

PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA



A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE
VIBRAÇÃO DE UMA VIGA BIENGASTADA

BRUNO HOFFMANN

GOIÂNIA

2021

BRUNO HOFFMANN

**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE
VIBRAÇÃO DE UMA VIGA BIENGASTADA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Ciências Exatas e da Computação, da
Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Licenciatura Plena em Física.

Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva.

Banca Examinadora:

Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.

Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

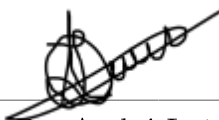
BRUNO HOFFMANN

A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE
VIBRAÇÃO DE UMA VIGA BIENGASTADA

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção do título de Licenciatura em Física, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciência Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em **07/06/2021**.

Banca examinadora:

Prof. Ms. Ludimilla Reis Pinheiro dos Santos.
Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso.



Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva



Prof. Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.



Prof. Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

Este trabalho eu dedico a todos que me apoiaram, nessa longa jornada, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente as pessoas que tornaram isso tudo possível, minha família, mas em particular João Marcolino e Delci Maria, logo mais Guilherme um familiar e um bom colega de trabalho, e agradeço agora pelos professores que marcaram a minha vida na minha trajetória acadêmica, primeiro ao Dr. Raffael Costa de Figueiredo Pinto pois se hoje sei o que fazer sobre meu futuro acadêmico foi ele quem me ensinou, e acredito que não ouve um dia sequer que não fosse respondido minhas dúvidas, ajudou muito. Agradeço ao meu coordenador Dr. Andreson Silva que também foi meu professor e me orientou nas dúvidas tais como exercícios e livros, muito do que sei foi recomendação dele, vejo que o professor André Luiz Cardoso da Silva foi o próximo que mais influenciou em minha carreira acadêmica, pois logo cedo me orientou a fazer iniciações científicas e pibid, já discutíamos desde o segundo período sobre um trabalho para conclusão de curso ideal, e isso agilizou muito as coisas, também grande influenciador para minha pós. O Dr. Francisco Aparecido Pinto Osório que acompanhou em mais da metade do meu curso como meu professor na maioria das vezes, responsável por grande parte das coisas que eu aprendi. Obrigado a minha banca e a todos que compareceram.

Um agradecimento especial à Pontifícia Universidade Católica de Goiás, ajudou a mim e a muitos outros com o Vestibular Social, e obrigado também por todos os eventos e experiencias que tive nessa instituição.

*“Nunca confunda educação com inteligência, você
pode fazer um doutorado e ainda ser um idiota”*

Richard Philips Feynman (1918 – 1988).

RESUMO

Neste trabalho, propomos mostrar a interdisciplinaridade da dinâmica newtoniana estudando uma abordagem macroscópica dos modos de vibrações de uma *pequena viga biengastada* (ou uma barra fixada em dois extremos). As equações obtidas desse formalismo reduz-se a uma equação diferencial parcial (EDP) conhecida como equação de Euler-Bernoulli (EEB, Equação de Euler Bernoulli) que apresenta uma descrição razoavelmente boa para os modos de vibração de vigas esbeltas, sem cisalhamento, se comparados com dados empíricos. Diversos autores entendem que deve-se considerar o cisalhamento axial causados pelo efeito do deslizamento das fibras quando se considera uma viga grossa. O estudo desta dinâmica será feita de forma analítica para determinar as frequências de vibração a partir raízes de equações transcendentais usando o software GEOGEBRA. Em seguida, usamos o métodos dos elementos finitos (MEF) para obter essas frequências e o modos de vibração para comparar com os resultados obtidos analiticamente.

Palavras chave: A Dinâmica de Newton, Equação de Euler-Bernoulli, Simulações computacionais por Elementos Finitos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Monocórdio..	3
Figura 2:	Primeiro Sismógrafo..	4
Figura 3:	Placas de Chladin	7
Figura 4:	Esquema Básico de Medição de Vibração.	14
Figura 5:	Instrumento Sísmico.	14
Figura 6:	Viga Biengastada de vão L , largura b e altura h	18
Figura 7:	Elemento de Viga	20
Figura 8:	Cálculo das frequências de vibração usando a calculadora desmos .	24
Figura 9:	Discretização em elementos finitos	27
Figura 10:	Funções de Forma de Hermite	28
Figura 11:	Modos de vibração intervalos de 1 a 6.	34
Figura 12:	Modos de vibração intervalos de 7 a 12..	34
Figura 13:	Modos de vibração intervalos de 7 a 12.	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Propriedades da viga engastada	23
Tabela 3:	Condições de H_i e suas derivadas para cada valor ξ	28
Tabela 4:	Análise das frequências dos modos de vibração. Simulação e erros	33

LISTA DE ABREVIATURAS

MEF	Método dos Elementos Físicos.
EEB	Equação de Euler-Bernoulli
MM	Matriz de Massa.
MR	Matriz de Rigidez.

CONTEÚDO

1.	INTRODUÇÃO.	1
2.	VIBRAÇÕES MECÂNICAS	3
2.1	Breve História das Vibrações	3
2.1.1	Origem dos Estudos das Vibrações.	4
2.1.2	De Galileu a Rayleigh.	4
2.2	Contribuições Recentes.	8
2.3	Importância do Estudo da Vibrações.	8
2.4	Conceitos Básicos de Vibrações	9
2.5	Classificações das Vibrações..	9
2.6	Procedimentos de Análise de Vibrações	10
2.7	Controle de Vibrações	11
2.7.1	Curvas de Vibrações Controladas e Descontroladas.	11
2.7.2	Amenizando as Vibrações da Fonte.	12
2.7.3	Balanceamento em Máquinas Rotativas.	12
2.7.4	Balanceamento Estático.	12
2.7.5	Balanceamento Dinâmico	12
2.7.6	Rodopio de Eixos Rotativos	13
2.7.7	Balanceamento do Motor Alternativo	13
2.8	Medições e Aplicações	13
2.8.1	Esquema de medição de vibração.	14
2.8.2	Sensores de vibração.	14
3.	A DINÂMICA DE NEWTON PARA ESTUDO DE VIGAS . . .	16
3.1	Introdução	16
3.2	Objeto de Estudo: A Viga Biengastada	16
3.3	A Dinâmica de Newton: Equação de Euler-Bernoulli.	18

3.4.1	Condições Iniciais e Condições de Vínculos	21
3.4.2	Vibrações Livre	22
3.4.3	Solução Temporal	22
3.4.4	Solução Espacial.	22
4.	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL.	25
4.1	A Simulação Computacional	25
4.1.1	O Software MaTLab	25
4.1.2	Contexto Histórico do Método dos Elementos Finitos	26
4.1.3	Formulação do MEF: Uma Introdução.	26
4.3	Análise dos Resultados e Discussões	33
5.	CONCLUSÕES.	36
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	37
	APÊNDICE A – Termo de Autorização de Publicação de Produção Acadêmica	38

1. INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, estruturas são projetadas para resistir a cargas estáticas. Porém, elas podem estar sujeitas a eventos que geram cargas dinâmicas, como terremotos, ventos, ondas e tráfego de veículos. Este tipo de carga pode causar movimentos vibratórios que podem prejudicar a estrutura e trazer perigo para aqueles em seu interior. Em prédios altos, por exemplo, as vibrações induzidas por vento podem causar desconforto aos ocupantes (especialmente nos andares superiores) ou danos estruturais. Devido a isso, Engenheiros, Físicos e Matemáticos do mundo todo estudam formas de desenvolver estruturas mais seguras. Por exemplo, alguns projetos que enfrentaram problemas com vibrações viram fonte de estudo e acabam servindo como fonte de conhecimento para evitar problemas semelhantes no futuro. Da mesma maneira, projetos que contam com tecnologia avançada de amortecimento de vibrações também são extensivamente estudados. Neste sentido, existem um número crescente de publicações sobre estudos de vibrações em barras, pêndulos e outras estruturas¹ (veja, a Revista de Ensino de Física, RBEF²).

Uma linha de estudo interdisciplinar de bastante interesse é a de vibrações transversais ou axiais de vigas (ou simplesmente barras), esbeltas ou grossas, submetidas a determinados vínculos. Esse elemento é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicóptero, satélites flexíveis, asa de aviões, braços robóticos, trilhos de trem, construção civil e subsistemas de estruturas mais complexas. O estudo das respostas elásticas e dinâmicas de componentes estruturais, sob várias condições de carga é muito útil para a modelagem e análise do comportamento de estruturas mais reais e complexas sujeitas a carregamentos similares (SAVI *et al.*, 2017). Na literatura, o estudo das deflexões ou vibrações transversais de vigas, pode ser representado por quatro modelos “físico-matemático” principais largamente usados: Euler-Bernoulli, Rayleigh, *Shear* ou Vlasov e Timoshenko. Esses modelos diferenciam-se pelos efeitos físicos considerados, via hipóteses simplificadora, o que gera resultados com distintos níveis de precisão a depender da aplicação de interesse (RAO, 2008).

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por *teoria clássica do estudo de vigas*, é a mais comumente utilizada, é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Porém, esta teoria tende a ser superestimada levemente com as frequências naturais. Este problema é exacerbado para as frequências naturais dos maiores modos. Além disso, a predição das frequências também é melhor para vigas finas ou delgadas do que para vigas não delgadas. Já a teoria de Rayleigh apresenta um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito da rotação da seção transversal. Como consequência, parcialmente corrige os efeitos da superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, as frequências naturais são ainda superestimadas.

O modelo de *Shear* ou Vlasov adiciona distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli e, dessa forma, a estimativa das frequências naturais melhora consideravelmente. No modelo de Timoshenko é adicionado tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko foi (e ainda é) a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não-delgada e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da rotação não podem ser desprezados. Seguindo Timoshenko, vários autores têm obtido as equações para frequência e modos para várias configurações de condições de contorno. Portanto, quando se estuda as vibrações de vigas em geral, todas as abordagens apresentam suas vantagens e desvantagens (RAO, 2008). Neste sentido, preferimos a abordagem de Euler-Bernoulli pela sua simplicidade para usá-la nesse TCC como um primeiro estudo.

No capítulo 2, falaremos um pouco sobre as vibrações mecânicas, discutiremos um pouco sobre a história, a importância do estudo das vibrações, suas classificações, os procedimentos de análise, controle das vibrações e sobre medições de vibrações e aplicações. No capítulo 3, apresentaremos o modelo de viga “biengastada” que estudaremos nesse TCC. Em seguida, é construída a dinâmica a partir do formalismo de newtoniano para obter a equação de Euler-Bernoulli e os modos de vibração sob determinadas condições iniciais e de contorno (ou vínculos).

No Capítulo 4, apresentaremos os fundamentos básicos da simulação computacional pelo método dos elementos finitos (MEF) como uma forma alternativa e numérica de obter os modos de vibração de estruturas. Em seguida aplicamos o MEF para estudar os modos de vibrações da viga “biengastada”. Os resultados numéricos obtidos são então comparados e com os resultados teóricos.

No Capítulo 5, faremos as conclusões finais.

2. VIBRAÇÕES MECÂNICAS

As vibrações mecânicas são um objeto de estudo explorado por diversas áreas, mas como principal a Engenharia tem como base fundamentos de mecânica, os mesmos são utilizados em suas construções de projetos. A sua importância é imensurável pois poderia se estudar um problema várias e várias vezes e sempre teria algo novo para se trabalhar em cima, aperfeiçoar ou novas aplicações em sistemas diferentes que poderiam provocar novas circunstâncias e novamente uma nova ciência.

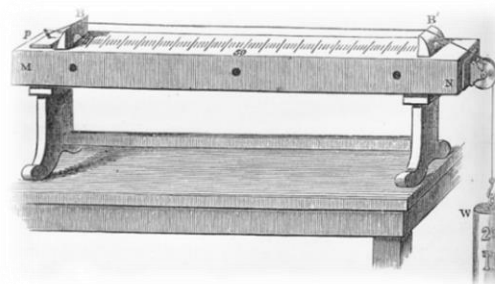
Neste capítulo é discutido os fundamentos das vibrações mecânicas.

