

PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA



A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE
VIBRAÇÃO DE UMA VIGA EM BALANÇO

PROF. Dr. ANDRÉ LUIZ CARDOSO DA SILVA

GOIÂNIA

2021

IORRAN BATISTA VIEIRA

**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE
VIBRAÇÃO DE UMA VIGA EM BALANÇO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Ciências Exatas e da Computação, da
Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Licenciatura Plena em Física.

Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva.

Banca Examinadora:

Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.

Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

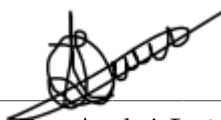
IORRAN BATISTA VIEIRA

**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE
VIBRAÇÃO DE UMA VIGA EM BALANÇO**

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção do título de Licenciatura em Física, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciência Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em **07/06/2021**.

Banca examinadora:

Prof. Ms. Ludimilla Reis Pinheiro dos Santos.
Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso.



Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva



Prof. Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.



Prof. Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

DEDICATÓRIA

*Dedico a
Minha família e amigos*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida e por ter me apresentado à pessoas incríveis durante a graduação. A minha família, principalemnte meu pai Carleilson Batista da Silva e minha mãe Silvia Maria Vieira Machado e minha irmã Maritsa Vieira Batista Fernandes por todo suporte financeiro, emocional e psicologico. As minhas colegas do curso de Química: Celyvania Freitas, Suzanna Rodrigues e Thifanny Tiburcio, e claro aos meus amigos da física em especial Bruno Hoffmann, Guilherme Rocha e Leticia Bragança que estiveram comigo durante toda a graduação. E a todos os professores da PUC/Goiás, especialmente aos professores Edson Vaz de Andrade, Raffael Costa de Figueiredo Pinto, Sandra Regina Longhin pelo ótimo trabalho realizado no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) na qual eu tive a felicidade de participar, Vanda Domingos Vieira pelo apoio no Programa de Residência Pedagógica e André Luiz Cardoso da Silva pelo projeto de pesquisa Iniciação Científica (IC).

Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador, Dr. André Luiz Cardoso da Silva, por ter me orientado durante o meu Trabalho de Final de Curso (TCC) e ao Coordenador do curso Dr. Anderson Silva pela organização do curso de Física.

Agradeço a Pontifícia Universidade Católica de Goiás e ao Programa Universidade para Todos (ProUni) e também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro durante meu curso de graduação.

*“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas,
mas sim preparar a mente para pensar.”*

Albert Einstein (1879-1955)

RESUMO

Neste trabalho, propomos mostrar a interdisciplinaridade da dinâmica newtoniana estudando uma abordagem macroscópica dos modos de vibrações de uma *pequena viga de Bernoulli* (ou uma barra fixada em um dos seus extremos). As equações obtidas desse formalismo reduzem a uma equação diferencial parcial (EDP) conhecida como equação de Euler-Bernoulli (EEB, *Equação de Euler Bernoulli*) que apresenta uma descrição razoavelmente boa para os modos de vibrações de vigas esbeltas, sem cisalhamento, se comparados com dados empíricos. Diversos autores entendem que deve-se considerar o cisalhamento axial causados pelo efeito do deslizamento das fibras quando se considera uma viga grossa. O estudo desta dinâmica será feita de forma analítica para determinar as frequências de vibração a partir das raízes de equações transcendentais usando o software MATLAB. Em segunda, usamos o método dos elementos finitos (MEF) para obter essas frequências e os modos de vibração para comparar com os resultados obtidos analiticamente.

Palavras chave: A Dinâmica de Newton, Equação de Euler-Bernoulli, Simulações computacionais por Elementos Finitos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Viga Biengastada de vão L , largura b e altura h	16
Figura 2.	(a) Viga de vão L em vibração transversal. (b) O elemento da viga obtido por corte.. . . .	18
Figura 3.	Cálculo das frequências de vibração usando DESMOS	22
Figura 4.	Discretização em elementos finitos	25
Figura 5.	Funções de Forma de Hermite	25
Figura 6.	Os 6 (seis) primeiros modos de vibração.	32
Figura 7.	Os 4 (quatro) últimos modos de vibração analisados.	32

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.	Condições de H_i e suas derivadas para cada valor ξ	26
Tabela 2.	Propriedades da Viga em Balanço	31
Tabela 3.	Frequências teóricas e experimentais.	31

LISTA DE ABREVIATURAS

MEF	Método dos Elementos Físicos.
EEB	Equação de Euler-Bernoulli
MM	Matriz de Massa.
MR	Matriz de Rigidez.
EDP	Equações Diferenciais Parciais

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.	1
2.	FUNDAMENTOS.	3
2.1	Breve História das Vibrações	3
2.1.1	Origem dos Estudos das Vibrações.	3
2.1.2	De Galileu a Rayleigh	3
2.2	Contribuições Recentes	4
2.3	Importância do Estudo da Vibrações.	5
2.4	Conceitos Básicos de Vibrações.	6
2.4.1	Vibrações	6
2.4.2	Partes Elementares de Sistemas Vibratórios	6
2.4.3	Graus de Liberdade	7
2.4.4	Sistemas Discretos e Contínuos	7
2.5	Classificações das Vibrações	7
2.5.1	Vibrações Amortecidas	7
2.5.1	Vibrações Livre e Vibrações Forçadas	8
2.5.2	Vibrações não Amortecidas e Não Linear	8
2.5.3	Vibrações Determinística e Aleatória	8
2.6	Procedimentos de Análise de Vibrações	9
2.7	Controle de Vibrações	10
3.	A DINