de olhar a geometria. Como EUCLIDES (300-a.c). fez com uma nova base de estudos, vários outros filósofos e matemáticos, como PLOCO (410-485) e JOHN PLAYFAIR (1748-1777). Entre outros, essa ideia de negar a existência do Quinto Postulado foi fundamental para gerar as Geometrias não Euclidianas.

5. GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Esse termo "Geometrias não Euclidianas", basicamente são geometrias criadas na tentativa de provar, entender ou negar o Quinto Postulado de EUCLIDES (300-a.c). Com base nesses estudos gerou algo que analisando, não era nada parecido com a geometria convencional, nas falhas tentativas de provar algo, criou-se algo novo e não era algo comum então ficou conhecida como novas geometrias ou Geometrias não Euclidianas.

Com base nos seus estudos filósofos e estudiosos geraram esse novo jeito de estudar geometria. Matemáticos como SACCHERI (1667-1733), NIKOLAI LOBACHEVSKY (1792-1856), RIEMANN (1826-1866) e JÓNOS BOLYAI (1802-1860) tiveram um grande avanço nos seus estudos sobre geometria, criando um novo fundamento de estudos, e com isso criaram-se novas geometrias como Elíptica e Hiperbólica. Essas geometrias se formaram pelo seguinte fato, os estudiosos substituíram o postulado das paralelas, pela sua negação, gerando essas novas geometrias ou também tentando checar a fundo esse postulado.

6 GEOMETRIA ESFÉRICA/ELÍPTICA

6.1 CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1885)

Quando criança GAUSS (1777-1885) sempre teve receios sobre a geometria euclidiana, aos doze anos ele tinha teorias de que a geometria de EUCLIDES (300-a.c) era o começo de algo grande. Durante sua trajetória acadêmica GAUSS (1777-1885) se aprofundou em diversos estudos e pesquisas, mas nenhum texto publicado por ele era de geometria. Após sua morte, suas anotações foram estudadas e tinha uma pesquisa bem interessante sobre a geometria euclidiana.

A ideia era se a soma dos ângulos internos de um triangulo fosse maior que 180°, o que aconteceria? Usando base da Geometria Clássica então criou uma nova geometria que não era uma geometria convencional, a geometria Esférica ou Elíptica. Nessa nova geometria GAUSS (1777-1885) conseguia resolver qualquer problema da geometria convencional com a exceção de uma constante, constante essa que quanto maior ela era, mais próximo estava da geometria euclidiana, mas quando essa constante era infinitamente grande as duas se coincidiam.

Usando essa geometria não-euclidiana como verdadeira, e se fosse possível comparar essa constante com tais magnitudes como nós encontramos em nossas medições na terra e nos céus, essa constante poderia então ser determinada. Os teoremas desta geometria pareciam paradoxais e, para os não iniciados, um absurdo. Especula-se que o motivo de GAUSS (1777-1885) ter retido suas descobertas foi o de que ele era um perfeccionista e publicou apenas obras concluídas de fato. Talvez seja porque estava tão preocupado com a obra original, em muitos ramos da matemática, bem como em astronomia e física que ele não teve a oportunidade de colocar seus resultados em geometria não-euclidiana. Os poucos resultados que ele anotou foram encontrados entre seus papéis privados após sua morte.

6.2 GEORG FRIEDRICH BERNHAD RIEMANN (1826-1866)

RIEMANN (1826-1866), desenvolveu a geometria elíptica, que se aplica em superfícies que tem curvaturas positivas constante. Essa é a visão dos estudiosos de hoje sobre a realidade daqueles planos não euclidianos. Uma generalização da ideia de GAUSS (1777-1885) e RIEMANN (1826-1866).

A geometria esférica ou elíptica trouxe o que chamamos de consequências de sua própria existência, nela a somo dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°, a razão dividida pelo diâmetro de um círculo e menor do que π, não existe retas paralelas nessa nova geometria, porque elas se coincidem em dois pontos no plano esférico ou elíptico.