2.1 Uma Breve História das Vibrações

Sobre sua história poderia se começar a contar desde 4000 antes de Cristo onde um senso crítico sobre as vibrações em instrumentos musicais como tambores e outros instrumentos. Essa observação partiu dos chineses, japoneses, hindus e egípcios.

Em aproximadamente 3000 a.C surgiram outros instrumentos como harpas e outros instrumento do corda pelo mundo e isso fez com que o filósofo e matemático Pitágoras (582-507) estudasse em seu tempo o comportamento das vibrações em um sistema isolado, e que foi dado o nome de monocórdio uma tábua retangular que possui sobre ela três suportes de madeira, suporte a, b e c sobretudo o suporte a e c eram fixos, e o suporte b móvel responsável então por variar o comprimento da corda e controlar suas vibrações para poder estuda-las.

Figura 1: Monocórdio.



Fonte: <https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/>. Acessado em 24 de maio de 2021.

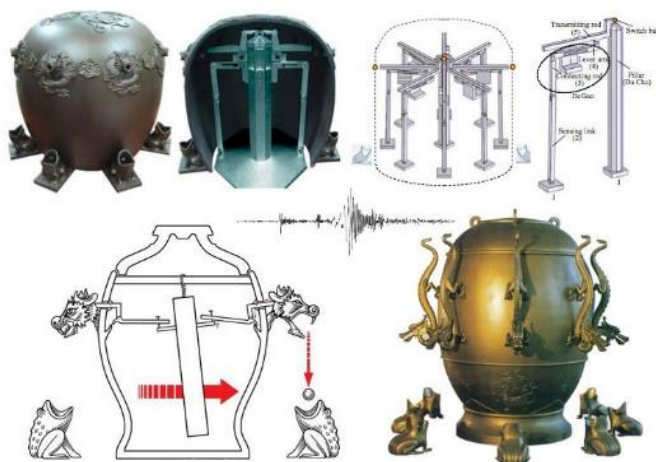
2.1.1 Origem do Estudo das Vibrações

Por volta de 350 a.C Aristóteles começou a estudar também esses fenômenos sobre intensidade de instrumentos diferentes, um instrumento ser mais doce que o outro e trazendo pistas sobre as harmônicas. O que só fora descoberto em 320 a.C por um estudo

de seu aluno Aristóxenes que escreveu o livro *Elementos de harmonia*. Logo em seguida veio Euclides com um estudo sobre a teoria da música em *introdução aos harmônicos*. Vitrúvio escreveu em 20 a.C sobre as propriedades acústicas nos teatros, sobre como o som se comportava em locais abertos e locais fechados.

Um dos grandes avanços nas vibrações foi em 132 d.C onde se tinha muitos terremotos na China, Zhang Heng um astrônomo e historiador trabalhou em cima do que se conhece hoje como o primeiro sismógrafo do mundo. Seu funcionamento se dispunha de quatro tábuas formando uma cruz de noventa graus umas com as outras dentro de um vaso com água, e no centro dessas tábuas havia uma bola de ferro que estava presa por uma pequena inclinação muito sutil, e ao fim de cada tábua no sentido para fora do centro havia uma saída para fora dos vasos que eram a boca de quatro dragões e logo abaixo um sino para cada possível queda. Logo quando ocorresse um terremoto provocaria uma inclinação fazendo com que a bola de ferro rolasse para fora do vaso e tocasse um dos sinos, fazendo então alguém tomar alguma atitude se prevenindo ou se preparando para o terremoto.

Figura 2: Primeiro Sismógrafo.



Fonte: <http://arqueologiaibanez.blogspot.com/2016/09/o-detector-de-terremotos-com-200-anos.html>. Acessado em 24 de maio de 2021.

2.1.2 De Galileu a Rayleigh

Um certo dia Galileu (1564-1642) estava em uma igreja em Pisa e estudou os movimentos periódicos que um lustre da igreja fazia. Ele então começou a contar o período em que o lustre demorava para retornar ao mesmo lugar, e então começar novamente o processo que se repetia várias vezes, as oscilações e publicando um artigo em *Discourses concerning two new sciences* em 1638 discutindo corpos vibratórios.

Mas o primeiro estudo correto e inclusive com as expressões matemáticas corretas só foi publicado mais tarde pelo matemático e teólogo francês Marin Mersenne (1588-1648) no seu livro *harmonicorum liber*.

As observações e estudo de Galileu fez com que a fundação da Academia del Cimento em Florença em 1657 desse atenção para esse assunto e investissem tempo para trabalhar em cima do que já havia sido descoberto, causando uma influência dentro da Royal Society of London no ano de 1662 e na Paris Academie des science em 1666.

Robert Hooke (1635-1703) trabalhou sobre as frequências em diferentes comprimentos de cordas, obtidos os dados experimentalmente sobre as relações entre a frequência e a tonalidade de uma oscilação.

Contudo, foi Joseph Sauveur (1653-1716) quem estudou tudo o que já havia sido descoberto até seu tempo e formulou a palavra “acústica” para o estudo dos sons, sua frequência, intensidade, etc.

Logo mais tarde Sauveur estudou com John Wallis (1616-1703) de forma independente na França, o que hoje se conhece por *nós*, onde em seus estudos constataram que haviam pontos de uma corda em vibração que tinha mais intensidade denominados *ventres*, e outros pontos onde estavam imóveis chamado de *nós*.

Esse estudo chegou à conclusão também que esses *nós* tinham uma relação direta com múltiplos inteiros da frequência de vibração simples, mais tarde esses *nós* serão estudados como os números de harmônicos de uma vibração.

Sir Isaac Newton quando fez sua grande contribuição com o seu livro de cálculo o *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* no ano de 1686, onde sua segunda lei é usada para as derivações de movimento de uma vibração em uma corda. Mas a sua dinâmica só foi solucionada mais tarde pelo matemático inglês Brook Taylor (1685-1731) em 1731, e que também foi uma apresentação das séries infinitas de Taylor, que foi um sucesso pois concordava com Galileu e Mersenne.

$y(x, t) = \text{Deslocamento}$

$A = \text{Amplitude}$

$\mu = \text{Constante de fase}$

$k = \text{Número da onda}$

$x = \text{Posição}$

$t = \text{Tempo}$

$\omega = \text{Frequência Angular}$

$$y(x, t) = A \cos [kx - \omega t + \mu] \quad (2-1)$$

Essas notações foram melhoradas por Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean D'Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783), onde a dinâmica pode ser explicada com derivadas parciais das funções de ondas com a distribuição de um comprimento equivalente a soma de infinitos pontos consecutivos sobrepondo as posições

das funções das vibrações, contudo seus resultados eram duvidosos pela opinião de seus próprios estudiosos.

$v = \textit{Velocidade}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \textit{Aceleração da Onda}$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2-2)$$

Mas essas dúvidas foram esquecidas quando J.B.J Fourier (1768-1830) testou e comprovou em seu livro *Analytical theory of heat* (Teoria analítica do calor) em 1822 com as expansões da série.

$x(t) = \textit{Posição no Tempo}$

$f = \textit{Frequência}$

$t = \textit{Tempo}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi fnt) + b_n \sin(2\pi fnt)) \quad (2-3)$$

A solução analítica do movimento da corda vibratória foi resolvida por Joseph Lagrange (1736-1813), que foi publicada em suas memórias pela Academia de Turim (Turin Academy) em 1759, onde ele propôs que existia um número finito de partículas com massa separadas por uma distância igual entre elas e estabeleceu que existe um número de frequência para cada uma dessas partículas.

$T = \textit{Energia Cinética}$

$V = \textit{Energia Potencial}$

$m = \textit{Massa}$

$x = \textit{Posição}$

$\dot{x} = \textit{Velocidade}$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - \frac{1}{2} k x^2(t) \quad (2-4)$$

A história das vibrações em placas bidimensionais foram estudadas e contempladas pelo cientista alemão E.F.F.Chladni (1756-1824), inclusive foi convidado para dar uma palestra pela Academia Francesa (French Academy) sobre suas descobertas de desenhos complexos que apareciam sobre uma placa quando se jogava areia em cima enquanto a mesma vibrasse.

Figura 3: Placas de Chladin



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni. Acessado 24 de maio de 2021.

Ato visto pelo próprio Napoleão Bonaparte que ficou encantado com todas aquelas figuras complexas formadas pela vibração da placa e que também doou uma quantia de três mil francos à Academia como prêmio para primeira pessoa que formulasse uma teoria analítica para tal feito experimental das placas.

Em todo seu tempo do concurso para a premiação de quem desse uma explicação analítica para o problema, só havia uma candidata, Sophie Germain isso em 1811, Lagrange era um dos juízes e não lhe concedeu o prêmio por um erro em sua derivação, logo em seguida ela novamente não recebeu porque precisavam de uma solução analítica mas que também tivesse uma explicação física, e que finalmente em 1815 após ser corrigido lhe foi concedido o prêmio pela explicação, mesmo que os juízes não estivesse completamente satisfeitos.

Sophie estava certa mas havia um erro que foi conhecido mais tarde sobre suas condições de contorno, mas que foi corrigido em 1850 por G. R. Kirchhoff (1824-1887), e outro problema muito importante que foi resolvido por Simeon Poisson (1781 - 1840) que era sobre o som emitido por um tambor, o problema da membrana circular por R.F.S. Clebsch(1833- 1872) em 1862.

Logo após vários estudos serem feitos sobre sistemas mecânicos e estruturais usuais, em 1877, Lord Baron Rayleigh publicou seu livro sobre a teoria do som, onde esse livro é referência até os tempos de hoje nesse assunto, um feito notável de Rayleigh foi seu estudo sobre como encontrar a frequência natural de uma onda usando a conservação de energia, agora conhecido como método de Rayleigh,

$\omega = \text{Frequência}$

$u = \text{Energia Pontencial}$

$k = \text{Energia Cinética}$

$m = \text{Massa}$

$$\omega^2 = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} \quad (2-5)$$

2.2 Contribuições Recentes

O cientista Frahm observou a importância de se obter um estudo sobre torções de uma viga sobre seu eixo, para trabalhar em hélices de navios a vapor, onde esses estudos tratavam de suas vibrações das pás.

Foi conversado sobre a importância da adição de um sistema massa-mola no formalismo dinâmico já estudado, e isso foi proposto por Frahm em 1909, e que tiveram a participação de incríveis nomes, como Stodola, de Laval, Timoshenko e Mindlin.

Aurel Stodola (1859-1943) que contribuiu com estudos das vigas, placas e membranas, onde ele analisava as vibrações das pás de turbinas dos navios, seguido por C.G.P de Laval (1845-1913) que apresentou uma solução para o problema de um disco rotativo desbalanceado, após notar falhas em eixos de aço em turbinas de alta velocidade.

Stephen Timoshenko (1878-1972) modernizou uma teoria sobre vibrações em vigas que ficou muito conhecida como teoria da viga grossa, que considerava os efeitos da inércia da rotação e da deformação por cisalhamento. Uma outra explicação similar foi dado por R. D. Mindlin para uma análise de vibração em placas grossas, que também inclui os efeitos de inércia da rotação e da deformação por cisalhamento.

2.3 Importância dos Estudo das Vibrações

As vibrações são um estudo fundamental principalmente em qualquer estrutura mecânica nos dias de hoje, sobre as vibrações sonoras do ar que provocam as oscilações em nosso tímpano, construções da engenharia civil como grandes casas ou prédios e até mesmo indústrias, fuselagem de aviões e automóveis.

Uma grande atenção que os engenheiros possuem ao se construir um automóvel por exemplo, é de como ele poderá desconstruir todo esse balanço desnecessário que pode causar muitas vezes, desconforto, enjoo e náuseas, pois uma forma de se resolver isso é entendendo como as vibrações funcionam e produzir uma resistência ou contra vibrações que irão anular esse efeito causador do desconforto.

Os efeitos das vibrações não são somente negativos, existem aplicações a favor também, que são os martelos das forjas, as produções de sons por auto falantes, ou criação de estruturas resistentes a terremotos como por exemplo em prédios que utilizam um contrabalanço para interromper as oscilações do material e por sua vez o próprio concreto que poderá se romper.

