



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ESTUDO DO PERÍODO DO PÊNDBULO SIMPLES DEPENDENTE DA AMPLITUDE DE OSCILAÇÃO

EDUARDO FERNANDES DE OLIVEIRA

GOIÂNIA – GO
DEZEMBRO DE 2020

ESTUDO DO PERÍODO DO PÊNDULO SIMPLES DEPENDENTE DA AMPLITUDE DE OSCILAÇÃO

EDUARDO FERNANDES DE OLIVEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Pontifícia Universidade Católica de Goiás como pré-requisito necessário para a obtenção da aprovação na disciplina MAF1319, TCC II, bem como para a conclusão do curso de Licenciatura Plena em Física. Monografia realizada sob a orientação do professor Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.

GOIÂNIA – GO
DEZEMBRO DE 2020

Resumo

Os movimentos periódicos e oscilatórios são de grande interesse devido às suas diversas aplicações tanto no campo da Física quanto da engenharia e de áreas técnicas. Um estudo aprofundado sobre a física envolvida nestes movimentos periódicos é de extrema importância para uma descrição do fenômeno em si e para a determinação das leis que regem o seu movimento. O conhecimento destas leis traz uma melhor clareza sobre o fenômeno em questão dando suporte para possíveis aplicações. Aqui neste trabalho tratamos especificamente do movimento de um pêndulo simples considerando não apenas pequenas oscilações como é de costume, mas também considerando o efeito de grandes amplitudes de oscilação. Para isto é necessário obter uma solução mais geral para o problema sem considerar aproximações rotineiramente utilizadas para pequenas oscilações. Assim, foram obtidas neste trabalho as equações diferenciais de movimento que caracterizam e determinam o movimento de um pêndulo simples considerando desde pequenas até grandes amplitudes de oscilação. Estas equações diferenciais foram solucionadas por meio de técnicas de solução de equações diferenciais usando-se métodos de expansão de funções. Foi possível verificar, tanto experimentalmente quanto teoricamente, que para o movimento do oscilador harmônico simples, o seu período de oscilação aumenta e a sua frequência angular diminui com o aumento da amplitude de oscilação. Foi também determinada a faixa de validade da aproximação para pequenas amplitudes de movimento.

Sumário

Capítulo 1	5
MOVIMENTOS PERIÓDICOS	5
1.1 Introdução	5
1.2 Período e Frequência	5
1.3 Exemplos de Osciladores	6
1.3.1 Pêndulo Simples	6
1.3.2 Oscilador Harmônico Linear Simples	7
1.4 Oscilações Amortecidas	8
1.5 Oscilações Forçadas	8
Capítulo 2	10
PÊNDULO SIMPLES	10
Capítulo 3	15
A DEPENDÊNCIA DO PERÍODO DO PÊNDULO SIMPLES COM A AMPLITUDE DE OSCILAÇÃO	15
Bibliografia	29

Capítulo 1

MOVIMENTOS PERIÓDICOS

1.1 Introdução

A introdução de movimentos periódicos é de grande importância para a física sendo aplicado, por exemplo, para o estudo do movimento ondulatório. As noções de período, frequência e amplitude que serão introduzidos aqui são de grande utilidade para o estudo de fenômenos físicos periódicos.

1.2 Período e Frequência

Diz-se que um movimento é periódico quando, para um mesmo referencial, se repete identicamente em intervalos de tempos sucessivos e iguais. O termo periódico quer dizer que, depois de um lapso de tempo, o sistema recupera sua configuração original e em seguida o movimento começa a se repetir. O movimento, portanto, ocorre em ciclos repetitivos, cada um dos quais, exatamente igual a qualquer outro. Movimentos periódicos ocorrem frequentemente na natureza e ocupam uma posição de grande importância na Física. Como exemplos, podemos citar o movimento de rotação da Lua em torno da Terra e o movimento de translação da Terra em torno do Sol. Movimentos periódicos que podem ser descritos em termos de uma única coordenada de distância, como o movimento para cima e para baixo de uma massa suspensa por uma mola vertical, são chamados de movimentos oscilatórios ou vibratórios. O movimento de uma corda de violino, o movimento de um pêndulo oscilando, o movimento dos átomos num sólido são todos exemplos de movimento oscilatório. O movimento periódico pode ser chamado também de *movimento harmônico*.

Quando um corpo executa um movimento, indo e voltando sobre uma mesma trajetória, dizemos que ele está vibrando ou oscilando entre dois pontos. Se o corpo vai de uma posição extrema à outra e retorna à posição inicial, dizemos que ele efetuou uma vibração completa ou um ciclo.

O tempo que um corpo, em movimento periódico, gasta para realizar um ciclo completo é denominado *período* (T) do movimento. Por exemplo, o período de rotação da Lua em torno da Terra é de aproximadamente 28 dias e o de translação da Terra em torno do Sol de 365 dias.