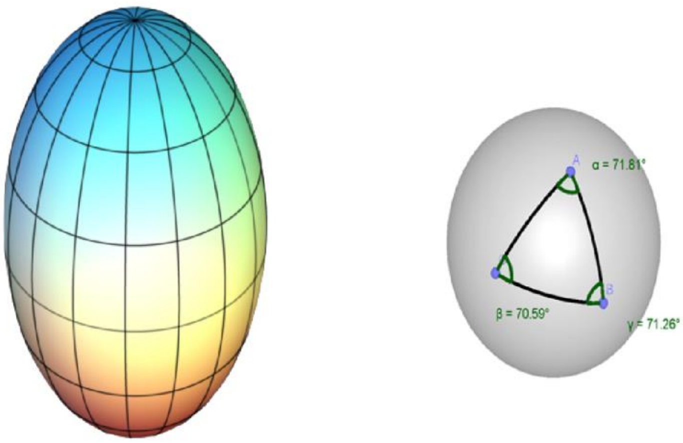

Figura 5:TRIANGULO em uma esfera e um elipsoide Fonte; desconhecido (15/10/2021)

Na geometria esférica ou elíptica também existe suas propriedades, e são propriedades nada parecido com a geometria de EUCLIDES (300-a.c)

1. *Quaisquer duas linhas se cruzam em dois pontos diametralmente opostos, chamados de pontos antípodas.*
2. *Quaisquer dois pontos que não são pontos antípodas determinam uma única reta.*
3. *Há uma unidade natural de medição do ângulo (com base em uma revolução), uma unidade natural de comprimento (com base na circunferência de um círculo maior) e uma unidade natural da área (com base na área da esfera).*
4. *Cada reta é associada com um par de pontos antípodas, chamados os polos da reta, que são os cruzamentos comuns do conjunto de retas perpendiculares à reta dada.*
5. *Cada ponto é associado com uma única reta, chamada reta polar do ponto, que é a reta no plano que passa pelo centro da esfera, e perpendicular ao diâmetro da esfera através do ponto dado.* HEIM (2013)

A distância entre dois pontos e bem diferente do sistema euclidiano, a distância de um ponto A e B e diferente porque os seguimentos de retas são curvos, isso quer dizer quanto maior o raio de uma esfera ou de um elipsoide, mais próximo de uma reta do plano euclidiano, a distância entre A e B num plano esférico e o menor arco da circunferência.

Quando pensamos em um triângulo no plano esférico, a ideia de um triângulo com os ângulos internos serem maior que 180°, e interessante. Mas existe dois arcos ou segmentos de retas que é determinado por um par de pontos que não são antípoda, na reta que determina três pontos não colineares não determina um triângulo convencional, mas se considerarmos um triângulo em um plano esférico surgem outras propriedades como distância entre dois pontos, e medidas dos ângulos internos de um triangulo.

1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo em um plano esférico e 180° (1+4f), onde f, e a fração da superfície da esfera, que está limitada pelo triangulo. Para qualquer valor positivo de f, esta será superior a 180° e inferior a 540°.*
2. *A área de um triângulo é proporcional ao excedente de 180° na sua soma ângulos internos.*
3. *Dois triângulos com a mesma soma dos ângulos internos possuem mesma área.*
4. *Existe um limite superior para a área de triângulos.*
5. *A composição (produto) de duas reflexões (ortogonal) de reta pode ser considerada como uma rotação em torno de qualquer um dos pontos de intersecção dos seus eixos.*
6. *Dois triângulos são congruentes se, e somente se, eles correspondem ao produto finito de retas de reflexões.*
7. *Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.* HEIN (2013)

