

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



A MATEMÁTICA IMPLÍCITA NA MÚSICA

WALLYSON DE JESUS FERNANDES

GOIÂNIA

2021

WALLYSON DE JESUS FERNANDES

A MATEMÁTICA IMPLÍCITA NA MÚSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Vanda Domingos Vieira

Banca Examinadora:

Prof.^a Dra.^a Bianka Carneiro Leandro

Prof.^a Me.^a Dagmar Junqueira Guimarães Silva

GOIÂNIA

2021

WALLYSON DE JESUS FERNANDES

A MATEMÁTICA IMPLÍCITA NA MÚSICA

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em sua forma final pela Escola de Formação de Professores e Humanidades, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, em ____ / ____ / ____.

Prof.^a Me.^a Rosimara Fachin Pelá

Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso

Banca examinadora:

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Vanda Domingos Vieira

Prof.^a Dr.^a Bianka Carneiro Leandro

Prof.^a Me.^a Dagmar Junqueira Guimarães Silva

GOIÂNIA

2021

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução parcial ou total do presente trabalho sem o consentimento da universidade, do autor e do orientador.

Dedico esse trabalho á Deus, pois Ele é minha fonte de inspiração para vencer os desafios da vida. À minha mãe, a minha esposa, ao meu pai, a minha filha, as minhas irmãs, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço á Deus, pois Ele é o meu motivo de viver. A minha vida só tem propósito por causa de seu infinito e grandioso amor. Ele é minha força, minha inspiração e minha fortaleza.

À minha mãe Vera Lúcia por sonhar comigo e me incentivar sempre a estudar, por não medir esforços para me ver feliz e realizado. Ela conclui junto comigo essa graduação, sem ela não seria possível.

À minha esposa Adriana por estar ao meu lado sonhando e colaborando para a conclusão dessa etapa em minha vida.

À minha avó Dalva (in memorian) e meu avô Dionísio (in memorian) por terem sempre acreditado em mim, por me ensinarem a como enfrentar o mundo, por terem me ensinado lições preciosas. Imagino como estariam felizes se aqui estivessem celebrando esse momento comigo.

À minha filha Sofia (in memorian) por ter me ensinado as mais belas lições da vida que ocorreram durante este período acadêmico.

Ao meu pai Aparecido (in memorian) que certamente se alegraria com esse momento, carrego comigo muito do que aprendi com ele.

Ao meu padastro Fred que sempre foi um colaborador direto para que eu chegasse até aqui.

Às minhas irmãs Ana Beatriz, Ana Luiza e Wállyta que celebram comigo a conclusão dessa etapa.

Aos meus pastores José Eduardo e Eliane que são exemplos para mim. Muito torceram e intercederam para a conclusão deste curso.

Aos meus professores do ensino fundamental Walquíria e Rodrigo, que foram inspirações para seguir nesta licenciatura, que investiram e acreditaram em meu potencial.

Aos meus professores do ensino superior, em especial Vanda, Adelino, Duelci, Rosimara e Bercholina, que se demonstraram além de professores serem seres humanos incríveis e indiretamente formando em mim um melhor professor por meio do exemplo da conduta de cada um.

Aos meus amigos Brenda, Josella, Rayan e Vinícius que acompanharam mais de perto essa trajetória e sempre incentivaram e colaboraram para que essa conclusão de curso se concretizasse.

À minha família IGS que muito torceram por mim, aos amigos e colegas que a PUC Goiás me presenteou e aos meus familiares que sempre transmitiram apoio. Estendo os agradecimentos a todos que de alguma maneira colaborou para a conclusão deste curso.

RESUMO

A música é algo presente em todo o mundo e sempre foi muito apreciada. Um mundo sem música é difícil até de se imaginar, pois ela caracteriza os povos, faz parte das celebrações desde a antiguidade e dos momentos mais tristes também. No mundo contemporâneo ela se faz presente assim como na antiguidade, porém já presente em outras artes, como o cinema. A música sempre foi muito presente nas danças, teatros, política, festividades e em quase todas as maneiras humanas de se manifestar. Por trás da música existe uma estrutura matemática que a rege para que tudo seja harmonioso e consequentemente agradável de se ouvir. Fora dessa estrutura ela se torna desagradável de se ouvir. Pitágoras foi um dos primeiros a desenvolver estudos para compreender e explicar essa harmonia e suas contribuições são aplicáveis até hoje. A proporção áurea presente em diversas coisas na natureza também se faz presente na música. Apreciando uma boa música muitos sequer imaginam que tem matemática por trás daquela canção ou sinfonia. Neste trabalho trataremos dessa relação de modo a demonstrar a relevância da matemática no meio musical.

Palavras-chave: Matemática na Música, Pitágoras, Proporção Áurea, Escala Musical.

ABSTRACT

Music is present all over the world and has always been highly appreciated. A world without music is difficult to even imagine, as it characterizes peoples, has been part of celebrations since antiquity, and the saddest moments as well. In the contemporary world, it is present as well as in antiquity, although it is already present in other arts, such as cinema. Music has always been very present in dances, theaters, politics, festivities and in almost every human way of manifesting itself. Behind the music there is a mathematical structure that governs it so that everything is harmonious and therefore pleasant to listen to. Outside this structure it becomes unpleasant to listen to. Pythagoras was one of the first to develop studies to understand and explain this harmony and his contributions are still applicable today. The golden proportion present in various things in nature is also present in music. Appreciating a good song, many don't even imagine that there is math behind that song or symphony. In this work we will deal with this relationship in order to demonstrate the relevance of mathematics in the musical environment.

Keywords: Mathematics in Music, Pythagoras, Golden Proportion, Musical Scale.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Mulheres egípcias tocando flauta, alaúde e harpa	13
Figura 2: Busto de Pitágoras.....	17
Figura 3: Gravura de Pitágoras em um experimento	18
Figura 4: Monocórdio de Pitágoras	19
Figura 5: Piano com as frequências das notas	22
Figura 6: Piano com as respectivas notas	24
Figura 7: Gravura de Fibonacci	25
Figura 8: O espiral de Fibonacci.....	26

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. A MÚSICA NAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES.....	12
2.1. A MÚSICA NA MESOPOTÂMIA.....	12
2.2. A MÚSICA NO EGITO ANTIGO.....	13
2.3. A MÚSICA NA GRÉCIA ANTIGA.....	14
2.4. A MÚSICA DOS HEBREUS.....	14
2.5. A MÚSICA NA CHINA.....	15
3. OS ESTUDOS DE PITÁGORAS NA ÁREA DA MÚSICA.....	16
3.1. QUEM FOI PITÁGORAS?.....	16
3.2. UMA DESCOBERTA POR ACASO.....	18
3.3. O MONOCÓRDIO.....	19
3.4. A TEORIA MUSICAL.....	19
3.5. A DESCOBERTA DA ESCALA PENTATÔNICA.....	20
4. A MATEMÁTICA DA MÚSICA.....	21
4.1. FREQUÊNCIA DAS NOTAS MUSICAIS.....	21
4.2. FRAÇÕES E PROPORÇÕES.....	22
4.3. A PROPORÇÃO ÁUREA.....	24
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	27
6. REFERÊNCIAS.....	28

1. INTRODUÇÃO

Durante meu ensino médio estive diante de uma importante decisão a ser tomada; a decisão de qual curso eu iria fazer. Diante das diversas sugestões que me foram apresentadas, todas apontavam para eu seguir uma carreira que viabilizava os melhores salários, porém dentro de mim havia uma certeza de que eu iria estudar e futuramente trabalhar com aquilo que eu gosto. Então me veio dois caminhos: estudar música ou estudar matemática. Estive sempre muito ligado a essas duas áreas e sempre tive prazer em desenvolvê-las. Desde meus primeiros passos na vida escolar demonstrei uma aptidão pela matemática, sempre obtendo boas notas e raras dificuldades com a matéria. Uma das maiores evidências se deu a partir do momento que pude realizar minha primeira olimpíada de matemática, aos 9 anos de idade, me rendendo uma medalha. Vieram diversas outras olimpíadas e novas premiações, sendo a de maior expressão uma medalha de bronze na OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas no ano de 2013, diante de um universo de mais de 18 milhões de estudantes em todo o país. Pude participar em duas oportunidades de um programa de iniciação científica na UFG – Universidade Federal de Goiás onde pude conhecer uma matemática mais aplicada, fazendo com que eu me envolvesse ainda mais com o raciocínio matemático. A música é algo que eu passei a amar a partir dos meus 11 anos de idade, quando comecei os estudos no violão de forma independente e desde então não parei. Tomei minha decisão e decidi cursar matemática, porém a graduação em música é algo que futuramente pretendo fazer.

Tive a oportunidade de aprender tocar outros instrumentos de maneira independente, pois por meio do violão pude perceber padrões e proporções na música que são aplicadas a todos os instrumentos, como se fosse uma linguagem presente na música, uma língua que os instrumentos musicais usam para conversar entre si. Por falta desse estudo musical que não tive, eu sabia que a matemática estava regendo a melodia que fazia, só não sabia explicar como. Ao ingressar na universidade procurei sempre que possível buscar entender toda a matemática presente na música. De modo mais raso pude entender essa relação, porém por meio desse trabalho pude ter uma profundidade no assunto.

O filósofo e matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) disse certa vez: “A música é um exercício de aritmética secreto e aquele que a ela se entrega as vezes ignora que maneja números”. Sempre pensei de modo semelhante a Leibniz e durante a graduação busquei compreender melhor a matemática musical. Este trabalho tem por finalidade expor essa relação entre a matemática e a música, apresentando o contexto histórico da música no mundo, desde os momentos em que não se existia conhecimento científico sobre essa área até os estudos da música que conhecemos hoje.

2. A MÚSICA NAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES

Ao longo da história, a música se fez presente em diversas civilizações, desenvolvendo um importante papel na sociedade. A música sempre teve ligações com a política, religião e em diversas outras expressões de arte, assim ela sempre foi bem apreciada nos diversos momentos da história da humanidade. Os primeiros contatos do homem com a música se deram cerca de 40 mil anos atrás, quando segundo o musicólogo francês Rolland de Candé relata em sua obra *História Universal da Música* (2001, p.46) o homem buscava imitar os sons que a natureza emitia. Por volta de 9.000 a.C., segundo Candé, surgem as primeiras civilizações que diferenciam o canto da linguagem falada, a dança e música instrumental dos sons emitidos pelas expressões dos gestos. Conforme foi se conhecendo mais sobre música, o conhecimento foi sendo repassado entre as gerações, se tornando uma parte da formação dos povos. Conforme se foi acumulando conhecimento musical, este começou a ser objeto de estudo, assim se iniciando os registros científicos para explicar o fenômeno da música, que até então era visto somente como uma dádiva da natureza.

2.1. A MÚSICA NA MESOPOTÂMIA

A Mesopotâmia foi uma região na qual habitaram os povos sumérios, assírios e babilônios entre 3.000 a.C. a 331 a.C. Por lá foram encontradas flautas, cítaras e harpas feitas de prata e de cana. Os sumérios, de origem incerta e que há 6 mil anos estabeleceram sua civilização, foram os que mais se destacaram culturalmente, de modo que durante cerca de 3 mil anos eles influenciaram outros povos como os assírios, egípcios, cananeus, babilônios, felícios e hebreus. A música era essencial nos momentos solenes e familiares. Não se há registros concretos de uma estrutura de notação musical, porém alguns documentos cuneiformes datados entre os séculos XVIII a.C e XV a.C revelam indícios de que eles tinham conhecimento de uma teoria musical. Segundo a tradução dessas tábuas que foram publicados pelo padre Gurney e Marcele Duchesne-Guillemain entre 1963 a 1969 revelam que o documento relata um sistema para afinação para uma lira de 9 cordas e por conclusão permite dizer que eles também tinham conhecimento das escalas pentatônicas usuais e da escala diatônica de sete notas.