As vibrações são o maior problema das grandes estruturas como as pontes, uma em particular é a ponte de Tacoma Narrows, onde oscilações não lineares provocaram cisalhamento da mesma por uma rotação do próprio eixo e provocou o desabamento de Tacoma em 1940.

2.4 Conceitos Básicos de Vibração

Uma vibração é todo e qualquer movimento que se repita em um determinado intervalo de tempo, seja um relógio de pêndulo, uma mola, as cordas de um instrumento ou qualquer sistema que possua os mesmos requisitos de um movimento periódico.

Em geral a vibração é um sistema que converte energia potencial em energia cinética, e essas variações das trocas é chamada de oscilação, objetos que podem conter esse comportamento seria de um pêndulo simples, um sistema com molas ou semelhantes, podendo classificar esses mesmos por amortecimento que seria um dissipador da energia ou um sistema elástico que manteria esse movimento perpétuo na ausência de forças externas.

As soluções podem ter de um grau de liberdade a infinitos graus de liberdade, desde um sistema de pêndulo simples, à um sistema de um prato vibrando, uma viga grossa vibrando em três dimensões e daí até infinitos graus de liberdade, podendo também conter mais de um sistema dentro de outro, formando uma série de Fourier, Bernoulli, D'Alembert e outras.

Um exemplo para um sistema formado com apenas um grau de liberdade seria por exemplo um sistema onde uma mola presa a uma massa e fixada em uma parede oscila em somente uma dimensão, tornando o sistema simplesmente linear ou melhor dizendo, com um grau de liberdade somente.

Outro exemplo de um sistema que sua solução teria dois graus de liberdade seria de um prato vibratório como proposto pelo cientista alemão E. F. Chladni (1756-1824) e que foi resolvido em 1815 Sophie Germain, que obteve um erro em suas condições de contorno como antes citado na parte histórica do problema, mas que corrigindo se torna um problema de dois graus de liberdade.

Mais um exemplo e agora com três graus de liberdade é o som, onde o problema mecânico vibra em todas as três dimensões ao mesmo tempo, isso leva em conta uma coordenada esférica que oscila para dentro e para fora, é extremamente complexa e em alguns casos até sendo necessário o uso de um computador, isso se não for um sistema impossível.

Existem também sistemas discretos e contínuos. Um sistema discreto por exemplo é aquele existe um limite para os seus graus de liberdade, um pêndulo simples por exemplo, agora os sistemas considerados contínuos são aqueles que tem infinitos graus de liberdade, em uma viga com um número infinito de pontos de massa por exemplo.

2.5 Classificações das Vibrações

Além das outras propriedades anteriormente citadas uma vibração pode ser classificada de várias maneiras, a primeira é uma vibração livre e a outra é se a vibração iniciou de forma forçada.

A vibração livre é definida por um movimento inicial que perpetua sem a interação de forças externas sobre o objeto, como um sistema massa mola fechado em uma caixa a vácuo com as condições de atrito ideais (sem atrito).

Já a vibração forçada exige a existência de uma força externa de forma contínua para manter as trocas de energia de potencial para cinética, como em um motor de carro por exemplo, onde o motor é alimentado pela força da explosão da gasolina e isso faz manter o ciclo do virabrequim (peça responsável por transferir a energia dos pistões para a transmissão das rodas).

Uma vibração também pode ser amortecida ou não amortecida, onde um sistema irá dissipar ou não a sua energia potencial, podendo então perder sua amplitude com o tempo e como resultado a sua força.

Um sistema de amortecimento pode ser encontrado facilmente em automóveis, onde se tem a suspensão do carro, são molas preparadas para dissipar a energia potencial e de certa forma frear os movimentos de oscilação para cima e para baixo, que podem causar desconforto.

A não amortecida são, a grosso modo, uma expressão teórica, pois não existe um sistema que não tenha interação de atrito, mas considerando que fosse possível a criação de um sistema massa mola isolado sem a interação com nenhuma força, esse seria um exemplo perfeito de um sistema não amortecido.

A vibrações lineares e não lineares são definidas como, se as componentes do sistema forem resultantes em apenas uma direção, esse é considerado um sistema linear, se caso tenha uma resultante em duas ou mais direções é considerado não linear.

As vibrações podem ser determinísticas ou aleatórias, um alto falante é um bom exemplo de um sistema de vibrações determinísticas, agora as vibrações de um terremoto por exemplo, não pode ser determinado ao certo, existem variações e então é obtido uma média para traçar um resultado.

2.6 Procedimento de Análise de Vibrações

Os procedimentos de análise de uma vibração é estudando uma interação subsequente de objeto por objeto e estudar as trocas de energias para ter um refinamento aproximado do resultado desejado.

A primeira etapa para obter uma modelagem matemática para um sistema deve se seguir a seguinte lógica, um martelo que está batendo na superfície de um metal, sobre uma bigorna, em cima do chão da terra, logo existe uma rigidez e uma elasticidade para cada passo do sistema, sendo uma para o metal, outra para a bigorna e por fim a rigidez e elasticidade para o chão.

Logo na segunda etapa deve se isolar as massas para elaborar o sistema usando os princípios da dinâmica, então derivamos e encontramos as equações diferenciais ordinárias ou parciais.

Terceira etapa é encontrar uma solução para o problema solucionando as equações diferenciais obtidas a partir do diagrama desse sistema, e em seguida trabalhar com métodos matemáticos para encontrar seu conjunto solução.

Por fim a quarta e última etapa é a interpretação ou a comparação desses resultados em cima do sistema trabalhado, onde serão levados em conta, período, velocidade, acelerações, e comparados logo em seguida o teórico com o experimental (se possível).

2.7 Controle de Vibração - Introdução

Existem muitas fontes de vibrações presentes no nosso cotidiano provocado por motores, máquinas motrizes, nos carros ou qualquer outro automóvel, e essas forças podem ser um problema na maioria das vezes se não forem balanceadas, podendo gerar fissuras, deformação no objeto ou até mesmo maus funcionamentos futuros devido aos desgastes.

E ainda uma outra parte muito preocupante que são os efeitos de ressonância que essas máquinas podem fazer com as pessoas, danos nos tímpanos, tonturas ou mal estar como no caso de navios que chacoalham, e em metalúrgicas onde os martelões trabalham o dia inteiro provocando distúrbios sonoros na cabeça dos funcionários, ou mesmo alguns ruídos de automóveis ou alto falantes trabalhando em alta frequência podem causar sérios danos aos tímpanos.

Como visto nesses problemas eles podem causar grandes prejuízos tanto para a comunidade quanto para os próprios trabalhadores que vivem nesse ambiente, e uma dessas soluções como antes mencionado, é o contrabalanço que pode anular os ruídos ou vibrações de um sistema.

2.7.1 Curvas de Vibrações Controladas e Descontroladas

É possível fazer a plotagem de um gráfico comparando um mesmo sistema de uma fonte com amortecimento e outra de uma fonte sem amortecimento, criando um gráfico sobreposto e fazendo uma análise dos benefícios, como por exemplo a comparação da exposição humana a poluição de vibrações e a outra com a exposição vibrações amortecidas.

A análise dessas curvas em vários materiais diferentes pode ajudar a construir um sistema quase ideal, onde cada um irá cumprir seus papéis sem se afetarem, como por exemplo o carro, ao construir um motor é possível fazer uma análise das curvas de vibrações entre os materiais e descobrir qual deles terá o menor ruído, sendo assim resolve o problema dos danos a humanidade e a todos os outros seres vivos também.

2.7.2 Amenizando as Vibrações da Fonte

A princípio uma coisa que deve se levar em consideração ao pensar em amenizar as vibrações de uma fonte é ver se é viável, pois nem sempre ela será, existem inúmeras fontes de vibrações que podem ser considerados impossíveis de se reduzir, como turbulências atmosféricas, terremotos, ou motores a diesel.

Mas podemos ver que em um helicóptero essa ideia é viável, onde se pode encontrar uma hélice na parte superior da fuselagem, e outra na parte traseira do helicóptero fazendo esse papel de equilíbrio, e a explicação para isso é a terceira lei de Newton, que diz que para toda ação de uma força existe uma reação, então o movimento rotativo das pás empurra helicóptero para a direção oposta da força exercida pelas pás em seu movimento rotativo.

As pás superiores provocam uma reação de rodópio no helicóptero e a forma de evitar que isso ocorra é colocar o contrabalanço na parte traseira para anular as forças desnecessárias, amenizando as vibrações da fonte sem cancelar as forças que fazem o helicóptero subir.

2.7.3 Balanceamento em Máquinas Rotativas

Se for colocado uma massa sobre um disco rotativo isso pode causar vibrações embora exista um limite, e esse efeito pode ser anulado colocando uma massa com um espelhamento de coordenadas na vertical que cancelam o efeito de balanço.

Contudo existem duas formas de fazer um contrabalanço nessa situação, a primeira é o balanceamento em um plano, ou estático, o outro é o balanceamento em dois planos, ou dinâmico.

2.7.4 Balanceamento Estático

Esse balanceamento é considerado no caso de um disco delgado preso a um eixo fixo, como um ventilador, ou esmeril, e quando o seu centro de massa está deslocado devido a erros de fabricação ou anti simetria geométrica, partes maiores ou impurezas de materiais também podem causar esse efeito, pode não ser homogêneo a distribuição de massa por densidade.

2.7.5 Balanceamento Dinâmico

Neste caso pode ser um motor com um disco rígido alongado a um certo comprimento ao longo da direção do eixo rotativo, como por exemplo um motor na horizontal com seu corpo rígido semelhante a um cilindro, esse seria um balanceamento dinâmico, pois o deslocamento do centro de massa poderia estar em qualquer ponto, desde o ponto zero até a distância máxima do cilindro, ou melhor dizendo em qualquer ponto desse volume.

O desbalanceamento dinâmico é comum em turbinas alternadas de energia presentes em solo firme ou no mar por grandes navios ou submarinos militares que ficam meses em alto mar e necessitam de energia elétrica para comunicação.

2.7.6 Rodopio de Eixos Rotativos

Muito conhecido como rodopio (*whirling*) é a rotação do plano formada pelas linhas centrais dos mancais e o eixo curvado, em sistemas com velocidades críticas poderá haver um efeito de chicoteio (*whipping*) que é uma resposta a instabilidade do sistema devido a transição de uma estabilidade para um sistema de instabilidade.

2.7.7 Balanceamento do Motor Alternativo

Os elementos de movimento que definem um motor alternativo são, o pistão, a manivela e a biela, que são derivadas das variações das pressões periódicas nos cilindros e as forças de inércia vinculadas às partes móveis.

2.8 Medições e Aplicações

As razões para quais precisamos fazer medições são muitas, mas em destaque temos alguns exemplos tais como.

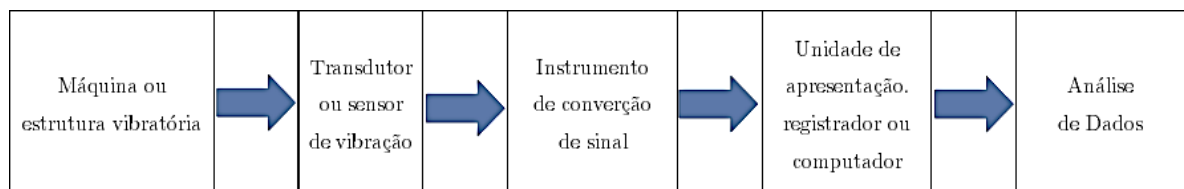
1. Para monitorar as exigências crescentes de produtividade mais altas e para projetos econômicos que resultam em velocidade de operações mais altas para a maquinaria e também utilização inteligente com eficiência de materiais para as construções estruturais dos mesmos.
2. A medição das frequências naturais em uma estrutura ou máquina é útil para selecionar as velocidades de operação, para controlar as ressonâncias que podem ocorrer.
3. Ainda que tenhamos cálculos ou seja uma teoria para estudar os comportamentos que uma máquina pode ter nem sempre eles são exatos ou reais, até mesmo as simulações computacionais mais sofisticadas podem essas nesse quesito como probabilidades, então por isso temos sensores, e juntando tudo isso podemos construir uma base para análise e ter um resultado mais exato.
4. Entender as frequências e os modos de vibração vão ser necessários para projetos onde o sistema estará em isolamento de vibração ativa.
5. Em muitas aplicações, a sobrevivência de uma estrutura ou máquina em um ambiente de vibração especificado deve ser determinada. Se a estrutura ou máquina puder executar a tarefa esperado mesmo após a conclusão do teste no ambiente de vibração é de se esperar que ela consiga sobreviver as condições específicas.