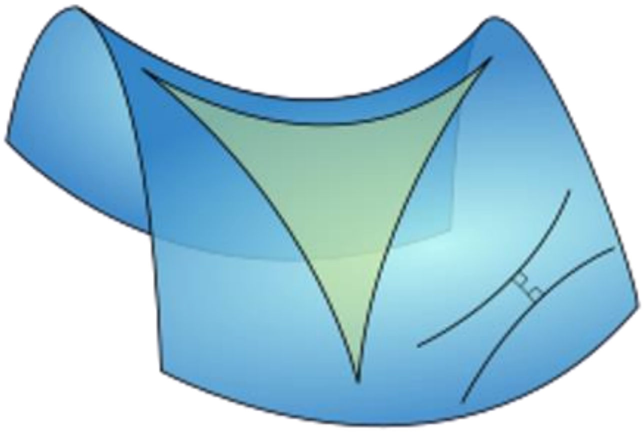

Figura 6; fonte Hyperbolic triangle 11/12/2021

6.3 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ESFERICA OU ELÍPTICA

Usando o plano esférico ou elíptico podemos, podemos notar diversas aplicações de suas medidas e propriedades, na matemática e na física existem diversas aplicações, na astronomia, na cartografia e nas navegações entre outras. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, longitude e fusos horários, são baseados em importantes ideias geométricas.

Uma aplicação clássica é no uso de "GP"s, que e um esse sistema programado para gerar coordenadas bi e tridimensionais de pontos no globo terrestre, que se analisarmos é uma esfera. Pensando nisso vemos que o plano esférico pra esse sistema e crucial.

7 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A Geometria Hiperbólica, surgiu devida a necessidade de negar o quinto postulado de EUCLIDES (300-a.c), trocando o postulado das paralelas pelo seguinte: "*por um ponto fora de uma reta, podem ser traçados pelo menos duas retas paralelas a reta dada*". Assim no espaço hiperbólico não existe apenas uma reta paralela, mas muitas retas paralelas passando por um ponto externo dado.

Uma das consequências diretas da Geometria Hiperbólica conforme já escrito por GAUSS (1777- 1855), é que nessa nova geometria os a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180°. Uma outra consequência é que um círculo na Geometria Hiperbólica a razão dividida pelo diâmetro que é igual a $\pi(3{,}14)$ e maior. Outra consequência é que como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180° não existe triângulo semelhante, se eles têm os mesmos ângulos internos eles são congruentes.

7.1 JÁNOS BOLYAI (1802-1860)

BOLYAI (1802-1860) foi um excelente militar e matemático um dos criadores da Geometria não Euclidiana. Em 1818 entrou na Academia Imperial de Engenheiro de Viana, onde aplicou todo seu tempo e conhecimento em criar uma geometria não euclidiana que negava totalmente o postulado das paralelas, também desenvolveu um rigoroso sistema geométricos dos números complexos que com par ordenados de números naturais.

Ele assumiu uma circunferência de raio infinito é uma linha reta, e é equivalente ao postulado do paralelismo de EUCLIDES (300-a.c). Mas ele mesmo declarou que usando essa ideia ele provava o Quinto Postulado, mas não criava um novo sistema geométrico, mas na verdade essa teoria era uma base fundamental para o que viria a ser a Geometria Hiperbólica.

7.2 NIKOLAI IVANIVICH LOBACHEVSKY (1792-1856)

LOBACHEVSKY (1792-1856) disse em uma exposição, "*que no postulado das paralelas de euclides, simplesmente nunca foi descoberta uma prova rigorosa de sua validade*". Em 1826 apresentou alguns teoremas os quais ele defendia e acreditava e isso marcou uma época como as novas geometrias ou as geometrias não euclidianas. Construiu essa ideia, na hipótese contraria a de Euclides que por um ponto fora de uma reta passa infinitas a reta dada.

Ele foi além criando propriedades únicas dessa nova geometria, propriedades essas que usou de fundamentos para seus estudos sobre a geometria hiperbólica.