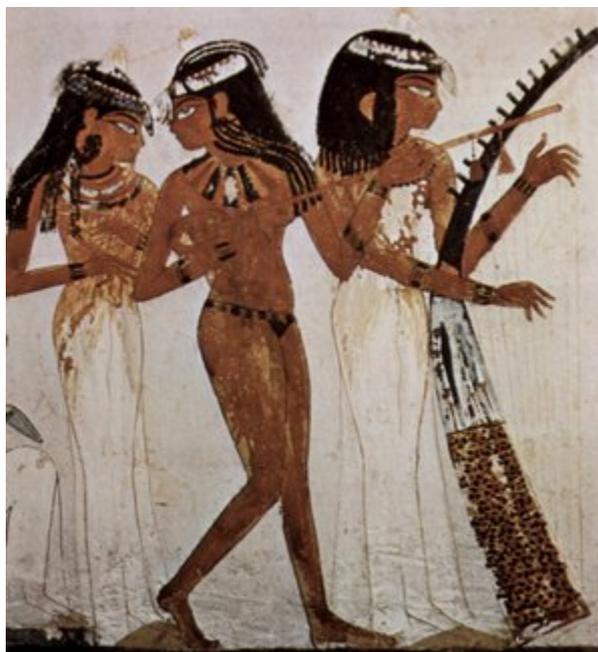
Os assírios deixaram seus registros sobre a música em pinturas, esculturas, baixo-relevos e em textos literários. Nessa civilização os músicos eram apreciados como pessoas que detinham poder e eram mais reverenciados que os sábios, assim tinham um papel relevante perante a sociedade. Quando esse povo vencia batalhas ou tomava posse de um

novo território, buscavam quem eram os músicos e os poupavam, levando-os para cidade assírias para absorverem o maior conhecimento possível musical. Essa civilização é a que se tem mais notícias e indícios de ser a primeira a formar grandes orquestra com quantitativo em torno de 150 componentes entre músicos e cantores.

2.2. A MÚSICA NO EGITO ANTIGO

No Egito a música sempre foi bem presente e registrada em diversas obras presentes em túmulos e templos. Na época do Império Antigo, entre as III e V Dinastias em 2635 a.C. a 2060 a.C., a música egípcia viveu o seu melhor momento de desenvolvimento. Muitas representações demonstram que pequenos conjuntos musicais com harpas, flautas e cantores se apresentavam ao Faraó, assim como também danças que são percebidas em inscrições de coreografias. Durante o Império Médio, entre as XI e XVII dinastias já haviam orquestras com número expressivo de integrantes, nas quais haviam harpas, liras, alaúdes, flautas, oboés, tambores, crótalos e trombetas. Nesse período a música passou a ser essencial em rituais e no exército egípcio.

Figura 1: Mulheres egípcias tocando flauta, alaúde e harpa



Fonte: (MÚSICAVIOLÃO, 2014)

Em escavações feitas nas pirâmides, em túmulos e nos templos subterrâneos no Vale dos Reis, região da margem oeste do Rio Nilo, muitos desses instrumentos foram encontrados. Nenhum dos instrumentos eram de afinação fixa, ou seja, uma afinação que pudesse ser preservada durante muitos anos. Este fato impossibilita saber o padrão de afinação utilizado pelos egípcios e em qual escala musical eles desenvolviam sua música, pois esses instrumentos eram a fonte de estudo mais fiel que poderia dar indícios sobre a

teoria musical do Egito. Não foram encontrados registros de texto sobre o assunto. Um fato que leva a compreender a falta de registros textuais é que em afrescos (obra de gesso ou argamassa feita em paredes ou teto) os músicos aparecem ajoelhados e com roupas de escravo. A posição dos músicos aparentemente não era muito valorizada e conseqüentemente existem poucos registros textuais dessa cultura. A cultura musical egípcia entrou em decadência a partir do momento que muitas invasões passaram a ocorrer. Gregos e romanos passaram a influenciar a música egípcia, de modo que sua identidade musical foi se alterando com as intervenções dos padrões musicais dos invasores.

2.3. A MÚSICA NA GRÉCIA ANTIGA

Os gregos desenvolveram muito na área musical. O próprio termo música é de origem grega. “Mousiké” significa “A arte das musas”. Suas contribuições foram de extrema relevância para o desenvolvimento da música ocidental. Os poemas eram recitados acompanhados do som da Lira, assim caracterizando o gênero poético Lírico. Como os demais povos da antiguidade, os gregos explicavam a música como algo dos deuses, algo essencial para o ser humano alcançar a perfeição.

Com o desenvolvimento das cidades gregas, os filósofos buscavam também compreender a importância da música. Assim surgiram diversas teorias para explicar esse fenômeno. Platão por exemplo defendia que a música deveria estar sob controle do Estado, tendo em vista que ela tinha influência direta com o comportamento humano.

Pitágoras, um dos maiores responsáveis pelos primeiros estudos da música era grego. Na Grécia se desenvolveu uma escala denominada Modos Gregos que se trata de oito escalas diatônicas descendentes. Suas fundamentações para a música em grande parte foram desenvolvidas pelo estudo do Tetracorde, instrumento de 4 cordas esticadas. A música na Grécia sempre foi presente nas celebrações religiosas, onde por exemplo se originou o canto gregoriano, com uma harmonia peculiar que revela traços da cultura grega.

2.4. A MÚSICA DOS HEBREUS

A cultura musical desse povo é possível ser relatada com uma certa precisão graças ao que é encontrado na Bíblia Sagrada, mais especificamente na Torá que reúne uma grande quantidade de textos dos povos judeus e hebreus, contando sua história com riqueza de detalhes. Existem referências musicais entre os descendentes de Adão onde já é relatado o uso de harpas. Porém a cultura musical desse povo se desenvolveu de modo independente e pleno a partir do reinado de Davi (1000 a.C. a 962 a.C.) e isso se deu pelo fato desse rei ser músico.

O povo hebreu por diversas vezes teve de se sujeitar a outros povos e peregrinou por muito tempo. Muito provavelmente sua música sofreu influências de outros povos, como babilônios, caldeus e egípcios. Somente após esse povo ser organizado em 12 tribos em Canaã, por volta de 1250 a.C., a música hebraica pode se desenvolver independentemente. A teoria musical é presente na cultura desse povo, porém com poucos registros. O registro mais famoso se encontra no livro de 1ª Crônicas 15,21 que diz: “E Matitias, Elifeleu, Micneias, Obede-Edom, Jeiel e Azazias, com harpas de tonalidade baixa, para conduzir o canto.” (Bíblia Thompson, 2014). Provavelmente aqui se trata de um ajuste de afinação de oitava mais baixa em algumas das harpas que conduziam a celebração naquela ocasião.