Nos movimentos oscilatórios o número de vibrações completas (ou número de ciclos) N que o corpo efetua por intervalo de tempo Δt é denominado *frequência* (f) do movimento:

$$f = \frac{N}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Devemos notar que para uma única oscilação temos $N = 1$ e $\Delta t = T$, logo podemos escrever que

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.2)$$

A unidade de frequência no SI é 1/s (segundo a menos 1). Esta unidade de 1 vibração/s ou 1 ciclo/s foi denominada de hertz (1 hertz = 1/s), em homenagem ao famoso físico alemão do século XIX Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894). Se o corpo oscila com uma frequência f , podemos obter da equação (1.2) que o seu período de vibração (T) será dado por

$$T = \frac{1}{f}, \quad (1.3)$$

Desta relação, podemos concluir que quanto maior for a frequência com que o corpo oscila menor será o seu período e vice-versa. Usando a equação (1.1) poderíamos ainda escrever a equação (1.3) como

$$T = \frac{\Delta t}{N}. \quad (1.4)$$

1.3 Exemplos de Osciladores

1.3.1 Pêndulo Simples

Um pêndulo simples (veja Figura 1.1) é um fio inextensível e de massa desprezível fixo em uma de suas extremidades e com um corpo de massa m preso à sua outra extremidade. Quando retirado de sua posição de equilíbrio e solto o pêndulo começa a oscilar. A *amplitude do movimento* será a distância entre a posição de equilíbrio e a posição extrema ocupada pelo corpo que oscila. É possível demonstrar que o

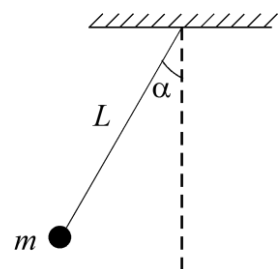


Figura 1.1

período de oscilação de um pêndulo simples oscilando com pequena amplitude ($\alpha < 15^\circ$) é dado pela expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (1.5)$$

onde L é comprimento do pêndulo simples e g é a aceleração da gravidade local.

A expressão (1.5) nos mostra que: quanto maior for o comprimento L do pêndulo, maior será o seu período; quanto maior for a aceleração da gravidade no local onde o pêndulo oscila, menor será o seu período; o período não depende da massa m do pêndulo.

1.3.2 Oscilador Harmônico Linear Simples

Um bloco de massa m conectado a uma mola está inicialmente em repouso na posição x_0 , sobre um piso horizontal sem atrito (veja Figura 1.2). O bloco é então deslocado de sua posição inicial até o ponto x_1 esticando-se a mola. O bloco é então solto. Este irá, então, se movimentar entre os pontos x_1 e x_2 , sendo $|x_1| = |x_2|$. A amplitude A do movimento será o módulo do deslocamento máximo realizado pelo movimento, ou seja $A = |x_1| = |x_2|$. Este constitui um exemplo de um *oscilador harmônico linear*. Neste caso é possível demonstrar que o período de seu movimento é

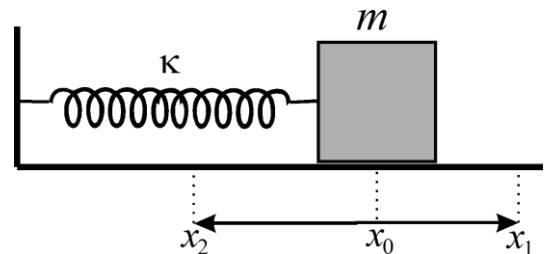


Figura 1.2

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}}, \quad (1.6)$$

onde T é o período (ou seja, o tempo necessário para que o objeto realize um ciclo completo), m é a massa do objeto que está oscilando e κ é a constante elástica da mola. Observe que neste caso, ao contrário do pêndulo, o período depende da massa do corpo que oscila – quanto maior a massa maior será o período do pêndulo.

Nos sistemas que se comportam como osciladores sempre existe uma força que tende a retornar o objeto oscilante para a sua posição de equilíbrio. Esta força é chamada de *força restauradora*. No caso do pêndulo a força restauradora está associada à gravidade e no caso

do oscilador harmônico simples a força restauradora está associada às propriedades elásticas da mola.

1.4 Oscilações Amortecidas

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa dizemos que o movimento é *amortecido*. Na prática todos os movimentos oscilatórios são amortecidos por algum tipo de força. O movimento de um pêndulo oscilando no ar, por exemplo, vai lentamente diminuindo porque o ar exerce uma força viscosa sobre o pêndulo. Já o movimento de um bloco conectado a uma mola será amortecido pelo ar e também pela força de atrito existente entre o bloco e o piso. Para um oscilador amortecido a energia mecânica não é constante e decresce com o decorrer do tempo.

1.5 Oscilações Forçadas

As oscilações naturais (ou próprias) de um corpo são aquelas que ocorrem quando o corpo é deslocado e depois abandonado, oscilando livremente. Agora, quando o corpo está sujeito a uma força externa oscilatória, a oscilação resultante do corpo é denominada *oscilação forçada* e terá a mesma frequência da força externa e não a sua frequência natural de oscilação. A resposta do corpo a uma força externa oscilatória dependerá da relação entre a sua frequência natural de oscilação e a frequência aplicada. Teremos agora neste caso duas frequências:

- i) A frequência natural do sistema, f_0 , que é a frequência na qual o sistema iria oscilar se fosse deslocado e depois deixado livremente a oscilar, e
- ii) a frequência, f , da força externa.

Um exemplo de oscilação forçada é a que ocorre quando uma pessoa empurra outra em um balanço. Outro exemplo de oscilação forçada é quando uma tropa de soldados marcha de forma cadenciada por sobre uma ponte. A sucessão de pisadas cadenciadas na ponte fará com que ela oscile não com sua frequência natural, mas sim com a frequência da força externa que lhe é aplicada. Uma sucessão de pequenos impulsos, gerados por uma força externa aplicada a um corpo, pode provocar grandes amplitudes de movimento. Existe um valor característico da

frequência externa para o qual a amplitude de oscilação atinge um valor máximo. Esta condição é chamada de *ressonância* e o valor da frequência externa para o qual a ressonância acontece é chamada de *frequência de ressonância*. Esta condição de ressonância ocorre quando $f \approx f_0$. Uma soprano quando quebra uma taça de cristal está usando o princípio de ressonância.

No caso da construção de um prédio industrial, por exemplo, deve-se saber que tipo de máquina irá funcionar em seu interior e quais as frequências naturais da estrutura do prédio para se evitar que a frequências naturais de oscilação do prédio coincidam com as das máquinas que irão funcionar naquele local.

Capítulo 2

PÊNDULO SIMPLES: APROXIMAÇÃO PARA PEQUENAS OSCILAÇÕES

Um pêndulo simples é por definição um fio inextensível e de massa desprezível fixo em uma de suas extremidades e com um corpo de massa m preso à sua outra extremidade (veja Figura 1.1). Quando retirado de sua posição de equilíbrio e solto o pêndulo começa a oscilar. A amplitude do movimento será a distância entre a posição de equilíbrio e a posição extrema ocupada pelo corpo que oscila. A Fig. 2.1 apresenta um esquema das forças atuantes e as suas decomposições.

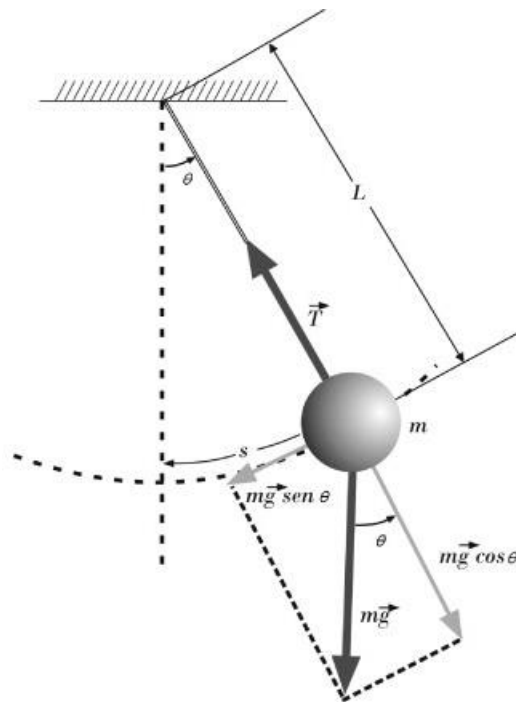


Figura 2.1 Esquema de forças para um pêndulo simples.

Duas forças atuam na partícula de massa m , o peso \vec{P} e a tensão \vec{T} . O peso \vec{P} pode ser escrito como a soma:

$$\vec{P} = \vec{P}_\theta + \vec{P}_r = -P_\theta \hat{\theta} + P_r \hat{r} \quad (2.1)$$

sendo:

$$\text{sen}\theta = \frac{P_\theta}{P} \rightarrow P_\theta = P\text{sen}\theta = mg\text{sen}\theta \quad (2.2)$$

$$\text{cos}\theta = \frac{P_r}{P} \rightarrow P_r = P\text{cos}\theta = mg\text{cos}\theta \quad (2.3)$$

Usando a 2ª lei de Newton:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = -P_\theta\hat{\theta} + P_r\hat{r} - T\hat{r} \quad (2.4)$$

$$F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} = -P_\theta\hat{\theta} + P_r\hat{r} - T\hat{r} \quad (2.5)$$

Logo:

$$\begin{cases} F_r = P_r - T \\ F_\theta = -P_\theta \end{cases} \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

Podemos também escrever a Eq. (2.4) como:

$$m\vec{a} = -P_\theta\hat{\theta} + P_r\hat{r} - T\hat{r} \quad (2.8)$$

Usando a aceleração em coordenadas polares:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \quad (2.9)$$

Para pêndulo temos:

$$r = L \rightarrow \dot{r} = 0 \text{ e } \ddot{r} = 0$$

Logo:

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.8):

$$m(-L\dot{\theta}^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}) = -P_\theta\hat{\theta} + P_r\hat{r} - T\hat{r}$$

Logo:

$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = P_r - T \\ mL\ddot{\theta} = -P_\theta \end{cases} \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.12) temos:

$$\begin{aligned}
 mL\ddot{\theta} &= -mg\text{sen}\theta \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{g}{L}\text{sen}\theta \\
 \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Para pequenos ângulos podemos fazer $\text{sen}\theta \approx \theta$, logo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{2.14}$$

Definindo:

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{L} \tag{2.15}$$

Temos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{2.16}$$

Esta é uma equação diferencial de 2ª ordem, homogênea e de coeficientes constantes.

Generalizando:

$$a\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + b\frac{dY(t)}{dt} + cY(t) = 0 \tag{2.17}$$

Temos como solução:

$$Y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}, \text{ se } r_1 \neq r_2 \tag{2.18}$$

$$Y(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{rt}, \text{ se } r_1 = r_2 \tag{2.19}$$

onde r é a solução de:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.20}$$

Comparando a Eq. (2.20) com a Eq. (2.17) temos:

$$a = 1; b = 0 \text{ e } c = \omega_0^2,$$

logo:

$$r^2 + 0 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow r^2 = -\omega_0^2 \rightarrow r = \sqrt{-\omega_0^2}$$

Pela equação (2.15) notamos que $\omega_0^2 > 0$, pois g e L são quantidades positivas. Assim:

$$r = \pm i\omega \begin{cases} r_1 = +i\omega_0 \\ r_2 = -i\omega_0 \end{cases}$$

Substituindo estes valores de r_1 e r_2 na Eq. (2.18) temos:

$$\theta(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Usando a fórmula de Euler a equação anterior fica:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= c_1 [\cos(\omega_0 t) + i \operatorname{sen}(\omega_0 t)] + c_2 [\cos(\omega_0 t) - i \operatorname{sen}(\omega_0 t)] \\ \theta(t) &= (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) - (c_2 - c_1) i \operatorname{sen}(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Definindo:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = A \cos \alpha & (2.22a) \\ (c_1 - c_2) i = A \operatorname{sen} \alpha & (2.22b) \end{cases}$$

onde α é uma constante a Eq. (2.21) fica:

$$\theta(t) = A [\cos \alpha \cdot \cos(\omega_0 t) - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t)] \quad (2.22)$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

Identificando $a = \alpha$ e $b = \omega t$, a Eq. (2.22) fica:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (2.23)$$

Onde A é a amplitude do movimento, ω_0 é a frequência angular e α é a fase inicial. A Eq. (2.23) é a solução para $\theta(t)$ para o problema do pêndulo físico considerando-se pequenas oscilações.