1. *Uma linha reta ajusta-se sobre si mesma em todas as posições. Com isto quero dizer que durante a rotação de uma superfície que contém, a linha reta não muda seu lugar se ela passa por dois pontos fixos na superfície (com isso quero dizer que se giramos a superfície contendo a reta por dois pontos da linha, a linha não se move).*
2. *Duas linhas retas não podem se interceptar em dois pontos.*
3. *Se uma reta está num plano limitado por uma fronteira, então essa reta quando for suficientemente prolongada para os dois lados, deve ultrapassar a fronteira e assim dividir o plano em duas partes.*
4. *Duas linhas retas perpendiculares a uma terceira se cortam, não importa o quanto são prolongadas.* DIAS (2020)

LOBACHEVSKY (1792-1856) completou seus estudos sobre essa nova geometria com mais um grupo de quinze teoremas geométricos independentes do postulado das paralelas. Esses teoremas servem de base para compreensão das suas ideias relativas à nova geometria. Após, apresenta sua definição de retas paralelas.

Se a Geometria Euclidiana é consistente, assim também é a Geometria Hiperbólica. Com o intuito de verificar a consistência da nova geometria, vários modelos foram desenvolvidos para visualizá-la e para poder expor seus objetos. Outro modo de estudarmos a geometria hiperbólica é através de modelos. Dentre os mais conhecidos estão o modelo de Beltrami - Klein e o modelo Poincaré. Vejamos esses dois modelos.

7.3 MODELO DE BELTRAMI-KLEIN

O modelo de EUGÊNIO DE BELTRAMI (1835-1900), nada mais era que um modelo da Geometria não Euclidiana, que descreve um modelo Hiperbólico. Mas o alemão FÉNIX KLEN (1829-1925), aplicou um modelo de métrica projetiva, para introduzir um modelo de distância no modelo proposto por BELTRAMI (1835-1900), então esse modelo ficou conhecido como modelo de Beltrami - Klein.

Esse modelo de BELTRAMI (1835-1900), basicamente mostra que numa superfície com curvatura negativa constante tomando as geodésicas como retas, a geometria proposta por LOBACHEVSKY (1792-1856) podiam ser verificados. Essa superfície seria uma superfície tridimensional chamada de pseudo esfera que é obtida por uma curva chamada tractriz.

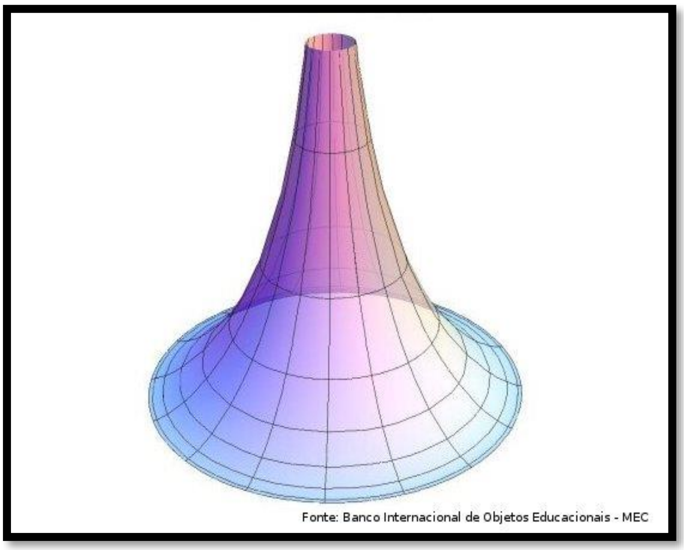

Figura 7: fonte; banco internacional de objetos educacionais – MEC (25/10/2021

Na superfície da pseudo esfera, encontra-se a possibilidade da confirmação do Postulado de LOBACHEVSKY (1792-1856). Porém, o modelo BELTRAMI (1835-1900) possui uma falha. As superfícies de curvatura negativa constante possuíam arestas, o que impedia o prolongamento de certas geodésicas para além das arestas que a pseudoesfera possui e isso contraria o segundo postulado de EUCLIDES (300-a.c), lembrando que a geometria hiperbólica admite todos os postulados de EUCLIDES (300-a.c) exceto o quinto.