O papel da música para esse povo sempre foi bem evidenciado nos textos com suas aplicações diretas em momentos religiosos e em festividades. Entre os instrumentos mais utilizados estão a harpa, lira, flauta, trombetas, shofar, tambores, crótalos, sistros e cítaras; contemplando instrumentos de corda, sopro e percussão, permitindo a execução de uma música mais elaborada. O lugar com maior expressão musical era no Templo de Jerusalém, devido as constantes cerimônias religiosas e festividades.

2.5. A MÚSICA NA CHINA

Na China os músicos tinham um papel social bem relevante e respeitado, conseqüentemente os instrumentos musicais tiveram grande desenvolvimento. Instrumentos de corda, como por exemplo liras e cítaras e também o sheng, que é uma espécie de órgão tocado com a boca e manuseado por palhetas, já tinha existência no Terceiro Milênio a.C. O sistema de escalas Lyu era utilizado para afinação dos instrumentos. O sistema consistia em tubos diapasones que fixavam os intervalos musicais. Este sistema foi criado no reinado de Huang-Ti (2698 a.C. a 2598 a.C.) e até os dias atuais ainda é utilizado com poucas alterações. Não se tem registros sobre um sistema de notação musical, devido ao fato que em 212 a.C. houve um decreto que ordenou que fosse queimado todos os livros na China. Porém de geração em geração os ensinamentos musicais foram passados e, não somente ecoa até os dias atuais, como também foi influência para demais povos da Ásia.

Na música da atualidade é muito presente a utilização da escala pentatônica, escala que os chineses estabeleceram se fundamentando nos estudos que Pitágoras de Samos (582 a.C. – 500 a.C), filósofo e matemático grego realizou na área musical. A escala é atualmente uma das mais utilizadas entre os músicos, em especial os guitarristas. Os estudos de Pitágoras foram essenciais não só para o desenvolvimento da música chinesa mas como também para a música mundial.

3. OS ESTUDOS DE PITÁGORAS NA ÁREA MUSICAL

As diversas civilizações no mundo desenvolveram contato com a música, por tal motivo temos tanta diversidade musical. Se direcionarmos o olhar somente para o Brasil veremos que em cada região do país existe um tipo de música característica daquela cultura, como por exemplo o sertanejo em Goiás, o axé da Bahia, o pagode do Rio de Janeiro, o tecnobrega do Pará, a vaneira do Rio Grande do Sul, dentre tantos outros exemplos. O Brasil em seus pouco mais de 500 anos de história tem uma rica cultura musical. Olhando para o mundo e mais especificamente para as culturas antigas, certamente houve muito desenvolvimento e estudo musical. Porém não se tem estudos científicos concretos e claros sobre a música antiga até se chegar em Pitágoras.

Pitágoras foi pioneiro nos estudos musicais que são aplicáveis nos dias atuais. Como filósofo, ele buscava compreender como a música era harmoniosa. Até então era bem aceito entre os filósofos que a música era algo que tinha o poder de purificar a mente, curar doenças, acalmar o homem em situações de raiva e agressividade, de um modo geral a música era interpretada como algo que trazia harmonia e tranquilidade. E estavam corretos em empregar à música essas características, pois dificilmente se verá alguém com ânimos exaltados ao se ouvir uma música harmoniosa, tendo por base toda minha leitura de mundo até aqui.

Pitágoras tocava lira e também era compositor desde muito jovem. Até esse momento estamos falando de um mundo com a qual se apreciava música mas não se conseguia explicar cientificamente o que acontecia por trás do som. Em certa ocasião foi despertado em Pitágoras o desejo de compreender e explicar com o auxílio da matemática o que estava por trás de sons harmoniosos, a partir de então se inicia os estudos científicos mais antigos que se tem relatos sobre a teoria musical.

3.1. QUEM FOI PITÁGORAS?

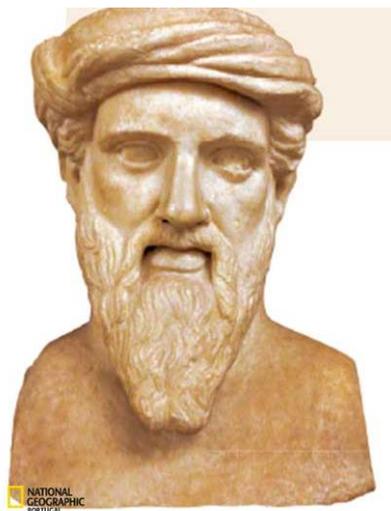
Pitágoras foi um filósofo e matemático grego, que nasceu na ilha de Samos por volta de 582 a. C. É certamente um dos maiores nomes na história da matemática com diversas contribuições que são atuais mesmo após mais de 2.500 anos.

Aos 16 anos de idade, Pitágoras foi enviado para Mileto para estudar com Tales que à época era o estudioso de maior nome. Rapidamente, Tales reconheceu que não tinha mais nada que ensinar Pitágoras e passou a estudar as descobertas matemáticas e geométricas de seu aluno.

Quando adulto, buscando novos conhecimentos Pitágoras buscou expandir seu conhecimento além dos números, passando a estudar sobre ciência e religião de outros

povos. Ele esteve em países como Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito. No Egito ele permaneceu por mais de 20 anos. Buscando compreender melhor os mistérios da religião egípcia, Pitágoras se propôs a ser sacerdote. Quando Cambises conquistou o Egito, Pitágoras teve que seguir para a Babilônia, onde passou a estudar e descobrir como se desenvolviam as ciências naquela região.

Figura 2: Busto de Pitágoras



Fonte: (PORTUGAL, National Geographic, 2021)

A escola pitagórica teve um papel fundamental no desenvolvimento da matemática naquela época. Por volta de 530 a. C. Pitágoras voltou para Samos sua cidade natal com o objetivo de abrir uma escola, porém ao chegar encontrou a ilha governada pelo ditador Polícrates, que não permitia nenhuma escola ou templo atuar durante seu regime. Por este fato, Pitágoras foi expulso da Grécia e partiu para Crotona, cidade no sul da Itália, onde se dedicou a ensinar os filhos dos aristocratas. A escola pitagórica teve um papel fundamental no desenvolvimento da matemática naquela época.

Finalmente em solo italiano, Pitágoras pode fundar a Escola Pitagórica que era mais que uma escola, era uma espécie de irmandade religiosa dedicada ao ensino de matemática, religião, política e filosofia. Os membros da escola eram submetidos a um juramento de sigilo, por este motivo a irmandade era vista sob muita suspeita pelo povo.