Observamos que tomando uma definição diferente nas Eqs. (2.2a) e (2.2b), por exemplo, $c_1 + c_2 = A \operatorname{sen} \alpha$ e $(c_2 - c_1) i = A \cos \alpha$, teríamos obtido como solução:

$$\theta(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) \quad (2.24)$$

Voltamos à Eq. (2.23) tomando $\alpha = 0$ e $A = \theta_0$, temos simplesmente:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad (2.25)$$

Onde θ_0 é o ângulo $\theta(t)$ para $t = 0$. Pela Eq. (2.15) a frequência angular ω será:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2.26)$$

E lembrando que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, o período T_0 será:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.27)$$

Note-se pelas Eqs. (2.26) e (2.27) que para pequenas oscilações a frequência angular ω_0 e o período T_0 independem da amplitude de oscilação do movimento.

Capítulo 3

A DEPENDÊNCIA DO PERÍODO DO PÊNDBULO SIMPLES COM A AMPLITUDE DE OSCILAÇÃO

O problema do movimento do pêndulo simples para grandes amplitudes pode ser tratado em termos da energia mecânica total E do sistema, ou seja:

$$E = K + V, \quad (3.1)$$

onde K é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema. Note pela Fig. 3.1 que:

$$V = mg\Delta y$$

$$V = mg(y_2 - y_1)$$

$$V = mg(-L\cos\theta - 0)$$

$$V(\theta) = -mL\cos\theta \quad (3.2)$$

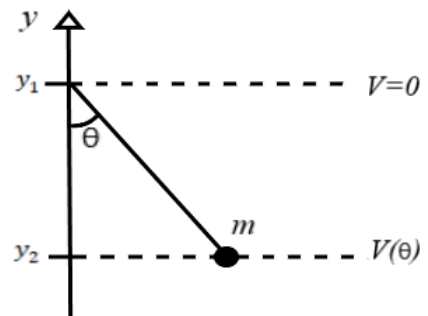


Figura 3.1

A energia cinética K é dada por:

$$K = \frac{m}{2}v^2$$

e usando que a velocidade v pode ser descrita em termos da variável θ como $v = L\dot{\theta}$, a expressão anterior para a energia cinética K do sistema pode então ser expressa como:

$$K = \frac{m}{2}(L\dot{\theta})^2$$

$$K = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 \quad (3.3)$$

Substituindo as Eqs. (3.2) e (3.3) na Eq. (3.1) tem-se:

$$E = \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta \quad (3.4)$$

Tomaremos a simplificação que não há forças dissipativas no sistema e, portanto, a energia E será constante. A Fig. 3.2 mostra um gráfico da energia potencial $V(\theta)$.

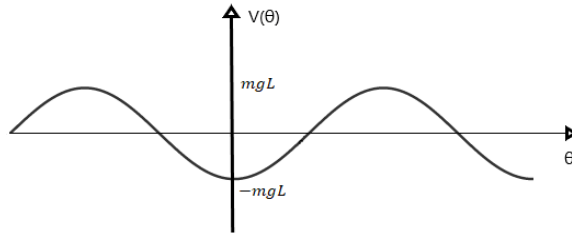


Figura 3.2 Energia potencial do oscilador em função do ângulo θ .

Verifica-se que para $-mgL < E < mgL$ o movimento é oscilatório. Se a massa m estivesse presa em uma haste rígida (de massa desprezível) de comprimento L em vez de um fio, o pêndulo poderia girar em um círculo se $E > mgL$. Mesmo assim esse movimento ainda seria periódico, pois o pêndulo realizaria uma revolução completa a cada vez que θ aumenta de 2π . Aqui trabalharemos somente o caso do pêndulo simples composto de um fio de comprimento L e uma massa m solta de um ângulo inicial θ_0 menor que $\pi/2$.

Tentemos agora solucionar a Eq. (3.4), a qual pode ser escrita como:

$$\frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2 = E + mgL \cos \theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{mL^2} + \frac{2mgL}{mL^2} \cos \theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} \left(\frac{E}{mgL} + \cos \theta \right)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \cdot \sqrt{\frac{E}{mgL} + \cos \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \sqrt{\frac{E}{mgL} + \cos \theta}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgL} + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgL} + \cos \theta}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2g}{L}} dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgL} + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} t \quad (3.5)$$

O período do movimento pode ser obtido pela resolução da integral entre limites apropriados. Quando o movimento é oscilatório, ou seja, $E < mgL$ o valor máximo de θ , que chamamos de α , é dado de acordo com a Eq. (3.4) por:

$$-mgL\cos\alpha = E \quad (3.6)$$

Assim a Eq. (3.5) fica:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} t \quad (3.7)$$

O ângulo θ oscila entre os limites $-\alpha < \theta < \alpha$. Tomemos a relação trigonométrica:

$$\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B)$$

Com $A = B = \frac{\gamma}{2}$ fica:

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\cos(\gamma) = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\cos(\gamma) = 1 - \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\cos(\gamma) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Assim:

$$\cos(\theta) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

e

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Logo:

$$\cos\theta - \cos\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left[\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (3.8)$$

Substituindo a Eq. (3.8) na Eq. (3.7) tem-se:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = 2 \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\theta/2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha/2}\right)}\right)^2\right]}} = 2 \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\theta/2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha/2}\right)}\right)^2\right]}} = 2 \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (3.9)$$

Lembrando que o ângulo θ oscila entre os limites $\pm\alpha$, e introduzindo uma nova variável φ que varia de 0 a 2π num ciclo completo de oscilação de θ da seguinte forma:

$$\text{sen}\varphi = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (3.10)$$

Fazendo:

$$a = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.11)$$

e então:

$$\text{sen}\varphi = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{a} \quad (3.12)$$

Note que:

$$\frac{d}{d\theta} \text{sen}\varphi = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2a}$$

$$\cos\varphi \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{2a \cos\varphi}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\varphi = d\theta \quad (3.13)$$

Pela Eq. (3.12) tem-se:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 \varphi &= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{a^2} \\ a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi &= 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= 1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Assim a Eq. (3.13) fica:

$$\frac{2a \cos \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} d\varphi = d\theta \quad (3.15)$$

Usando as Eqs. (3.10), (3.11), (3.12) e (3.15) a Eq. (3.9) fica:

$$\begin{aligned}\int_0^\varphi \frac{1}{a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}} \frac{2a \cos \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} d\varphi &= 2\sqrt{\frac{g}{L}} t \\ \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi}} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} d\varphi &= \sqrt{\frac{g}{L}} t \\ \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} &= \sqrt{\frac{g}{L}} t\end{aligned}\quad (3.16)$$

Esta integral tem a forma padrão das integrais elípticas*. Tem-se que:

$$\int \frac{dx}{\Delta} = F(x, a)$$

onde $\Delta = \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}$ e $F(x, a)$ é chamada de integral elíptica de primeira espécie.

A integral da Eq. (3.16) pode ser resolvida expandindo o denominador em uma série de potências e depois integrando termo a termo. Tem-se que:

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

Então:

*referencia:

I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of integrals, series, and Products, seventh edition, Academic Press, London, UK, p. 190, 2007.

$$(1 - a^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = 1 + \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2} + \dots$$

e a integral em (3.16) fica:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \left(1 + \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2} + \dots\right) d\varphi &= \sqrt{\frac{g}{L}} t \\ \varphi + \frac{a^2}{8} (2\varphi - \sin 2\varphi) + \dots &= \sqrt{\frac{g}{L}} t \end{aligned} \quad (3.17)$$

O período do movimento é obtido fazendo-se $\varphi = 2\pi$:

$$\begin{aligned} 2\pi + \frac{a^2}{8} [4\pi - \sin(4\pi)] + \dots &= \sqrt{\frac{g}{L}} T \\ 2\pi + 2\pi \frac{a^2}{4} + \dots &= \sqrt{\frac{g}{L}} T \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{a^2}{4} + \dots\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na Eq. (3.18) podemos identificar, como demonstrado no Cap. 2, que o termo $2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ é justamente o período T_0 do pêndulo simples para pequenas oscilações (veja a Eq. (2.27)), ou seja:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.19)$$

e com esta definição a Eq. (3.18) fica:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{a^2}{4} + \dots\right) \quad (3.20)$$

Lembrando que pela Eq. (3.11), $a = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, onde α é o limite de oscilação de θ . Assim, pela Eq. (3.20) evidenciamos que quando a amplitude de oscilação se torna grande o período se torna ligeiramente maior do que para pequenas oscilações.

A frequência angular ω do movimento pode ser obtida pela Eq. (3.18) da seguinte forma:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 + \frac{a^2}{4} + \dots\right)^{-1}$$

Usando a expansão:

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots \quad (-1 < x < 1)$$

a frequência angular ω assume a forma:

$$\omega \cong \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (3.21)$$

Na Eq. (3.21) podemos identificar, como demonstrado no Cap. 2, que o termo $\sqrt{\frac{g}{L}}$ é a frequência angular ω_0 do pêndulo simples para pequenas oscilações (veja a Eq. (2.26)), ou seja:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.22)$$

Assim, com esta definição, a Eq. (3.21) fica:

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{4}\right),$$

evidenciando que para grandes amplitudes a frequência angular é ligeiramente menor.

Não é nosso objetivo nesse trabalho, mas a título de conhecimento a Eq. (3.17) pode ser resolvida aproximadamente para se obter φ , usando-se o método das aproximações sucessivas, e o resultado ser substituído na Eq. (3.12) para se obter θ por aproximações sucessivas. O resultado até segunda ordem na aproximação é:

$$\theta \cong \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{192}\right) \text{sen}(\omega t) + \frac{\alpha^3}{192} \text{sen}(3\omega t) \quad (3.23)$$

onde:

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{16} + \dots\right) \quad (3.24)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ é a frequência angular para pequenas oscilações, ou seja, quando é válida a aproximação: $\text{sen}\theta \approx \theta$. Assim, nota-se pela Eq. (3.24) que para grandes amplitudes a frequência angular é ligeiramente menor e que pela Eq. (3.23) nota-se que o movimento em θ possui um termo de terceiro harmônico.