7.4 MODELO DE POINCARÉ

O grande matemático francês HENRY POINCARÉ (1864-1912) foi um dos grandes matemáticos de sua época o modelo proposto por POINCARÉ (1864-1912) para geometria hiperbólica, são o modelo de disco e o modelo de semi-plano.

No modelo de semi-plano assim como o modelo de KLEN (1829-1925), POINCARÉ (1864-1912) também apresenta um modelo dentro de um círculo euclidiano. Nesse modelo as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo que representa o plano hiperbólico. Os pontos de intersecção das retas como círculo, que a borda do disco, são pontos que não pertencem ao plano hiperbólico, são denominados pontos ideais ou finais da reta hiperbólica.

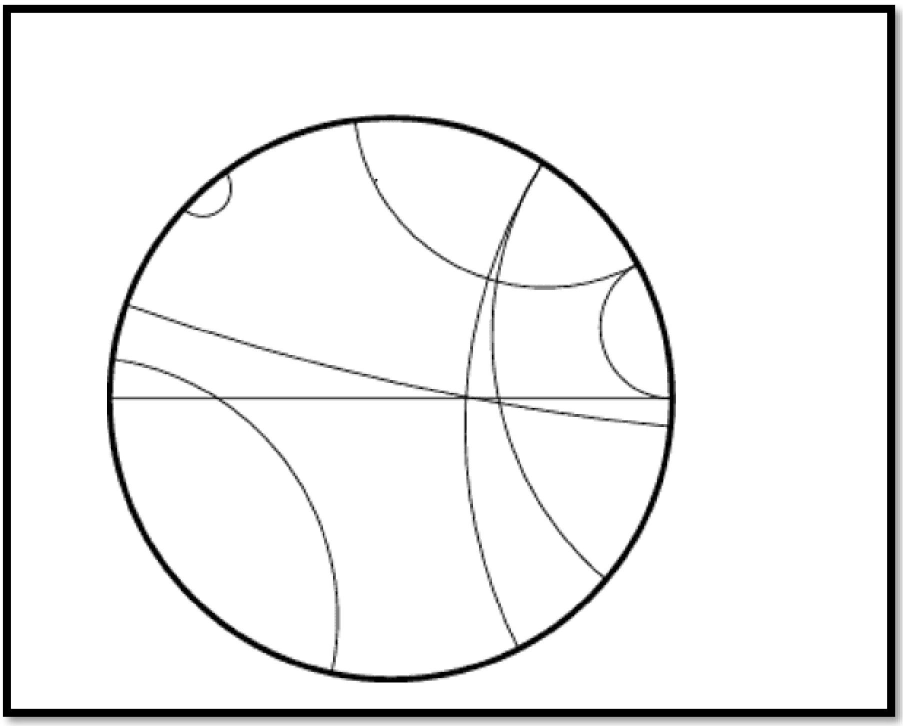

Figura 8: fonte;(CRUZ & SANTOS, 2010) (25/10/2021)

7.5 APLICAÇÕES DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

De certa forma a Geometria Hiperbólica tem várias aplicações, muitas delas relacionada há física, principalmente na teoria da relatividade, também é usado no espaço-tempo de Minkowski e uma outra aplicação é o espaço girovetorial.

Os conceitos da Teoria da Relatividade de ALBERT EINSTEIN (1879–1955) estão fortemente ligados aos conceitos das geometrias não-euclidianas. O desenvolvimento da nova física de Einstein só foi possível com uma mudança radical de paradigma da concepção de espaço, o qual por sua vez só foi possível devido ao surgimento das Geometrias não-Euclidianas. No caso da Geometria Hiperbólica na teoria da relatividade a gravidade nada mais é do que uma força que distorce a luz e o espaço tempo, e isso no plano hiperbólico os raios de luz e energia se afastam infinitamente um do outro. EINSTEN (1879–1955) criou a teoria da relatividade restrita na qual a gravidade era baseada na distância entre dois corpos. No caso da terra ela e baseada na distância do sol e o planeta terra. Mas na nova teoria a famosa teoria da relatividade geral EINSTEN (1879–1955), descobriu que a gravidade não precisava da distância entre dois corpos, nessa nova teoria a gravidade é pura aceleração. Mas tinha um problema as coisas do nada não aceleram, então veio as geometrias principalmente o campo hiperbólico onde a massa faz a formação no campo hiperbólico.