Além de matemáticos, a escola abrigava biólogos, astrônomos e anatomistas. Os alunos formados ocupavam cargos importantes no governo local e em todo sul da Itália. Após revoltas populares, a escola pitagórica foi incendiada e Pitágoras foi obrigado a se exilar ao norte da Itália, em Metaponto. Não se tem registros de obras escritas por Pitágoras, porém seus ensinamentos se tornaram populares por seus discípulos.

A Escola Pitagórica dizia que o mundo, os seres vivos e os elementos podiam ser expressos por números. Esse pensamento levou os discípulos de Pitágoras a se tornarem

pioneiros nos estudos da matemática, passando a estudá-la de maneira pura. O Teorema de Pitágoras é uma das mais conhecidas idéias desenvolvidas a partir desse estudo aprofundado da matemática e geometria. O teorema diz: “Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Na área da música Pitágoras desenvolveu estudos que foram o pontapé inicial para a teoria musical. Ele propôs seu estudo através das harmonias, pois acreditava que a música era o melhor meio de se purificar a alma.

3.2. UMA DESCOBERTA POR ACASO

Quando ainda estava na Grécia, Pitágoras passava na frente de um ateliê de ferreiros quando algo lhe chamou a atenção. Ao parar e ouvir os sons produzidos pela pancada dos martelos sobre o metal, ele percebeu que alguns sons eram harmoniosos entre si e outros não. Nesse momento, se entende por harmonia sons que tocados juntos são agradáveis de se ouvir, ou seja, algumas combinações de martelos emitiam sons agradáveis enquanto outras combinações não. Logo ele tratou de pesar cada um dos martelos. Ele pode perceber entre os martelos que faziam som de oitava tinha exatamente metade do peso do martelo de som mais grave que fazia a tônica. O que produzia som da quinta pesava cerca de dois terços do peso do mais pesado, assim como o que pesava cerca de três quartos do mais pesado tinha o som de quarta. Pitágoras percebeu que havia uma relação matemática entre os sons emitidos por razão dos pesos dos martelos.

Pitágoras se propôs a fazer a experiência novamente, agora utilizando de uma corda tensionada. Ele utilizou de um instrumento chamado monocórdio, que basicamente consistia em uma caixa de ressonância que continha uma corda tensionada pelo seus extremos. Notou que as mesmas proporções encontradas no experimento dos martelos eram totalmente válidas e fiéis ao experimento com a corda, sendo que as proporções produziam o mesmo intervalo sonoro. A partir desse momento começa a tomar forma o que hoje conhecemos como teoria musical.

Figura 3: Gravura de Pitágoras em um experimento



Fonte: (Franchinus Gaffurius, 1492)

3.3. O MONOCÓRDIO

O monocórdio é um instrumento musical bem antigo que é composto por uma caixa de ressonância que contém uma corda estendida sobre ela, sendo essa corda tensionada entre dois cavaletes móveis. O seu nome é bem intuitivo, vem dos termos mono (um) e cordio (corda), assim significando uma corda. Se deixarmos apenas uma corda em um violão, harpa ou qualquer instrumento de corda, teremos um monocórdio para experimento. No Brasil temos o berimbau como o mais popular instrumento monocórdio, na qual a cabaça faz o papel de caixa de ressonância.

O monocórdio foi um instrumento muito importante para o estudo de Pitágoras sobre as escalas musicais e as relações sonoras presentes nas vibrações sonoras. Na Idade Média o monocórdio foi bastante usado para auxiliar a afinação da voz e também de outros instrumentos. O monocórdio é um instrumento muito bom para se entender como se originou a teoria musical a partir do experimento de Pitágoras, pois fielmente ele demonstra as propriedades e proporções encontradas. Quando a corda do monocórdio está esticada ela produz uma nota que emite um som em uma frequência particular. Quando esse comprimento de corda é dividido ao meio e tocado, produz a nota da corda solta uma nota uma oitava acima, isto é, a mesma nota é ouvida porém com o som mais agudo. A frequência dessa nota oitavada é o dobro da frequência da nota original. Conforme se vai dividindo ao meio o novo comprimento encontrado, vai se encontrando novas notas oitavadas e conseqüentemente frequências que vão sendo dobradas em relação à anterior.

Figura 4: Monocórdio de Pitágoras



Fonte: (MEDEIROS, Zezito, 2018)

3.4. A TEORIA MUSICAL

A teoria musical é como os músicos explicam e descrevem os fenômenos ouvidos em uma composição musical. A teoria musical define os aspectos centrais da música e fornece um sistema para que os músicos comuniquem suas ideias uns aos outros. Por meio da teoria musical é possível que músicos que jamais tenham tocado juntos, que não falem o mesmo

idioma toquem perfeitamente bem, se ambos tenham este conhecimento. Basicamente a teoria musical se divide inicialmente em melodia, harmonia e ritmo.

A melodia é uma sequência de notas que o ouvinte ouve como um único conjunto. A melodia é o que mais chama atenção em primeiro momento quando se escuta uma música, é um apoio para os demais componentes da música terem referência e é uma combinação de tom e ritmo. A sequência de notas que compõem uma melodia geralmente é a parte mais marcante na memória do ouvinte e ainda de modo geral satisfatória.

A harmonia foi o principal objeto de estudo de Pitágoras na música. A harmonia acontece sempre que duas ou mais notas de diferentes graus são tocadas ao mesmo tempo. Os acordes são um bom exemplo de harmonia. Um acorde reúne uma combinação de notas que são executadas simultaneamente. O acorde só será agradável de se ouvir se houver harmonia entre essas notas. O conceito de harmonia na teoria musical geralmente se refere à construção dos acordes, à sua qualidade e suas progressões. Harmonia só faz sentido se aplicada aos instrumentos tonais, instrumentos que emitem notas em outras palavras e a voz que também consegue emitir notas. Assim sendo, palmas e sapateados, mesmo que executados ao mesmo tempo não criarão harmonia.

O ritmo por sua vez consiste na parte estrutural da música que emite pulsações repetidas e sistematizadas dentro de um compasso. Essas pulsações que geralmente são chamadas de batida possuem uma determinada velocidade para sua execução, assim regendo o tempo da música. Notas, melodia e acordes podem ser de modo geral descritos como vibrações no ar que possibilitam que nossos tímpanos detectem-nas. O ritmo já é mais relacionado com a forma humana de perceber o tempo, algo que uns tem facilidade para detectar e outros não, porém com treino tudo se torna possível.

3.5.A DESCOBERTA DA ESCALA PENTATÔNICA

Hoje existem muitas escalas musicais e isso se deve aos muitos povos e culturas que criaram suas próprias escalas musicais. Um exemplo foi o povo chinês, que se fundamentando nos estudos já existentes de Pitágoras, com o monocórdio contribuíram para o avanço científico da música.

O experimento chinês consistiu em tocar a nota Dó em uma corda esticada e depois dividir essa corda em 3 partes iguais. Feita essa divisão, o som emitido por essa terça parte da corda foi a nota Sol. Ao observar que essas notas harmonizavam entre si, eles repetiram o procedimento a partir da nota Sol, novamente dividindo esse pedaço de corda em 3 partes iguais, resultando esse novo pedaço na nota Ré. Essa nota também tinha harmonia com a nota Sol e com a nota Dó. Repetindo o processo mais duas vezes se chegou a nota Lá e Mi, nessa ordem e ambas também harmonizavam entre si e as notas anteriores.

Repetindo o procedimento, chegaram na nota Si, porém agora não houve harmonia dessa nota com a primeira do experimento, a nota Dó. Essa estranheza se deu porque as notas eram muito próximas uma da outra, assim causando um desconforto ao se ouvir as duas serem tocadas ao mesmo tempo. Por este fato, os chineses optaram em finalizar sua escala na notas Dó, Sol, Ré, Lá e Mi. Essas notas foram base para a composição da música chinesa, estabelecendo-se uma escala com 5 notas, batizada de escala pentatônica, que significa cinco tons ou sons. Por soar muito bem essa escala representou muito a cultura ocidental por suas características de ser harmoniosa e estável.

4. A MATEMÁTICA DA MÚSICA

A partir do momento em que a música deixou de apenas ser apreciada e se tornou objeto de estudo, em sua estrutura pode ser observadas relações matemáticas. O compasso musical segue um tempo que é constante, assim permitindo que notas e acordes ecoados por instrumentos e vozes se encaixem e forme a harmonia musical. Em outras palavras, os padrões matemáticos encontrados na música são essenciais para se produzir sons agradáveis. Nas três partes da teoria musical; ritmo, harmonia e melodia a matemática é muito presente em estruturas de frações e proporções. A partir do experimento de Pitágoras, podemos observar a matemática que rege a música, que por mais que com o passar do tempo houveram algumas pequenas modificações, o que se foi investigado e posteriormente dado como base para a escala musical se perdura até os dias atuais. Vejamos aqui alguns tópicos que explicam sobre essa matemática que está implícita na música.

4.1. A FREQUÊNCIA DAS NOTAS MUSICAIS

A frequência é um assunto da Física, porém com toda uma estrutura matemática em sua estrutura. Notas musicais emitem som, e som é uma onda com uma determinada frequência. De forma mais direta, as notas musicais são sons com determinadas frequências que entre si obedecem a uma relação matemática exata. A escala musical é definida pela sequência de sons que podem estar disposta de forma ascendente ou descendente, em conformidade com a frequência que se fundamenta a música. As escalas musicais foram obtidas a partir da observação de uma relação matemática bem definida entre as frequências de cada nota musical.

A frequência determina a quantidade de eventos que ocorrem em certo espaço de tempo. Esses eventos ocorrem em ciclos para que exista uma frequência. Para se encontrar a frequência de um conjunto de evento cíclicos é necessário dividir o número total de eventos cíclicos pelo tempo total em que eles ocorreram. Assim teremos a informação na ordem de

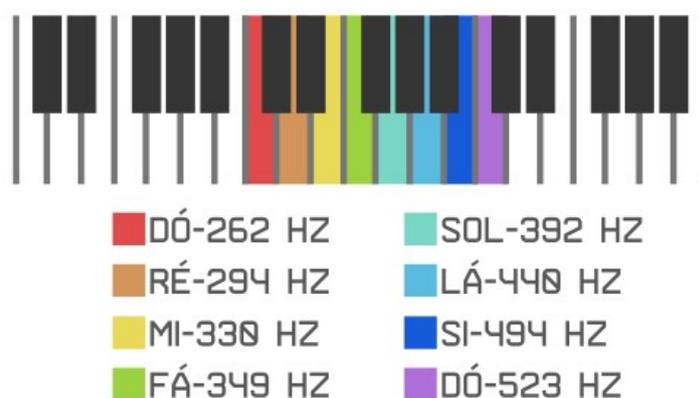
ciclos por segundo, por minuto, por hora, dependendo da unidade de tempo utilizada no cálculo. Sendo f a frequência e T o período de tempo, temos a fórmula:

$$f = \frac{1}{T}$$

Para padronizar a grandeza frequência, existe uma unidade de medida chamada Hertz (Hz). Um Hertz equivale quantos ciclos ocorreram em um segundo. Para rotações, por exemplo, seriam as rotações por segundo.

Um objeto, que executa um mesmo movimento 80 vezes por segundo, tem uma frequência de 80 Hertz ou 80 Hz. Na música, cada nota musical tem sua frequência em Hertz, conforme a imagem do piano abaixo:

Figura 5: Piano com as frequências das notas



Fonte: (DÓ-RÉ-MI, Projeto 11, 2019)

Um exemplo prático para entender a frequência em Hertz e as notas musicais é que se pudéssemos dar 262 passos em um segundo, ecoaria dos passos a nota Dó. Se fossem 440 passos em um segundo, ecoaria a nota Lá. Em 523 Hz temos novamente um Dó, porém mais agudo agora. Quanto maior a quantidade de Hertz, se produz uma nota mais aguda.

4.2. FRAÇÕES E PROPORÇÕES

As frações são presentes em quase tudo quando se trata de teoria musical. Como vimos, Pitágoras descobriu uma relação entre os pesos dos martelos e assim começou a construir a teoria musical. Buscando encontrar a mesma lógica manuseando o monocórdio, Pitágoras observou que quando a corda era dividida ao meio, era emitida a mesma nota uma oitava acima, ou seja, a mesma nota porém com o som mais agudo. Essa relação de oitava obedece uma proporção de $\frac{1}{2}$ em relação ao som da corda solta e a corda tensionada ao meio. Repetindo o experimento de se dividir ao meio, se encontra a mesma nota, porém agora uma

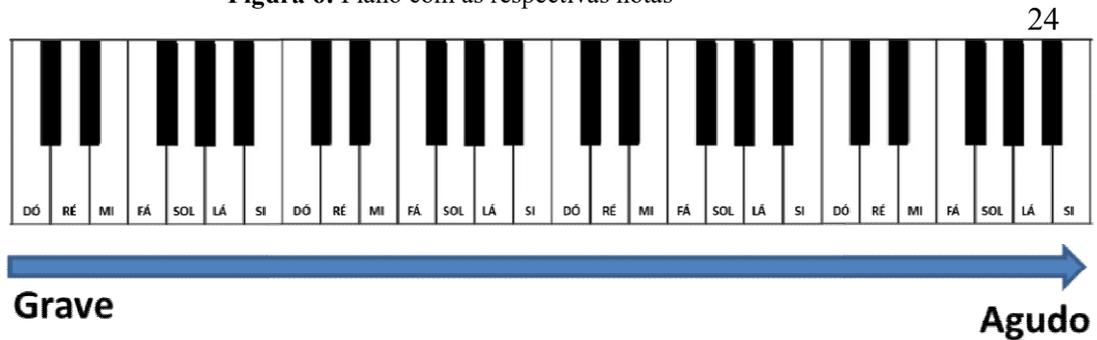
oitava acima em referência a corda que foi dividida ao meio, obedecendo a proporção $\frac{1}{2}$ e duas oitavas acima se comparada a nota inicial da corda solta. Se sucessivamente for repetido o procedimento novas oitavas de uma mesma nota vão sendo encontradas, com o som sendo cada vez mais agudo conforme se vai encurtando o pedaço de corda. Se por exemplo a nota emitida pela corda solta for a nota Dó, todas as notas encontradas se dividindo sucessivamente ao meio a corda serão também a nota Dó emitidas com o som cada vez mais agudo. Sendo tocadas juntas soaram harmoniosas, porém com uma nota não se poderia ir muito longe com uma composição.

Pitágoras então dividiu a corda em 3 partes e tocando $\frac{2}{3}$ da corda ele encontrou um novo som diferente do som emitido pela corda solta, assim se configurando uma nova nota que precisava receber um novo nome. Ele percebeu que essa nova nota soava bem quando era tocada junto com a nota emitida pela corda solta. A nota que se encontra em $\frac{2}{3}$ da corda foi chamada de quinta nota da escala, em comparação a corda solta. Se a nota da corda solta era um Dó, essa nota encontrada em $\frac{2}{3}$ da corda é Sol. Posteriormente ele dividiu a corda em 4 partes e ao tocar $\frac{3}{4}$ da corda, ele pode observar um novo som que harmonizava com as duas outras notas encontradas anteriormente. Esse novo som na proporção de $\frac{3}{4}$ foi chamado de quarta nota da escala em comparação á corda solta. Sendo a corda solta a nota Dó, a quarta é a nota Fá. Utilizando as proporções de $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente, tônica (corda solta), quinta, quarta e oitava, Pitágoras pode encontrar um som harmonioso de se ouvir, fazendo combinações desses sons e abrindo possibilidades de diversas composições. Como a tônica e a oitava são a mesma nota, deduziu-se que todas as notas que viessem a pertencer a escala musical deveriam estar no intervalo entre 1 e $\frac{1}{2}$. Sendo T a proporção da corda solta, toda nova nota n deve estar no intervalo $T < n < \frac{1}{2}T$. Pitágoras não parou por aí e continuando seu experimento encontrou outras 4 notas musicais, com a qual se é observada as seguintes proporções:

Intervalo	Razão entre o comprimento das cordas
Oitava	2:1
Quinta	3:2
Quarta	4:3
Sexta	27:16
Terça	81:64
Segunda	9:8
Sétima	243:128

Ao todo foram encontradas 7 notas musicais, que hoje conhecemos como Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si formando a escala musical diatônica, hoje chamada de escala maior.

Figura 6: Piano com as respectivas notas



Fonte: (Descomplicando a música)

4.3. A PROPORÇÃO ÁUREA

A proporção áurea, também conhecida como seção áurea, número áureo, número de ouro ou proporção de ouro é uma constante real algébrica irracional que é denotada pela letra grega Φ (phi) que tem o valor arredondado de 1,618. Essa proporção sempre foi muito utilizada desde a antiguidade, com grande evidência para sua aplicação na arte. Diversos artistas utilizaram dela em seus quadros, como por exemplo a famosa obra Monalisa, de Leonardo da Vinci. Na arquitetura também é muito presente desde os tempos passados. Na Grécia Antiga foi muito utilizada, como no famoso exemplo do Templo de Parthenon, sendo observado suas linhas retas e simétricas que obedecem o padrão áureo. No Egito Antigo é notado na construção da Pirâmide Quéops, onde cada bloco é 1,618 vezes maior que o bloco da camada acima e em seu interior as salas possuem um comprimento 1,618 vezes maior que a largura. Até os dias atuais os monumentos citados permanecem de pé mesmo após mais de 4.000 anos passados, como é o caso da Pirâmide Quéops, fato que sugere que houve a aplicação dessa proporção em suas respectivas construções.

Essa proporção também é encontrada nas formas geométricas, como por exemplo em um pentágono regular. Ao se construir um pentagrama regular, o pentágono menor está em proporção com o pentágono maior, onde a razão da medida entre os lados é igual ao quadrado da proporção áurea e a razão entre as áreas é a quarta potência da proporção áurea. Pitágoras ao perceber que as proporções do pentagrama eram a proporção áurea, passou então a adotar o símbolo como representação da Irmandade Pitagórica, que era uma irmandade secreta e seus membros eram identificados ao apresentar um pentagrama inscrito na palma da mão.

A proporção ainda é encontrada no corpo humano, onde diversas medidas se comparadas geram uma razão que leva a proporção áurea, como por exemplo a razão da medida da altura humana e a medida do umbigo até o chão. A proporção também é encontrada nos vegetais, plantas, flores e nos animais. Na música essa proporção também é encontrada em meio a construção de escalas.