O período de oscilação T do pêndulo simples pode também ser obtido sem realizar uma expansão em série de potências do denominador da Eq. (3.16). Na Eq. (3.16) podemos fazer:

$$\sqrt{\frac{g}{L}} T = \frac{2\pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi}} . \quad (3.25)$$

A integral da Eq. (3.25) pode ser resolvida de forma numérica. Para isto, pode-se construir um programa computacional utilizando alguma linguagem como o Fortran, ou utilizar algum software matemático como, por exemplo, o Maple ou o Mathematica[§].

A Tabela 3.1 mostra os resultados obtidos para a razão do período T e o período T_0 usando-se as equações (3.20) e (3.25). Os valores numéricos foram obtidos usando o software Mathematica WOLFRAM 7.0.

Tabela 3.1 Dados obtidos para o período de oscilação a partir das Eqs. (3.20) e (3.25).

Amplitude de oscilação (ângulo θ_0)	T/T_0 (Eq. 3.20)	T/T_0 (Eq. 3.25)
1°	1.000019	1.000019
5°	1.000475	1.000476
10°	1.001899	1.001907
15°	1.004259	1.004300
20°	1.007538	1.007669
25°	1.011711	1.012030
30°	1.016746	1.017408
35°	1.022605	1.023833
40°	1.029244	1.031340
45°	1.036611	1.039973
50°	1.044651	1.049782
55°	1.053302	1.060829
60°	1.062500	1.073182
65°	1.072172	1.086922
70°	1.082247	1.102144
75°	1.092647	1.118959
80°	1.103293	1.137492
85°	1.114105	1.157894
90°	1.125000	1.180340

[§] <https://www.wolfram.com/mathematica/>

Figura 3.1 mostra graficamente os resultados apresentados na Tabela 3.1 para o período T/T_0 utilizando a Eq. (3.25), representada pelos símbolos quadrados, e utilizando a Eq. (3.20) representada pela curva cheia. Verifica-se, confirmando os resultados obtidos pelas equações, que o período T é maior que o período T_0 . Nota-se ainda que à medida que a amplitude de oscilação (o ângulo θ_0) aumenta, aumenta também a discrepância entre o período T e o período T_0 , chegando a aproximadamente 18% de diferença para um ângulo de oscilação de 90° usando-se a Eq. (3.25) e uma diferença de aproximadamente 12% usando-se a Eq. (3.20). Verifica-se ainda, como era de se esperar, que o valor do período encontrado com a Eq. (3.25) é maior que o período obtido pela Eq. (3.20), com a discrepância entre os dois resultados aumentando à medida que se aumenta a amplitude de oscilação.

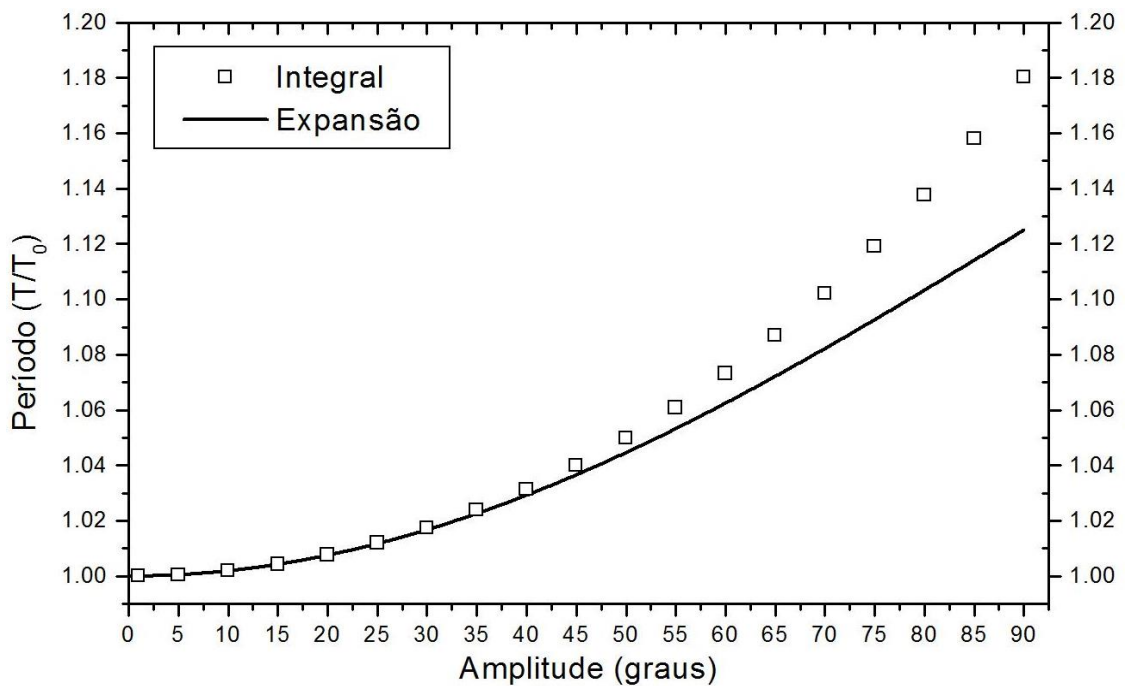


Figura 3.1 Gráfico mostrando o período T/T_0 utilizando a Eq. (3.25), representada pelos símbolos quadrados, e utilizando Eq. (3.20) representada pela curva cheia.