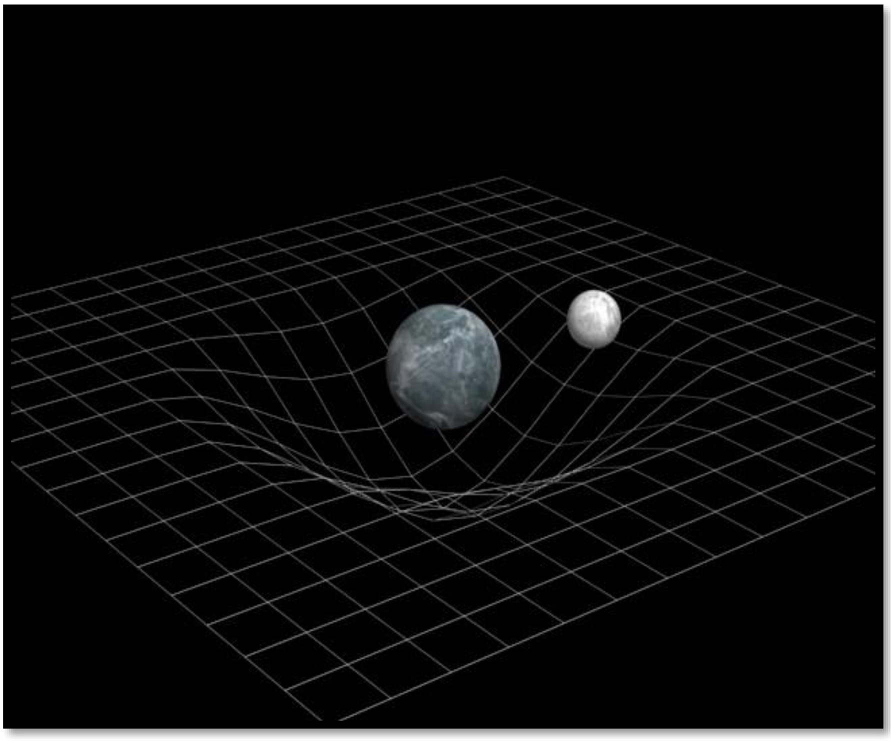

Figura 9: feito: com ciência (15/11/2021)

A Geometria Hiperbólica É usada em diversas áreas e estudos na área da física e astronomia e tem relados de que se as regras do nosso universo forem regras hiperbólicas, o universo tende a acabar. As forças de energia e luz também a se afastarem infinitamente até que o universo fique totalmente vago de luz e energia fazendo a teoria da destruição do universo visto do na Geometria Hiperbólica.

No espaço-tempo de HERMANN MINKOWSKI (1869-1909), habitar em um mundo tridimensional cuja geometria localmente é plana, a geometria espacial é assumida como euclidiana. Nesse espaço, um ponto é definido através de três números ou coordenadas, que podem ser as coordenadas (x, y, z) no sistema de coordenadas cartesianas ou retangulares. As grandezas físicas são, em geral, funções definidas nesse espaço, e as leis físicas relacionam essas diversas grandezas através de equações ou sistemas de equações. Assumindo que todos os referenciais inerciais são equivalentes, as equações que descrevem as leis físicas devem ter a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Assim, devem ser covariantes pelas transformações que relacionam os diversos referenciais inerciais entre si.