6. Por simplicidade os sistemas contínuos costumam ser aproximados como sistemas com vários graus de liberdade. Se as frequências naturais e formas modais medidas de um sistema contínuo forem comparáveis às frequências naturais e formas modais do modelo com vários graus de liberdade, a aproximação será considerada válida.
7. A medição de características da vibração de entrada e características da vibração de saída resultante de um sistema ajudam a identificar o sistema em termos de sua massa, rigidez e amortecimento.

2.8.1 Esquema de medição de vibração

A figura 2.4 representa uma ilustração dos aspectos básicos de um esquema de vibração. Primeiro passo do esquema representa as medições a começar primeiramente com alguma fonte de vibração, ou esteiras de fábricas, marteletes de fábrica de carros para montagem das peças, motores de carros ou unidades fornecedoras de energia. O segundo representa um transdutor que é um dispositivo que transforma valores de variáveis físicas em sinais elétricos equivalentes, existem diversos tipos transdutores de resistência variável, transdutores piezelétricos, transdutor transformador diferencial linear variável, transdutores eletrodinâmicos, transdutor de deslocamento e vários outros tipos, cada um atende a uma necessidade específica.

Figura 4: Esquema Básico de Medição de Vibração

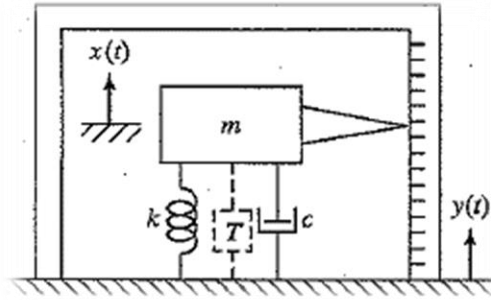


Fonte: Autor.

2.8.2 Sensores de vibração

O sensor de vibração é um transdutor usado em um conjunto com um outro dispositivo para medir vibrações. Os sensores de vibração são comumente usados para estudos sísmicos, e são compostos de um arranjo do sistema massa-mola-amortecida, montado sobre um corpo vibratório, e que é medido pela determinação do deslocamento da massa em relação à base na qual está montada.

Figura 5: Instrumento Sísmico.



Fonte: (RAO, 2008).

3 MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA BIENGASTADA

Na abordagem dinâmica de vigas, as vibrações e deflexões são determinadas pelas mecânica newtoniana ou por métodos variacionais usando a densidade lagrangeana, obtendo-se equações diferenciais parciais (EDPs) com enorme potencial de aplicabilidade, destaca-se entre elas a *equação de Euler-Bernoulli*. A teoria construída a partir dessa equação é conhecida como “teoria clássica de vigas”, é bastante simples e fornece resultados razoáveis para frequências de vigas finas (ou delgadas) que não incluem o cisalhamento longitudinal.

Nesse capítulo, é apresentado o modelo de viga *biengastada* e a partir da dinâmica newtoniana são obtidos os modos de vibração da viga a partir da Euler-Bernoulli.

3.1 Introdução

As vigas não são simplesmente barras, são elementos estruturais que suportam forças aplicadas em vários pontos ao longo de seu eixo e geralmente são prismáticas retas e longas. Vigas de aço e de alumínio desempenham um papel importante na engenharia de estruturas e mecânica. Vigas de madeira são muito utilizadas na construção de casas. Esse elemento é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicóptero, satélites flexíveis, asa de aviões, braços robóticos, trilhos de trem, construção civil e subsistemas de estruturas mais complexas. Na maioria dos casos, as forças são perpendiculares ao eixo da viga. Esse carregamento transversal provoca somente flexão e cisalhamento na viga. Quando as forças não estão em ângulo reto com o eixo da viga, elas podem produzir forças axiais sobre ela.

A parte da engenharia civil que se dedica ao estudo das tensões recebidas pela estrutura e ao seu dimensionamento é a engenharia estrutural. Cabe ressaltar, entretanto, que as vigas não são uma particularidade da engenharia civil, uma vez que na engenharia mecânica existem diversos elementos de máquinas que tem comportamento equivalente, fato este que faz com que nesta engenharia sejam estudadas diversas disciplinas direcionadas exclusivamente para a área de estruturas, conteúdo abordado em mecânica dos sólidos e resistência dos materiais. Portanto, o estudo de vigas é uma área multidisciplinar onde atuam além de engenheiros, os físicos, matemáticos e os químicos devido a enorme aplicação tecnológica desses elementos.

A maioria das estruturas complexas são compostas por vigas e são projetadas para resistir a cargas estáticas. Porém, elas podem estar sujeitas a eventos que geram cargas dinâmicas, terremotos, ventos, ondas devido ao tráfego de veículos. Este tipo de carga pode causar movimentos vibratórios que podem prejudicar a estrutura e trazer perigo para aqueles em seu interior (ou abaixo delas). Em prédios altos, por exemplo, as

vibrações induzidas por vento podem causar desconforto aos ocupantes (especialmente nos andares superiores) ou danos estruturais. Devido a isso, diversos pesquisadores de todo mundo estudam formas de desenvolver estruturas mais seguras e resistentes. Por exemplo, alguns projetos que enfrentaram problemas com vibrações viram fonte de estudo e acabam servindo como fonte de conhecimento para evitar problemas semelhantes no futuro. Da mesma maneira, projetos que contam com tecnologia avançada de amortecimento de vibrações também são extensivamente estudados. Neste sentido, existem um número crescente de publicações sobre estudos sobre vibrações de barras, pêndulos e outras estruturas.

Uma linha de estudo interdisciplinar é a de vibrações transversais, esbeltas ou grossas, submetidas a determinados vínculos com condições iniciais variadas. O estudo das respostas elásticas e dinâmicas de componentes estruturais, sob várias condições de carga é muito útil para a modelagem e análise do comportamento de estruturas mais reais e complexas sujeitas a carregamentos similares. Na literatura, o estudo das deflexões ou vibrações transversais de vigas, pode ser representado por quatro modelos “físico-matemático” principais largamente estudados: Euler-Bernoulli, Rayleigh, *Shear* ou Vlasov e Timoshenko. Esses modelos diferenciam-se pelos efeitos considerados, via hipóteses simplificadora, o que gera resultados com distintos níveis de precisão a depender da aplicação de interesse.

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por *teoria clássica do estudo de vigas*, é a mais comumente utilizada, ela é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Porém, esta teoria tende a superestimar levemente as frequências naturais. Este problema é exacerbado para as frequências naturais dos maiores modos. Além disso, a predição das frequências também é melhor para vigas finas ou delgadas do que para vigas não delgadas. Já a teoria de Reyleigh apresenta um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito da rotação da seção transversal. Como consequência, parcialmente corrige os efeitos da superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, as frequências naturais são ainda superestimadas.

O modelo de *Shear* ou Vlasov adiciona distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli e não incluem os efeitos da rotação, dessa forma, a estimativa das frequências naturais melhora consideravelmente. A inclusão dos efeitos de rotação e de cisalhamento no modelo de Euler-Bernoulli é feita no modelo de Timoshenko. O modelo de Timoshenko foi (e ainda é) a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não-delgada e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da rotação não podem ser desprezados. Seguindo Timoshenko, vários autores têm obtido as equações para frequência e modos para várias configurações de condições de contorno. Portanto, quando se estuda as vibrações de vigas em geral, todas as abordagens apresentam suas vantagens e desvantagens.

Neste sentido, preferimos a abordagem de Euler-Bernoulli pela sua simplicidade para estudar os modelos de vibração de uma viga biengastada na seção seguinte.

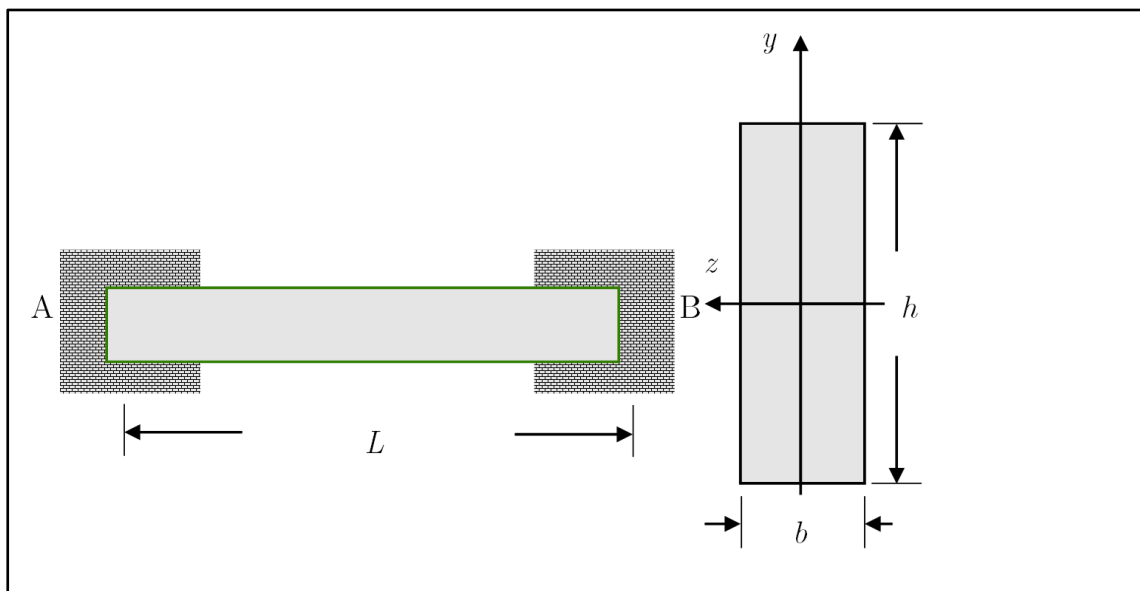
3.2 O Objeto de Estudo: A Viga Biengastada

Consideremos uma viga *biengastada de Euler-Bernoulli*, Figura 3.1. A viga está presa em A e B por vínculos que restringem os translacionais e rotacionais. Além disso, ela é prismática possuindo um comprimento L (seu vão), largura a e altura b . Além disso, a viga possui uma linha neutra (onde a tensão $\sigma_x = 0$), o eixo z , que está posicionada em um plano que intercepta a viga em $h/2$ e seu momento de inércia da seção em relação a linha neutra é $I = bh^3/12$ e seu coeficiente de Poisson é definido pela razão,

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}, \quad (3-1)$$

onde ε_α são as deformações específicas (deformações por comprimento).

Figura 6: Viga Biengastada de vão L , largura b e altura h .



Fonte: Autor.

A viga acima não deformada pode ser considerada composta por infinitas fibras longitudinais de comprimento L . Quando a viga sofre flexão, as fibras próximas à superfície côncava se contraem sob pressão de compressão e as fibras próximas à superfície convexa devem distender por tensão de tração. A superfície que separa a região de compressão da região de deformação (onde o comprimento permanece inalterado) é chamada de superfície neutra. A intersecção entre superfície neutra e o plano de simetria é chamada de linha neutra.

A equação que determina tensão de flexão é dada por,

$$\sigma_x = -\frac{M}{I}y \quad (3-2)$$

onde I é o momento de inércia da seção reta, M é momento fletor em relação a linha neutra e y é a distância da linha neutra a um ponto da viga. Sua curvatura fica determinada pela relação conhecida do cálculo,

$$\rho^{-1} = \frac{M}{EI} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3-3)$$

que no caso de pequenas deflexões ($dy/dx = 0$), se reduz a,

$$\rho^{-1} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (3-4)$$

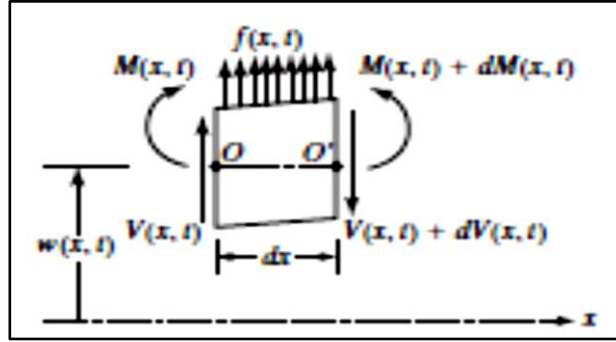
A viga mostrada na Figura 6 é considerada de *Euler-Bernoulli* se satisfazer as seguintes hipóteses:

- a) O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões da viga;
- b) A viga é constituída de um material linearmente elástico;
- c) O Coeficiente de Poisson é negligenciável (não teve contração ou expansão transversal ao longo dos eixos y ou z);
- d) A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele (a linha neutra é posicionada em $h/2$);
- e) Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação;
- f) O ângulo de rotação é muito pequeno;
- g) O efeito de momento de inércia de rotação é desprezado;
- h) A energia envolvida no cisalhamento é desprezada.
- i) A viga é constituída de material homogêneo com densidade ρ .

3.3 A Dinâmica de Newton: Equação de Euler-Bernoulli

Considere o diagrama de corpo livre de um pequeno elemento de viga de massa dm , comprimento dx e uma área de seção transversal $A(x)$ em uma vibração transversal ao longo de y com uma carga distribuída. O elemento foi obtido usando o método da seção, fazendo um corte nos pontos O e O' a uma distância x de A . Nas seções O e O' aparecem o momento fletor $M(x, t)$, a força cortante $V(x, t)$. A carga distribuída em $f(x, t)$, é uma força por unidade de comprimento. O elemento de massa pode ser determinado a partir da relação $dm = \rho dV = \rho A(t)dx$ onde ρ é a densidade volumétrica da viga em questão.

Figura 7: Elemento de Viga



Fonte: (RAO, 2008)

De acordo com a dinâmica newtoniana a força resultante ao longo de y e o momento em relação à O (nulo) são determinados por,

$$+\uparrow \sum F_y = ma_y ,$$

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-5)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_O = 0 ,$$

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3-6)$$

Escrevendo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx, \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx, \quad (3-7)$$

E desconsiderando os termos que envolvem potências ao quadrado de $dx \ll 1$, as equações (3-5) e (3-6) podem ser escritas como,

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = V(x, t) \quad (3-9)$$

Em seguida, combinando as equações (3-7) e (3-6) obtemos,

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3-10)$$

Da teoria elementar de flexão de vigas (também conhecida como teoria de Euler-Bernoulli ou teoria da viga delgada ou fina) a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa a partir de (3-4) e a equação (3-8) pode ser reduzida a uma equação de derivada parcial de quarta ordem em x e segunda ordem em t

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3-11)$$

Para a viga mostrada na figura 3.2, em que a área da seção transversal é constante a equação e as vibrações são livres ($f(x,t) = 0$) a equação (3-8) reduz a equação de Euler-Bernoulli para vibrações livres,

$$c^4 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3-12)$$

onde,

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (3-13)$$

3.3.1 Condições Iniciais e Condições de Vínculos

Uma vez que a equação de movimento envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação a x , são necessárias duas condições iniciais (CI) e quatro condições de contorno (CC) para determinar uma solução única para $w(x,t)$. Normalmente, os valores de deslocamento lateral e velocidade são especificados como $w(x,t)$ e $\partial w(x,t)/\partial t$ em $t = 0$, de modo que as condições iniciais se tornam

$$w(x, t = 0) = w_0(x) \quad (3-14)$$

$$\frac{\partial w(x, t = 0)}{\partial t} = p_0(x) \quad (3-15)$$

onde $w_0(x)$ e $p_0(x)$ são funções que dependem das condições iniciais escolhidas.

Já as condições de contorno (CC) de uma viga biengastada é obtida das condições de que a deflexão e a inclinações são nulas em $x = 0$ e $x = L$:

$$x = 0: \quad w(x = 0, t) = 0 \quad (3-16)$$

$$\frac{\partial w(x = 0, t)}{\partial t} = 0 \quad (3-17)$$

$$x = L: \quad w(x = L, t) = 0 \quad (3-18)$$

$$\frac{\partial w(x = L, t)}{\partial t} = 0 \quad (3-19)$$

Estas equações determinam as formas nodais (funções nodais) e as frequências naturais da viga biengastada. As condições (3-16) e (3-18) são as condições de vínculos da viga em questão, por não existir efeito de rotação e translação nesses pontos A e B.

3.3.2 Vibrações Livres

Para estudar os modos de vibração livre da viga biengastada deve-se usar a equação (3-12) e as condições (3-14) - (3-20). A solução pode ser determinada usando o método de separação de variáveis $w(x, t) = X(x)T(t)$ substituindo em (3-12) e rearranjando os termos, obtemos

$$c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (3-20)$$

Em que a equação (3-21) pode ser escrita como,

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3-21)$$

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3-22)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3-23)$$

e as equações (3-21) e (3-22) permitem soluções analíticas em t e x .

3.3.4 Soluções no Tempo

A solução temporal (3-21) é obtida procurando soluções do tipo $W(x) = e^{st}$ que obtém a equação de autovalor, $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ cujas solução são $\pm i\omega$. Portanto a solução temporal é dada pela combinação linear,

$$T(t) = A^* \cos \omega t + B^* \text{sen} \omega t \quad (3-24)$$

onde usamos,

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \text{sen} \omega t \quad (3-25)$$

e o fato de que $(A + B) = A^*$ e $i(A - B) = B^*$.

3.3.5 A Solução Espacial

A solução temporal (3-20) é obtida procurando soluções do tipo $W(x) = e^{sx}$ que obtém a equação de autovalor $(s^2 - \beta^2)(s^2 + \beta^2) = 0$, cujas soluções são

$$\begin{cases} s^2 - \beta^2 = 0 \rightarrow s = \pm \beta \\ s^2 + \beta^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\beta \end{cases} \quad (3-26)$$

Portanto a solução temporal é dada pela combinação linear,

$$W(x) = C^* \cosh \beta x + D^* \text{senh} \beta x + E^* \cos \beta x + F^* \text{sen} \beta x \quad (3-27)$$

onde usamos,

$$\begin{aligned} e^{\pm\beta x} &= \cosh \beta x \pm \sinh \beta x \\ e^{\pm i\beta x} &= \cosh \beta x \pm i \sinh \beta x \end{aligned} \quad (3-28)$$

e o fato de que $(A + B) = A^*$, $(C - D) = D^*$, $(E + F) = E^*$ e $i(E - F) = F^*$. A equação (3-26) com as condições de contorno (3-16)-(3-18) ou na forma,

$$\begin{aligned} W(0) = W(L) &= 0 \\ W'(0) = W'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (3-29)$$

permite obter a equação de frequência,

$$\cosh \beta L \cos \beta L = 1. \quad (3-30)$$

As soluções da equação (3.30) permitem obter os valores βL e conseqüentemente as frequências dos modos de vibração da viga obtida de (3-22) (em Hz),

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (3-31)$$

onde,

$$\omega = \frac{(\beta L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}. \quad (3-32)$$

Na equação (3.32) E é módulo de elasticidade do material, $I = bh^3/12$ é o momento de inércia em relação a linha neutra (onde a tensão é nula), ρ é a densidade do material e L o seu comprimento. Essas constantes foram anexadas na Tabela 1 (abaixo).

Tabela 1: Propriedades da Viga em Balanço

Densidade (kg/m ³)	7888
Largura (mm)	4
Altura (mm)	17
Comprimento (cm)	65
Módulo de Elasticidade (GPa)	200

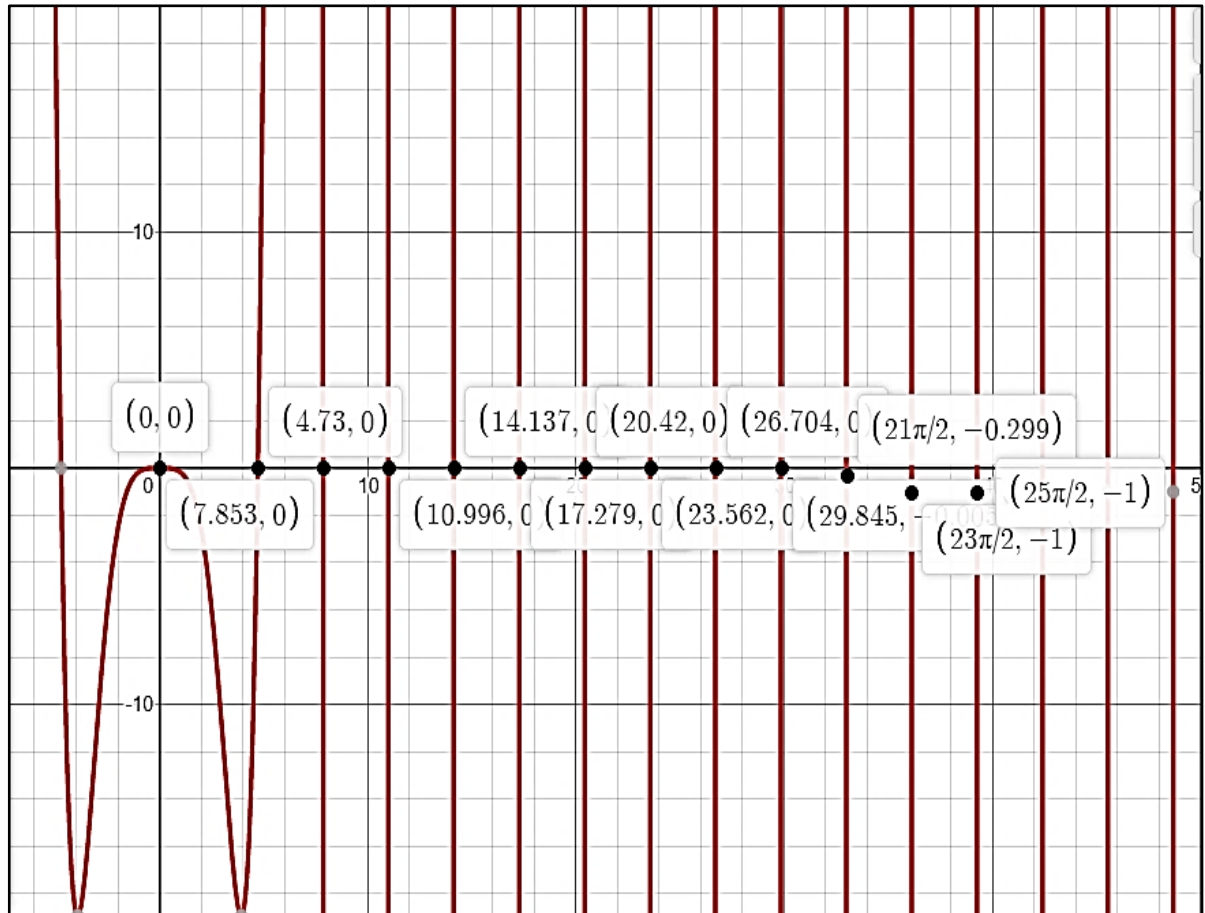
Fonte: Autor.

As soluções da equação (3-30) podem ser obtidas por softwares gratuitos na internet, como por exemplo, os softwares *desmos* ou *Geogebra*. Neste trabalho optou-se pela *calculadora gráfica desmos* lançada em 2011 pela Universidade de Yale. Ela permite possui uma interface gráfica que permite obter gráficos de qualidade.

A figura 8 mostra as possíveis soluções da equação (3-29) na forma,

$$\cosh \beta L \cos \beta L - 1 = 0. \quad (3-33)$$

usando a *calculadora gráfica desmos*.

Figura 8: modos de vibração software *desmos*.

Fonte: Autor.

No capítulo 4, os valores de βL determinados no *calculadora desmos* serão tabelados para determinar as 15 (quinze) primeiras frequências dos modos de vibração da viga engastada e o resultado será comparado com os obtidos por simulação computacional usando o método dos elementos finitos (MEF).

4 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

O método dos elementos finitos (MEF) tornou-se uma ferramenta poderosa na solução numérica de uma grande variedade de problemas de Física e Engenharia. As aplicações variam desde a análise de tensão, deformação e vibrações em estruturas automotivas, aeronaves, prédios e pontes até a análise de transferência de calor, escoamento de fluidos, fluxo magnético, infiltração e outros problemas de fluxo. Com o avanço da tecnologia de computação e sistema, problemas complexos podem ser modelados com relativa facilidade. Diversas configurações alternativas podem ser testadas em um computador antes que o primeiro protótipo seja construído. Tudo isso sugere que precisamos acompanhar esse desenvolvimento a partir da compreensão da teoria básica, das técnicas de modelagem e dos aspectos computacionais do método dos elementos finitos.

Neste capítulo, veremos uma introdução básica sobre o MEF e em seguida usamos o método para obter os modos de vibração de uma viga em balanço.

4.1 A Simulação Computacional

A simulação computacional usando o MEF pode ser feita ou programável em qualquer linguagem de programação como o Fortran 95 (ou o Fortran HPF), a linguagem C ou C++ ou ainda MATLAB (ou OCTAVE, versão livre). Neste TCC escolhemos o MATLAB como o ambiente de programação.

4.1.1 O Software MaTLab

O MATLAB (abreviatura par MaTriX LABoratory – Laboratório de Matrizes) é um programa de computador especializado e otimizado para cálculos científicos e de Engenharia. Inicialmente ele foi projetado para cálculo com matrizes; ao longo dos anos, transformou-se em um sistema computacional flexível, capaz de resolver essencialmente muitos problemas técnicos. Ele implementa a linguagem de programação de mesmo nome, juntamente com uma vasta biblioteca de funções predefinidas que torna as tarefas de programação técnica mais fáceis e eficientes. Além disso, o MATLAB tem muitas vantagens, em comparação com linguagens computacionais convencionais (C++, Fortran e Python), entre elas podemos citar: Facilidade de uso, independência da plataforma, funções predefinidas diagramações independentes de dispositivos e interface gráfica de usuário.

Com o MaTLab é possível estudar:

- a) Sistemas Moleculares por Monte Carlo ou Dinâmica Molecular;
- b) Tensão e Deflexão de elementos estruturais por Métodos de Elementos Finitos;

- c) Dinâmica e Estática de Fluidos;
- d) Resistência de Estruturas;
- e) Propriedades de Materiais Magnéticos;
- f) Simulação de Fármacos em Indústrias farmacêuticas e outras.

4.1.2 Contexto Histórico do Método dos Elementos Finitos

As ideias básicas do método dos elementos finitos (MEF) se originaram dos avanços na análise estrutural de aeronaves. Em 1941, Herenikoff apresentou uma solução para problema de elasticidade usando “método de teoria de estruturas”. O artigo usava a interpolação polinomial por partes sobre sub-regiões triangulares para modelar problemas de torção, foi publicado em 1943. Turner et al. Derivaram matrizes de rigidez para treliça, viga e outros elementos, e apresentaram seus resultados em 1956. O termo elemento finito foi a princípio criado por Clough em 1960.

Na década de 1960, os engenheiros usaram o método para aproximar a solução de problemas de análise de tensão, escoamento de fluidos, transferência de calor e outras áreas. Um livro de Argyris de 1955 sobre o teorema de energia e métodos matriciais estabeleceu uma base para outros desenvolvimentos nos estudos sobre elementos finitos. O primeiro livro sobre elementos finitos, de Zienkiewicz e Cheung, foi publicado em 1967. No final da década de 1960 e no início da de 1970, a análise de elementos finitos foi aplicada a problemas não lineares e a grandes deformações. O livro de Oden sobre contínuos não lineares foi publicado em 1967.

Portanto, as bases matemáticas foram estabelecidas na década de 1970. O desenvolvimento de novos elementos, estudo de convergência e outras áreas relacionadas se encaixaram nessa categoria. Hoje, o avanço em computadores de grande porte e a disponibilidade de microcomputadores poderosos mantêm esse método ao alcance de alunos de Física e Engenharia que trabalham o ensino e em indústrias. Alguns autores entendem que o MEF é uma ferramenta poderosa se simulação interdisciplinar que permite estudar problemas importantes de Física e de Engenharia usando os conceitos de Álgebra Linear, uma disciplina extremamente importante neste método além da mecânica clássica.

Na seção seguinte falaremos um pouco sobre o MEF e seus fundamentos.

4.1.3 Formulação do MEF: Uma Introdução

Nesse método de análise, uma região complexa definindo um meio contínuo é transformada em formas geométricas simples e discretas, chamadas elementos finitos. A propriedades dos materiais e as relações governantes são consideradas sobre esses elementos e expressas em termos de valores, considerando o carregamento e os vínculos, resulta em um conjunto de equações. A solução dessas equações nos dá o comportamento aproximado do meio contínuo.

Uma Viga no MEF é dividida em elementos, como mostrado na Figura 4.1. Cada nó tem dois graus de liberdade (GDL). Normalmente, os GDL do nó i são Q_{2i-1} e Q_{2i} . O GDL Q_{2i-1} é o deslocamento transversal, e Q_{2i} é a declividade ou rotação da tangente à linha elástica (ou linha neutra). O vetor

$$\mathbf{Q} = Q_1, Q_2, \dots, Q_{10} \quad (4-1)$$

Representam o vetor deslocamento global. Para um único elemento, os GDL locais são indicados por

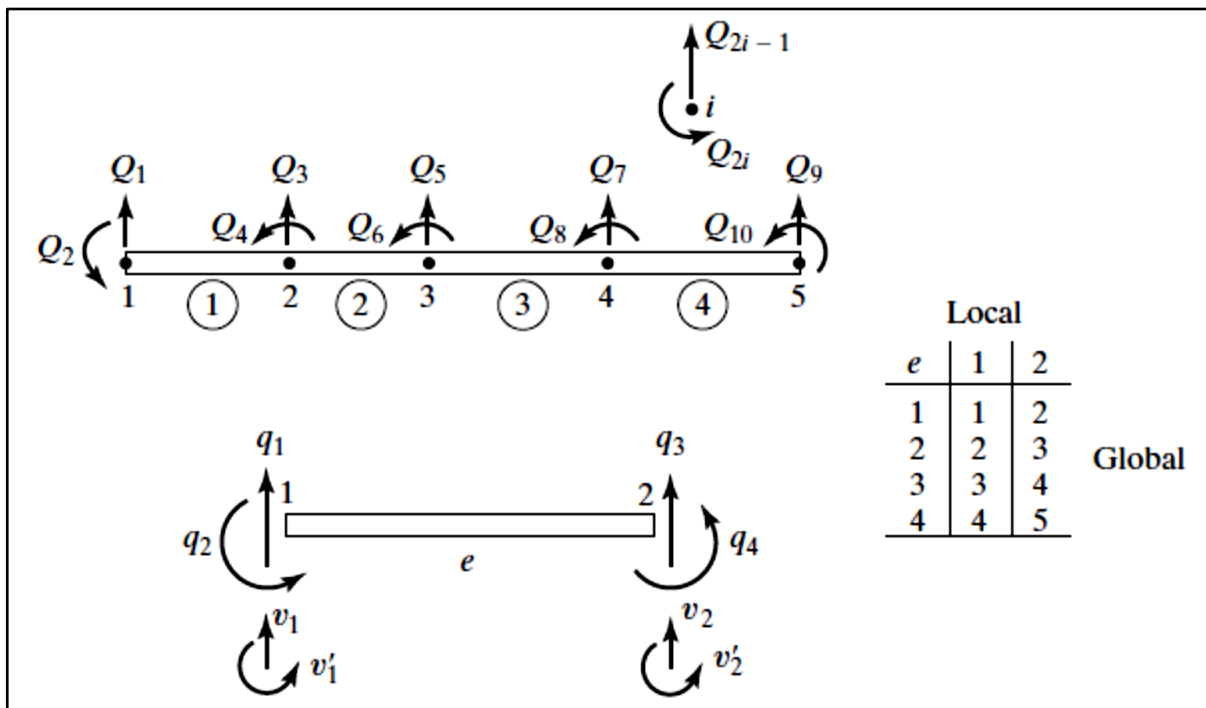
$$\mathbf{q} = q_1, q_2, q_3, q_4 \quad (4-2)$$

A correspondência local-global é fácil de ver pela tabela 4.1. O vetor \mathbf{q} é o mesmo que $v_1, v_1', v_2, v_2' \quad (4-3)$. As funções de interpolação de v em um elemento são definidas de ξ no intervalo -1 a $+1$, como mostra a Figura 4.2. As funções de forma para os elementos de viga diferem daquelas discutidas anteriormente. Como são envolvidos deslocamentos e declividades, definimos funções de forma de Hermite, que satisfazem os requisitos de continuidade de deslocamento e declividade nodal. Cada uma das funções de forma tem ordem cúbica representada por

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3. \quad (4-3)$$

onde $i = 1, 2, 3, 4$ e as condições dadas na tabela 4-1.

Figura 9: Discretização em elementos finitos.



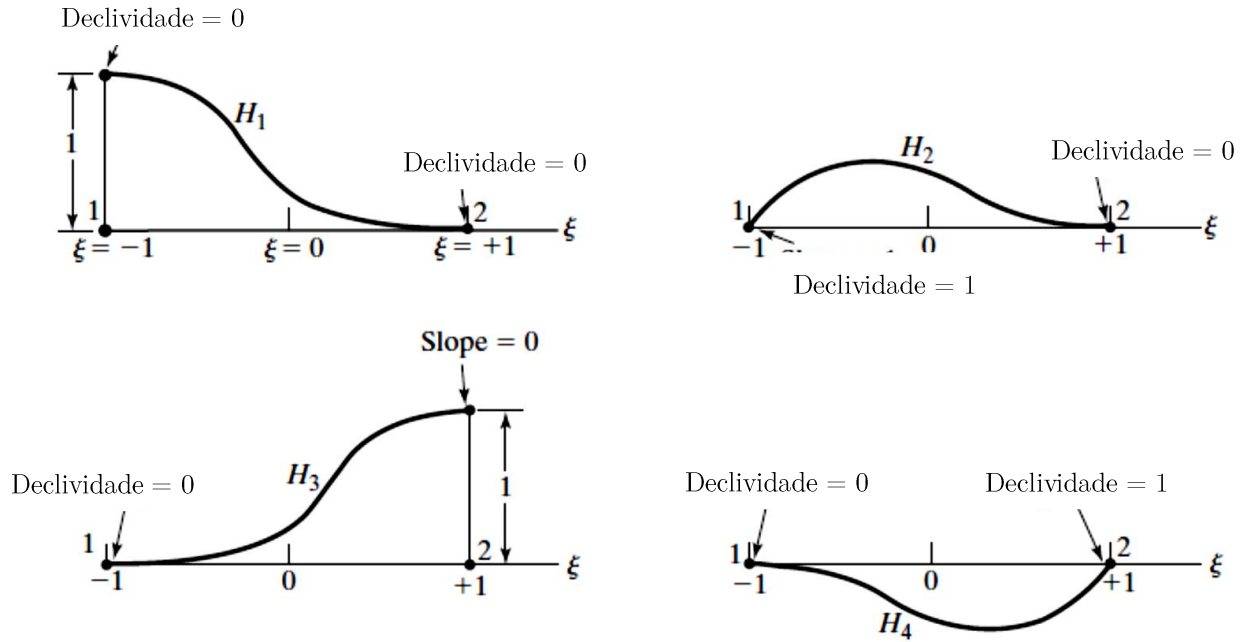
Fone: (TIRUPATHI, 2017)

Tabela 2: Condições de H_i e suas derivadas para cada valor ξ .

ξ/H_i	H_1	H'_1	H_2	H'_2	H_3	H'_3	H_4	H'_4
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = +1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Fonte: (TIRUPATHI, 2017)

Figura 10: Funções de Forma de Hermite.



Fonte: (TIRUPATHI, 2017)

Os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i podem ser facilmente obtidos com a imposição dessas condições, Assim,

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\
 H_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\
 H_3 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\
 H_4 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

e, portanto, os polinômios de Hermite podem ser usados para escrever as funções de interpolação $v(\xi)$

$$v(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1 \tag{4-6}$$

As coordenadas transformam-se pela relação

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\ell_e}{2} \xi \tag{4-7}$$

onde ℓ_e é o comprimento do elemento de viga.

Da regra da cadeia

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\ell_e}{2} \frac{dv}{dx} \quad (4-8)$$

E observando que dv/dx avaliado nos nós 1 e 2 é igual a q_2 e q_4 respectivamente, teremos

$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{\ell_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_2 + \frac{\ell_e}{2} H_4 q_4 \quad (4-9)$$

que pode ser escrita na forma matricial

$$v = \mathbf{H}\mathbf{q} \quad (4-10)$$

onde a matriz é dada por,

$$\mathbf{H} = \left[H_1, \frac{\ell_e}{2} H_2, H_3, \frac{\ell_e}{2} H_4 \right] \quad (4-11)$$

Um elemento de viga sob flexão dinâmica pode ser associado a ele uma energia cinética T e uma energia potencial de flexão transversal U . Essa energia é obtida da relação $L = T - U$, onde L é a lagrangeana. Vamos definir agora essas energias em termos de funções nodais.

Energia Potencial de Flexão

A energia potencial em uma flexão é obtida da relação,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\alpha} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx \quad (4-12)$$

onde E e I são respectivamente o módulo de elasticidade e o momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra e v é a deflexão. Calculando a derivada segunda de (4-10) obtemos,

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \mathbf{q}^T \frac{16}{\ell_e^4} \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right) \quad (4-13)$$

em que,

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right) = \left[\frac{3}{2} \xi, \frac{-1 + 3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2}, -\frac{3}{2} \xi, \frac{1 + 3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2} \right]. \quad (4-14)$$

Com a substituição de $dx = \frac{1}{2} \ell_e d\xi$ e as equações (4-13) e (4-14) em (4-12), a seguinte relação integral,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{8EI}{\ell_e^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \xi^2 & \frac{3}{8}(-1+3\xi)\ell_e & -\frac{9}{8}\xi^2 & \frac{3}{8}\xi(1+3\xi)\ell_e \\ 0 & \frac{1}{16}(-1+3\xi)^2\ell_e^2 & -\frac{3}{8}(-1+3\xi)\ell_e & -\frac{1}{16}(-1+9\xi^2)\ell_e^2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{9}{4}\xi(-1+3\xi)\ell_e \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16}(1+3\xi)^2\ell_e^2 \end{bmatrix} dx \mathbf{q} \quad (4-15)$$

que pode ser escrita como,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q} \quad (4-16)$$

onde \mathbf{k}_e é a *matriz de rigidez* do elemento de viga,

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_e & -12 & 6\ell_e \\ 6\ell_e & 4\ell_e^2 & -6\ell_e & 2\ell_e^2 \\ -12 & -6\ell_e & 12 & -6\ell_e \\ 6\ell_e & 2\ell_e^2 & -6\ell_e & 4\ell_e^2 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

A matriz de rigidez é muito utilizada no método matricial da rigidez (ou em inglês *direct stiffness method*, DSM) é aplicável no cálculo de estruturas hiperestáticas de barras que se comportam de forma linear elástica. Este método é adequado para realizar análise computacional de qualquer estrutura, incluindo estruturas estaticamente indeterminadas. O método matricial se baseia em estimar as componentes das relações de rigidez para resolver as forças ou os deslocamentos com uso de um computador. As propriedades de rigidez do material são computadas em uma única equação matricial que governa o comportamento interno da estrutura idealizada. Os dados que se desconhecem na estrutura são as forças e deslocamentos, que podem ser determinados resolvendo esta equação. O método direto da rigidez é o mais comum nos programas de cálculo de estruturas.

Energia Cinética

A Energia Cinética do elemento de viga é definida pela relação,

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \rho dV \quad (4-18)$$

onde ρ é a densidade volumétrica (massa por volume) e $\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]$ é o vetor velocidade em um ponto \mathbf{x} . No MEF, dividimos a viga em elementos, e, cada elemento, expressamos por \mathbf{u} em função dos deslocamento nodais \mathbf{q} , usando de forma \mathbf{N} . Assim $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$. Em análise dinâmica, os elementos de \mathbf{q} são dependentes do tempo, enquanto \mathbf{N} representa funções de forma (espaciais) definidas em um elemento mestre. O vetor velocidade é, dada por $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}$ e portanto, a energia cinética de uma elemento pode ser escrita na forma,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\int \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (4-19)$$

onde

$$\mathbf{m}_e = \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4-20)$$

é a matriz de massa do elemento. Essa matriz é consistente com as funções de forma escolhidas e é chamada matriz de massa consistente.

Para o elemento de viga, usamos a função de forma de Hermite (4.5),

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \rho A_e \frac{\ell_e}{2} d\xi \quad (4-21)$$

e integrando todos os elementos da matriz,

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_e & 54 & -13\ell_e \\ 22\ell_e & 4\ell_e^2 & 13\ell_e & -3\ell_e^2 \\ 54 & 13\ell_e & 156 & -22\ell_e \\ -13\ell_e & -3\ell_e^2 & -22\ell_e & 4\ell_e^2 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

a matriz de massa para o elemento de viga.

Para aproximações discretas da mecânica de meios contínuos, como no método de elementos finitos, pode haver mais de uma maneira de construir a matriz de massa, dependendo da precisão e desempenho computacional desejados. Por exemplo, um método de massas agrupadas, no qual a deformação de cada elemento é ignorada, cria-se uma matriz diagonal de massa e anula a necessidade de integrar a massa ao longo do elemento deformado.

Frequências dos modos de vibração da viga

A energia total da viga no MEF é obtido do lagrangeano da soma da diferença da energia cinética e potencial de cada um dos elementos de viga,

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (4-23)$$

onde,

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \sum_e \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{q}} \quad (4-24)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q} \quad (4-25)$$

para vibrações livres. Portanto, a equação de movimento é obtida da equação de lagrange. Para as condições de regime permanente, começando a partir da posição de equilíbrio $\mathbf{Q} = \mathbf{U} \text{sen}(\omega t)$, onde \mathbf{U} é o vetor de amplitudes nodais de vibração, a equação de movimento é dada por,

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U}. \quad (4-26)$$

As frequências naturais dos modos normais vibração e os vetores nodais são obtidos da diagonalização das matrizes (4-25),

$$\{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}\}\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (4-27)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\{\mathbf{0}\}$ é a matriz nula e $\{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\} = \{\mathbf{D}\}$ é conhecida como matriz dinâmica. A equação (4-25) é um problema de autovalores e autovetores, de modo que ω^2 são os autovalores da matriz dinâmica do sistema. Tendo em mãos as frequências naturais de vibração, a matriz \mathbf{U} será a matriz de autovetores associado às frequências naturais. A diagonalização da matriz dinâmica permite encontrar as frequências naturais dos modos de vibração da viga

$$\omega^2 = diagonal\{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\} \quad (4-28)$$

e as frequências dos modelos de vibração são determinadas a partir da relação $f = \omega/2\pi$ em hertz (Hz).

4.2 Resultados e Discussões

Para verificar o resultado teórico obtidos a partir da equação de Euler-Bernoulli para uma viga em engastada com propriedades da pela tabela 4.2 usamos o método dos Elementos finitos implementado em MATLAB. A simulação computacional nos deu os seus modos de vibração, para sua respectiva frequência natural, o fator de partição e a massa modal efetiva para cada modo, com o número de elementos iguais a 100.

Com os dados da Tabela 1 (capítulo 3) e usando a equação (3-31) determinamos as frequência teórica de Euler-Bernoulli obtida da dinâmica de newton usado a relação,

$$f = \frac{(\beta L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}. \quad (4-29)$$

onde os resultados estão da Tabela 4..

Os modos de vibração da viga para cada frequência tabelada é mostrado na Figuras 4.3 e 4.4. para os 12 (doze) primeiros modos de frequência da viga em balanço simulado em no MEF para divisões de 30 elementos. O lado direito do gráfico onde a viga esta livre apresenta uma amplitude maior de vibração.

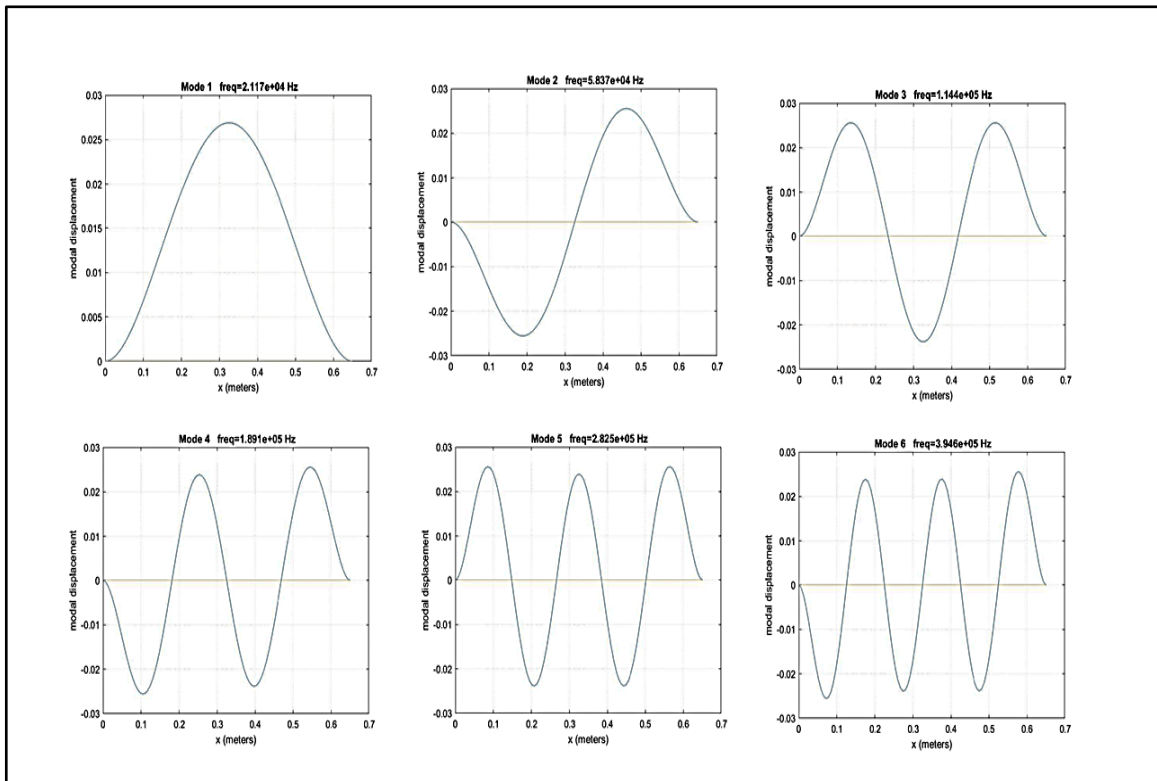
Tabela 4.3: Análise de Frequência dos Modos Teórico/Simulação e Erros.

Modos	βL	ω (rad/s)	F(Hz) Teórico	F(Hz) Simulação	%E
1	4,730	1309.2	208.4	211.7	1,58
2	7,853	3608.7	574.3	583.7	1,60
3	10,996	7075.4	1126.1	1144.0	1,56
4	14,137	11695.2	1861.3	1891.0	1,57
5	17,279	17471.3	2780.6	2826.0	1,61
6	20,420	24400.1	3883.4	3946.0	1,59
7	23,562	32487.5	5170.4	5254.0	1,59
8	26,704	41729.4	6641.3	6749.0	1,59
9	29,845	52123.7	8295.6	8430.0	1,59
10	32,986	63671.9	10134.1	10300.0	1,61
11	36,128	76380.0	12156.0	12350.0	1,57
12	39,270	90241.0	14362.0	14590.0	1,56
13	42,412	105260.0	16752.0	17020.0	1,57
14	45,553	121430.0	19326.0	19640.0	1,59
15	48,695	138750.0	22083.0	22440.0	1,59

Fonte: Autor.

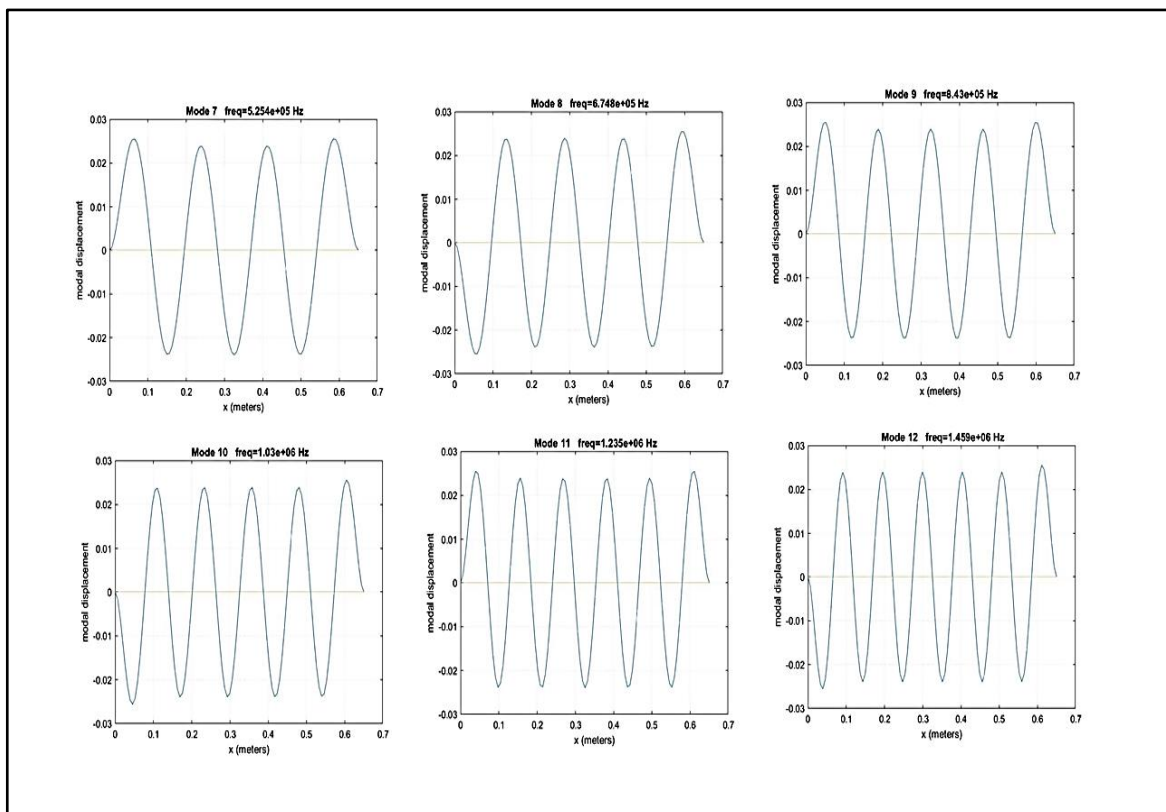
Pode se observar que os resultados foram muito bons dado a diferença comparando os resultados do teórico e da simulação no software MatLab, com resultados mínimos de 1,56% de erro e máximo de 1,61% de erro. No entanto estudos prolongados e testes nas próximas sequências mostram uma margem de erro maior a partir do 15º modo de vibração, esse mesmo fenômeno citado pode ser observando na eq. (3-72) plotada no software Desmos, a partir do 15º (βL), onde em: $N = 15 \ll \beta L$. As frequências começam a ficar mais complexas e exigem cada vez mais pontos entre um intervalo e outro para definir melhor o gráfico da função, visto que as distâncias entre os βL 's são cada vez maior dentre um ponto e outro à medida que a frequência aumenta, como a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da onda, frequências infinitas tende a precisar de pontos infinitos para serem mais precisos, o programa fica mais pesado e o código pode não funcionar em vigas muito (grandes, grossas ou compridas), o mesmo para altas frequências.

Figura 11: Modos de vibração intervalos de 1 a 6.



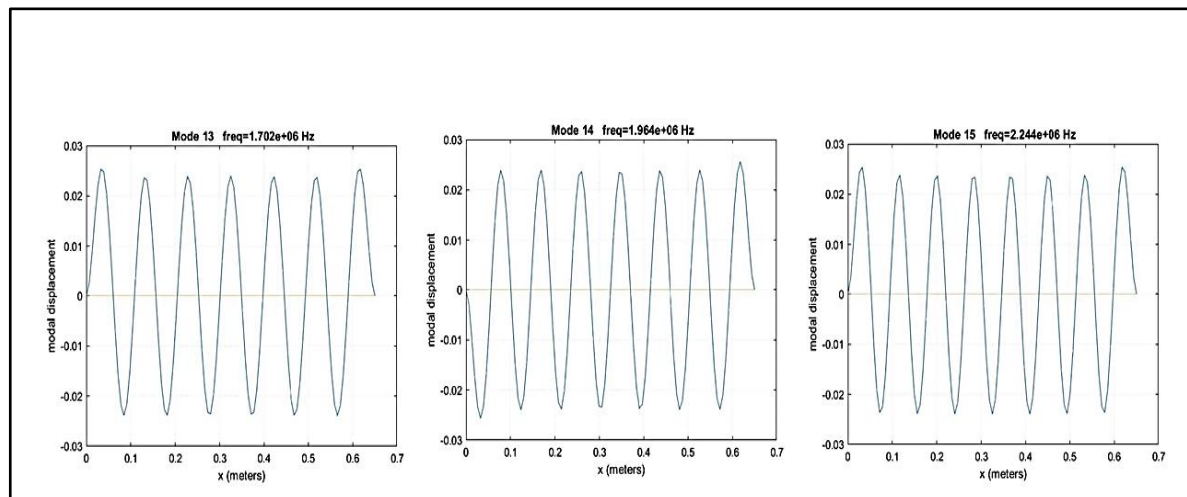
Fonte: Autor.

Figura 12: Modos de vibração intervalos de 7 a 12.



Fonte: Autor.

Figura 13: Modos de vibração intervalos de 7 a 12.



Fonte: Autor.

5. CONCLUSÕES

E pode se concluir com esse estudo que as configurações de vinculação que possuem uma rigidez maior apresentam precisão inferior quando verificadas em uma malha menos refinada. Além dessas observações podemos verificar também que as vinculações que acarretam em uma condição de contorno dependente de derivadas de ordens mais elevadas, apresentam uma maior dificuldade de convergir, por conta de sua complexidade.

Como constatado, esta relação entre as configurações de vinculação e os resultados apresentados não é exclusiva do modelo dinâmico de Euler-Bernoulli e do MDF, porque verifica-se comportamento análogo no modelo estático e em outros modelos matemáticos que governam a deflexão de vigas, assim como em outros métodos numéricos. Portanto, este comportamento é natural à vinculação e não à modelagem matemática ou ao método numérico empregado.

Ademais, por meio da comparação entre o modelo dinâmico e o estático, depreende-se que a flecha média do modelo dinâmico resulta no mesmo valor da flecha estática. Ao se avaliar esta relação, observou-se um comportamento anômalo, entretanto a oscilação apresentada tende a convergir. Consequentemente, sua descoberta não invalida a relação citada entre os modelos dinâmico e estático, mas sim evidencia um grau de complexidade superior ao esperado.

O estabelecimento de um critério de estabilidade adequado constituiu um dos desafios a serem transpostos, uma vez que há mais de uma abordagem possível, além disso, não é comum na literatura a apresentação do critério para o problema em questão. A distribuição de erros também constituiu uma barreira importante, pois a identificação das regiões críticas identificadas com maiores índices de erro, como coincidentes de pontos de inclinação nula, também não é trivial nem automática.

Com base na experiência adquirida neste estudo, pode-se propor para futuros estudos uma análise mais aprofundada das regiões críticas, avaliando se a presença de outros parâmetros ameniza a oscilação identificada ao se comparar a média da flecha dinâmica com a flecha estática, bem como uma investigação da configuração de vinculação fixa-fixa, matematicamente possível e relevante para avaliação de certos comportamentos.

Este trabalho de TCC deve servir como base para outros trabalhos interdisciplinas de licenciatura física que envolve as áreas da Computação, Engenharia, Química e Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTES, H., “Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams”, *Computers and Structures* 81 (2003).
- ASSAN, A. E., “Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos”, Editora da Unicamp, Campinas, São Paulo, 1999.
- ANTES, H., SHANZ, M., ALVERMANN, S., “Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams”, *Journal of sound and vibration* (2004), 807-836.
- BARCELOS NETO, João. “Mecânica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana”. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- BEER, Ferdinand P.; E. JOHNSTON, Russell Jr., DEWOLF, John T.; MAZUREK, David. F. “Mecânica dos Materiais”. 7. ed. McGraw-Hill, 2015.
- BEAUFAIT, F. W., “Basic Concepts of Structural Analysis”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- CAMPANARI, F. A., “Teoria das Estruturas”, vols. 1, 2, 3 e 4, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1985.
- COOK, R. E., MALKUS, D.S., PLESHA, M. E., “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- CARRER, J. A. M. et al. “Dynamic Analysis of Timoshenko Beams by the Boundary Element Method. *Science Direct. Engineering Analysis with Boundary Elements*”. Ed. 37, p. 1602-1616, 2013.
- CHAPMAN, Stephen J. “Programação em MATLAB para engenheiros”, tradução: Noveritis do Brasil; revisão técnica: Flávio Soares Corrêa da Silva. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. “Métodos Numéricos para Engenharia”. Porto Alegre: AMGH, 2011. 809 p.
- FERREIRA, A, J, M. “MATLAB Codes for Finite”. El. Porto Portugal.1^a Ed, 2008.
- FLORENCIO, A, Martins. “Influência da Rotação e da Força Cortante nas Frequências Naturais e na Resposta Dinâmica de Estruturas de Barras”. Tese (Doutorado em Engenharia) Universidade de Engenharia, Engenharia de Estruturas, Universidade de São Carlos. São Paulo, p. 261. 2015.
- FELTON, L. P., NELSON, R. B., “Matrix Structural Analysis”, John Wiley & Sons, New York, 1996.

- INMAN, D. J. “Engineering Vibration”. 3rd ed. Prentice Hall, 2007.
- KAPUR, K. K., “Vibrations of a Timoshenko beam, using a finite element approach”,
Journal of the Acoustical Society of America 40 (1966) 1058–1063
- LEMOS, N. A., “Mecânica Analítica”, Editora Livraria da Física, São Paulo (2007).
- OZISIK, Necati. “Finite difference methods in heat transference”. Florida. CRC press,
1994.
- RAO, S. S. “Vibrações Mecânicas”. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014.
- REIS, E. V. M.. “Rotinas para extração de parâmetros modais e estudo de caso”. Tese
Conclusão de Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense.
Rio de Janeiro. 2016.
- SAVI, M. S., PAULA, A. S., “Vibrações Mecânicas”, Editora LTC – Livros Técnicos e
Científicos, Rio de Janeiro, 2017.
- SCHIESSER W. E. A., “Compendium of Partial Differential Equation Models: Method
of Lines Analysis with Matlab”. 1^a Ed, New York, 2009.
- TIMOSHENKO, S., YOUNG, D.Y., “Vibration Problems in Engineering”, 3rd Edition,
D. van Nostrand, New York, 1961,
- THOMPSON, W. T.; DAHLET, M. D. “Theory of Vibration with Applications”. 5th ed.
Prentice Hall,1997.

APÊNDICE A

Termo de Autorização de Publicação de Produção Acadêmica

O estudante BRUNO HOFFMANN do curso de Licenciatura em Física, matrícula **20172001800224**, telefone: (62) **96642068** e-mail **20172001800224puc@gmail.com**, na qualidade de titular dos direitos autorais, em concordância com a Lei nº 9.610/98 (Decreto dos Direitos do Autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o trabalho de Conclusão de Curso intitulado A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA BIENGASTADA, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF), imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão na internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 15 de junho de 2021.

Assinatura do autor: Bruno Hoffmann

Nome Completo do Autor: BRUNO HOFFMANN

Assinatura do Professor-orientador: 

Nome completo do professor-orientador: ANDRÉ LUIZ CARDOSO DA SILVA