Capítulo 4

MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Tratamos neste Capítulo com medidas experimentais. Foi utilizado um pêndulo montado com canos de PVC, como ilustrado pela Fig. 4.1, com um transferidor acoplado para medir o ângulo em que o pêndulo é solto. O comprimento do pêndulo utilizado foi de 50 cm, e para a marcação do tempo foi utilizado o cronômetro de um celular. Para cada ângulo fixo foi marcado o tempo Δt gasto pelo pêndulo para executar dez oscilações completas ($N = 10$). O período T será então: $T = \Delta t/N$. A Tabela 4.1 mostra os resultados experimentais obtidos. A primeira coluna da Tabela 4.1 refere-se ao ângulo inicial em que o pêndulo foi solto, a segunda coluna o tempo gasto para o pêndulo executar 10 oscilações completas e a terceira coluna o período referente a estas 10 oscilações. As medidas de tempo estão em segundos e as medidas de ângulo em graus. A partir de 5° o ângulo foi variado de 5° em 5° até o limite de 90° . Verifica-se pela Tabela 4.1 que na medida em que se aumenta o ângulo de oscilação θ_0 aumenta-se também o período T medido.



Figura 4.1 Aparato construído para medir o período de um pêndulo simples.

Podemos apontar como erros nas medidas experimentais: a) erro na medida do comprimento do fio ($\pm 0,1$ cm); b) erro na medida do ângulo de oscilação ($\pm 1^\circ$); c) erro na medida do tempo para 10 oscilações ($\pm 0,1$ s); d) erro em disparar o cronômetro no instante exato em que o pêndulo é solto e de travar o cronômetro quando o pêndulo chega a amplitude máxima em 10 oscilações ($\pm 0,5$ s); e) deslocamentos de ar (vento) ocorridos durante as medidas; f) resistência do ar.

Tabela 4.1 Medidas experimentais para o pêndulo simples.

θ_0 (em graus)	Δt (s)	$T = \Delta t/N$ (s)
1°	14,267	1,4267
5°	14,271	1,4271
10°	14,275	1,4275
15°	14,304	1,4304
20°	14,303	1,4303
25°	14,341	1,4341
30°	14,566	1,4566
35°	14,612	1,4612
40°	14,650	1,4650
45°	14,771	1,4771
50°	14,835	1,4835
55°	15,052	1,5052
60°	15,122	1,5122
65°	15,244	1,5244
70°	15,261	1,5261
75°	15,300	1,5300
80°	15,515	1,5515
85°	15,584	1,5584
90°	15,621	1,5621

Ressaltamos aqui que a intenção inicial nesta pesquisa era de realizar as medidas experimentais do período do pêndulo simples no Laboratório de Física da PUC Goiás utilizando sensores de alta resolução para obter os resultados experimentais desta pesquisa. No entanto, devido à pandemia gerada pelo Covid 19, chegamos ao bom senso que as

medidas seriam realizadas em ambiente domiciliar com um pêndulo construído pelo próprio acadêmico.

A Tabela 4.2 mostra uma comparação dos resultados experimentais obtidos para o período T do pêndulo com as expressões teóricas obtidas no capítulo anterior. A primeira coluna da Tabela 4.2 refere-se ao ângulo inicial em que o pêndulo foi solto, a segunda coluna o período experimental obtido, a terceira coluna foi obtida teoricamente utilizando a expansão dada pela Eq. (3.20) e a quarta coluna são valores teóricos obtidos utilizando a expressão dada pela Eq. (3.25), a qual é mais exata que a Eq. (3.20). Nas expressões (3.20) e (3.25) foi utilizado para a gravidade o valor $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ e para o comprimento do pêndulo $L = 0,5 \text{ m}$, com os valores dos ângulos mostrados na primeira coluna da Tabela 4.2. O valor teórico do período T_0 , o qual foi determinado com a aproximação de $\text{sen}\theta \approx \theta$, pode ser obtido pela Eq. (2.27). Utilizando estes valores de g e L , foi encontrado que $T_0 = 1,42068 \text{ s}$. Nota-se da Tabela 4.2 que de forma geral:

$$T_{(\text{Eq. 3.25})} > T_{(\text{Eq. 3.20})} > T_{(\text{Eq. 3.25})} > T_{(\text{experimental})}$$

Tabela 4.2 Comparação dos resultados obtidos de forma experimental com os teóricos.

θ_0 (em graus)	T (s) (experimental)	T (s) (expansão, Eq. 3.20)	T (s) (integral, Eq. 3.25)
1°	1,4267	1,4207	1,4207
5°	1,4271	1,4214	1,4214
10°	1,4275	1,4234	1,4234
15°	1,4304	1,4267	1,4268
20°	1,4303	1,4314	1,4316
25°	1,4341	1,4373	1,4378
30°	1,4566	1,4445	1,4454
35°	1,4612	1,4528	1,4545
40°	1,4650	1,4622	1,4652
45°	1,4771	1,4727	1,4775
50°	1,4835	1,4841	1,4914
55°	1,5052	1,4964	1,5071
60°	1,5122	1,5095	1,5246
65°	1,5244	1,5232	1,5442
70°	1,5261	1,5375	1,5658
75°	1,5300	1,5523	1,5897
80°	1,5515	1,5674	1,6160
85°	1,5584	1,5828	1,6450
90°	1,5621	1,5983	1,6769

Para uma melhor visualização dos valores apresentados na Tabela 4.2, estes são apresentados graficamente na Fig. 4.2. As curvas em azul e vermelho foram obtidas teoricamente utilizando as equações (3.25) e (3.26), respectivamente, enquanto que os círculos representam os resultados experimentais. Nota-se que para ângulos menores que 55° existe uma boa concordância entre os resultados experimentais e teóricos.