Na música a proporção áurea é encontrada na formação de acordes. Vale relembrar

que um acorde é um conjunto de notas musicais tocadas ao mesmo tempo de modo a produzir um som harmonioso. Esse fato é evidenciado pelo fato de a formação de um acorde seguir os padrões da Sequência de Fibonacci. Essa sequência é uma complementação do que revela a proporção áurea.

A sequência foi descoberta pelo matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), que é mais conhecido com Fibonacci. Leonardo de Pisa é considerado por muitos o mais talentoso matemático ocidental no período da Idade Média. Suas maiores contribuições foi a sequência de Fibonacci e sua participação direta na introdução dos algarismos arábicos.

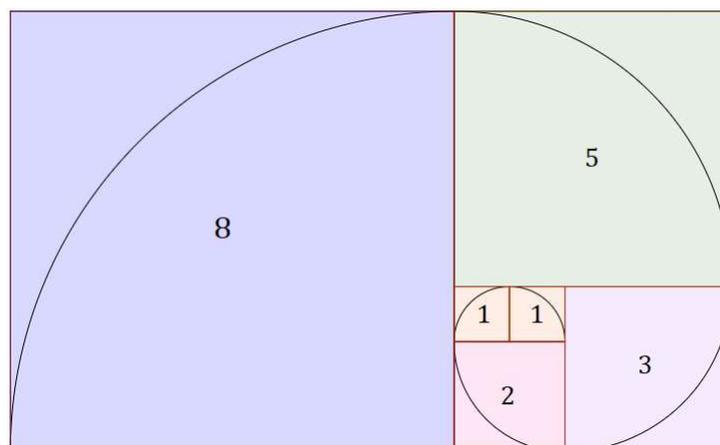
Figura 7: Gravura de Fibonacci



Fonte: (Leonardo de Pisa, Wikipédia)

A sequência de Fibonacci consiste em uma sequência de números inteiros que começa pelos números 0 ou 1, na qual cada termo subsequente é resultado da soma dos dois anteriores. Os primeiros elementos da sequência são: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597... A relação direta dessa sequência com a proporção áurea é que dados dois números vizinhos da sequência, sendo o menor o numerador e o maior o denominador, a razão entre esses termos converge para a constante de 1,618, o número áureo. Observa-se:

$\frac{2}{1}$	2
$\frac{3}{2}$	1,5
$\frac{5}{3}$	1,6666667
$\frac{13}{8}$	1,625
$\frac{34}{21}$	1,619047619
$\frac{1597}{987}$	1,618034447

Figura 8: O espiral de Fibonacci

Fonte: (Sequência de Fibonacci, Infoescola)

Em um piano, tem-se em uma oitava 13 teclas, das quais são 8 brancas, 5 pretas sendo que as pretas estão dispostas em grupos de 2 e 3. O que esses números tem em comum? Os números 2, 3, 5, 8 e 13 estão presentes no início da sequência de Fibonacci. Essa organização das teclas permite a criação de acordes de uma maneira lógica. Os acordes por sua vez obedecem o seguinte padrão: se fixa uma nota, as demais que irão compor o acorde são a 3ª, 5ª e 8ª nota, de modo semelhante aos primeiros experimentos de Pitágoras. Novamente somos conduzidos à sequência de Fibonacci e a proporção áurea ao analisarmos os números 1, 3, 5 e 8. É certo que se produzirá um som harmonioso em qualquer instrumento ou arranjo vocal se forem seguidas essas proporções.

Se porventura uma nota fugir desse padrão teremos o “diabolus in musica”, termo usado pela igreja na época da Inquisição para se referir aos sons degradáveis de se ouvir. Na realidade quando isso acontecia, o motivo era a falta de harmonia, que só é encontrada se seguida a escala musical que tras consigo proporções perfeitas.

A proporção áurea encanta gerações por ser tão enigmática e difícil de se explicar o motivo dela estar presente na natureza e na música. Algo perfeito está presente em tudo, de modo que há harmonia e proporção naquilo que se é apreciável. Os filósofos antigos remetem à divindade tais feitos, e até então novas descobertas são conhecidas pela ciência, porém a busca por responder esse enigma não chegou ao fim. Assim como os antigos filósofos acredito que um Criador fez tudo de modo harmonioso e perfeito, essa talvez seja sua assinatura em tudo que criou.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A música que é tão apreciada e faz parte de todas as culturas durante gerações, é apreciada sem um olhar do motivo de ser agradável de se ouvir. Em geral as músicas apreciadas estão presentes em momentos de descontração, felicidade, superação, conquistas, dentre os mais nobres motivos e a reação do ser humano ao escutá-las é de meditar, alegrar, refletir e de modo geral inevitavelmente meche com o sentimento das pessoas. Em contrapartida uma música mal executada pode trazer transtornos, como ânimos exaltados, raiva e incômodo o que se busca evitar.

A música tem um papel social muito importante, por meio dela é possível gerar paz e harmonia entre as pessoas. Para que essa harmonia aconteça, a música precisa ser executada de maneira responsável. Por trás dessa harmonia, existe muita matemática, assim a música é regida pelas proporções e frações. Sem a matemática a música seria por muitas vezes desagradável.

As contribuições de Pitágoras e Fibonacci foram muito importantes para o desenvolvimento musical de modo a permitir uma linguagem universal onde a música de cada cultura pode ser compreendida por meio dos padrões matemáticos existentes nela. A matemática e a música abrem fronteiras e se bem compreendidas trazem inúmeros benefícios para a sociedade.

6. REFERÊNCIAS

DOCZI, György. O poder dos limites, Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura. **Editora Mercúrio Jovem**, p. 1-13, 2012

PEREIRA, Marcos. Matemática e Música de Pitágoras até os dias de hoje. **Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro**, 2013.

SILVEIRA, Gustavo dos Santos; DORNELLES, Pedro Henrique Batista; LOPES, Naira de Fátima. Matemática “en la música”. **Instituto Federal Farroupilha**, 2019.

MEDEIROS, Zezito Gomes. **Sociedade Brasileira de Matemática Regional – Mato Grosso**, 2018.

CANDÉ, Roland de. **Editora Martins Fontes**, 2001.

BÍBLIA. Português. Bíblia de Referência Thompson. Tradução de João Ferreira de Almeida. Edição rev. e corr. Compilado e redigido por Frank Charles Thompson. São Paulo: **Vida**, 1992.