8 TABELA DE COMPARAÇÃO ENTRE AS GEOMETRIAS: EUCLIDIANA/PLANA, HIPERBÓLICA E ESFÉRICA/ELÍPTICA

DIFERENÇAS	EUCLIDIANA/PLANA	HIPERBOLICA	ESFÉRICA/ELÍPTICA
π	IGUAL A π (3,14)	MENOR QUE π (3,14)	MAIOR QUE π (3,14)
DADA UMA RETA L, E UM PONTO FORA DELA PASSA-SE	UMA ÚNICA RETA	INFINITAS RETAS	NENHUMA RETA
A SOMA DOS ANGULOS INTERNOS DE UM TRIANGULO	IGUAL A 180°	MENOR QUE 180°	MAIOR QUE 180°
SOMA DOS ANGULOS INTERNOS DE UM QUADRÍLATERO	IGUAL A 360°	MENOR QUE 360°	MAIOR QUE 360°
CURVATURAS	CURVATURA ZERO	CURVATURA NEGATIVA	CURVATURA POSITIVA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha desse tema foi uma ideia baseada no interesse de aprofundarmos mais nesse conteúdo. Por interesse próprio me aprofundei nessa matéria e decide pesquisar mais sobre e conhece novas geometrias ou geometrias não-euclidianas que trouxe um conhecimento a mais a minha vida acadêmica.

As Geometrias não Euclidianas, sendo criadas através da prova dos postulados das paralelas, trouxe algo a mais para matemática em geral, levando isso em consideração as deveriam abordar mais esse tema em suas aulas e grades curriculares.

Essa nova leva de pesquisa que gerou as Geometrias não Euclidianas com GAUSS (1777-1885) e RIEMANN (1826-1866), e também BOLYAI (1802-1860) e LOBACHEVSKY (1792-1856), mudou a jeito de olharmos o mundo ao nosso redor, tanto em campos simples como na aviação até no campo da metafísica e até na teoria da relatividade.

Esse conteúdo abrange uma área incrível da matemática que pode mudar muitas coisas no mundo, EINSTEN (1879–1955) analisando a teoria da relatividade usou o incrível trabalho da geometria hiperbólica de BOLYAI e LOBACHEVSKY para completar a teoria da relatividade. É então até onde podemos chegar usando a geometria no mundo? Isso e uma questão que o tempo e muitas pesquisas dirão, mas o fato de que a geometria é algo tão grandioso já me alegra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARKER, S.F. **Filosofia da matemática**. 2.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1964, p.141

BOYER, C.B, E.F.G. **História da matemática.** 1.ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1974, p.488

DIAS, G.N. **A geometria hiperbólica e o reflexo** de **sua utilização para os alunos do ensino médio.** 2020, Núcleo do conhecimento, disponível em: < https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica >, acesso em: 15/10/2021

Dr DANIEL. **Tem Ciência**, 2021, youtube.com disponível em: < https://www.youtube.com/channel/UCI7xQjmExvmlf8nRdPLw1TA >, acesso em: 05/11/2021

EULIDES, A, I.B. Os elementos. 1.ed. São Paulo: UNESP, 2009, p. 593

GONÇALVES, R.S. Alexandria, 2015, historiadomundo.com.br, disponível em: < https://www.historiadomundo.com.br/idade-antiga/alexandria.htm > , acesso em: 02/11/2021

HEIM, L. Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia, 2013, dm.ufrpe.br, disponível em: < http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_luciane_versao_final.pdf > acesso em: 18/11/2021

HONORATO, K.P,R. Três modelos para a geometria hiperbólica, 2014, repositorio.ufmg.br, disponível em < https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-9KJJW5/1/monografia_kledilson.pdf >, acesso em: 12/11/2021

KOAERECE, A.F, DEVITO, A. **Geometrias não-Euclidianas.** 2015, unicamp, disponível em: < https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana >, acesso em: 20/10/2021

PINA, R.S. **O V postulado de Euclides**, 2000, cercomp.ufg.br, disponível em: < https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/VPostuladodeEuclides.pdf > acesso em: 15/11/2021

TAVARES, W.S. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. 2016, imef.furg.br, disponível em:< https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_licenciatura/TCC_Wellington_2016.pdf >, acesso em: 02/11/2021