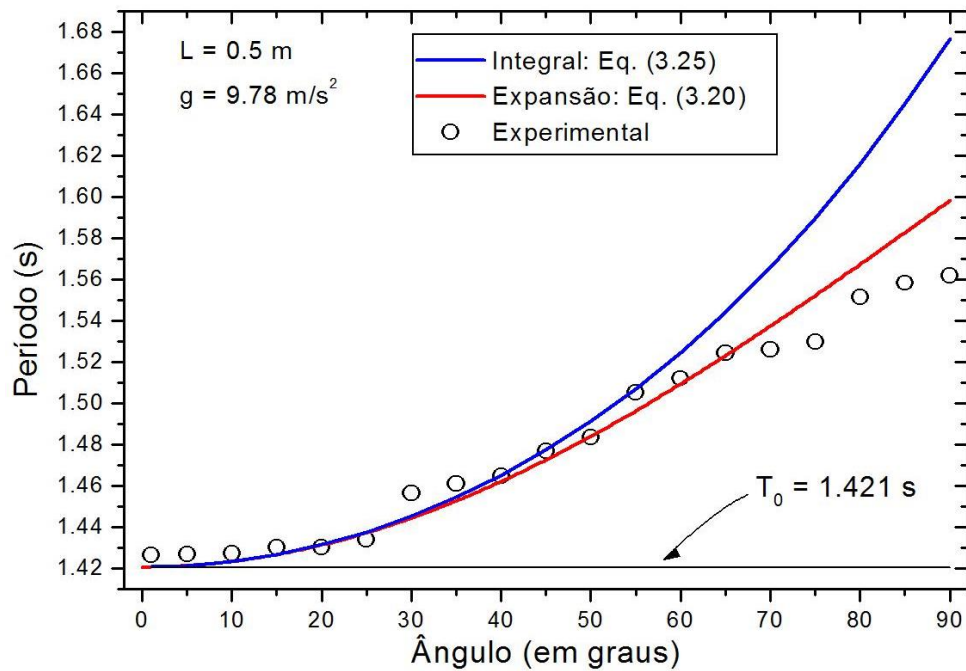


Figura 4.2 Comparação entre resultados experimentais e teóricos, sendo utilizado $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ e $L = 0,5 \text{ m}$.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Sabe-se que movimentos periódicos e oscilatórios são de grande interesse devido às suas diversas aplicações tanto no campo da Física quanto nas engenharias aplicadas. Um estudo aprofundado sobre a física envolvida nestes movimentos periódicos é de extrema importância para uma descrição do fenômeno em si e para a determinação das leis que regem o seu movimento. O conhecimento destas leis traz uma melhor clareza sobre o fenômeno em questão dando suporte para possíveis aplicações.

Aqui neste trabalho foi feito um estudo específico sobre o movimento de um pêndulo simples considerando não apenas pequenas oscilações como é de costume nas disciplinas introdutórias sobre o assunto, mas também considerando o efeito de grandes amplitudes de oscilação. Para isto foi obtida uma solução mais geral para o problema sem considerar as aproximações rotineiramente utilizadas para pequenas oscilações. Assim, foram obtidas neste trabalho as equações diferenciais de movimento que caracterizam e determinam o movimento de um pêndulo simples considerando desde pequenas até grandes amplitudes de oscilação. Estas equações diferenciais foram solucionadas por meio de técnicas de solução de equações diferenciais usando-se métodos de expansão de funções. Foi possível verificar, tanto experimentalmente quanto teoricamente, que para o movimento oscilatório do pêndulo simples, o seu período de oscilação aumenta e a sua frequência angular diminui com o aumento da amplitude de oscilação. Foi também determinada a faixa de validade da aproximação para pequenas amplitudes de movimento. Verificou-se que os resultados teóricos e experimentais apresentam uma boa concordância para ângulos menores que 55° .

Em prosseguimento à esta pesquisa serão realizadas medidas experimentais do período do pêndulo simples no Laboratório de Física da PUC Goiás utilizando sensores de alta resolução para que sejam obtidos melhores resultados.

Bibliografia

- LUIZ, Adir Moysés. **Física 1 Mecânica**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física 2006.
- NETO, João Barcelos. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana E Hamiltoniana**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- SERWAY, Raymond A. e JEWETT, John W. **Princípios de Física. Mecânica Clássica - Volume 1**. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- SYMON, Keith Randolph. **Mechanics**. 3 ed. Massachusetts (EUA): Addison-Wesley, 1971.
- YOUNG, Hugh David e FREEDMAN, Roger A. Freedman. **Física 2 Termodinâmica e Ondas**. 12 ed. Massachusetts (EUA): Addison-Wesley, 2008.
- Justin A. Hill, Jamier E. Hasbun, **A Nonlinear Approximate Solution to the Damped Pendulum Derived Using the Method of Successive Approximations**, Georgia Journal of Science, vol. 76, n. 2, p. 1, 2008.
- Eugene I. Butikov, **Oscillations of a simple pendulum with extremely large amplitudes**, Eur. J. Phys., vol 33, pp. 1555-1563, 2012.

RESOLUÇÃO n°038/2020 – CEPE

ANEXO I

APÊNDICE ao TCC

Termo de autorização de publicação de produção acadêmica

O(A) estudante **Eduardo Fernandes de Oliveira** do Curso de **Licenciatura em Física**, matrícula 2017.1.0018.0042-0, telefone: (62) 99126-5617 e-mail: eduardo_fernandes_@outlook.com.br, na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei n° 9.610/98 (Lei dos Direitos do autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **Estudo do Período do Pêndulo Simples Dependente da Amplitude de Oscilação**, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF); Imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); Vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão pela internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 02 de dezembro de 2020.

Assinatura do(s) autor(es):

Eduardo Fernandes de Oliveira

Nome completo do autor: **Eduardo Fernandes de Oliveira**

Assinatura do professor-orientador:

Rodrigues

Nome completo do professor-orientador: **Clóves Gonçalves Rodrigues**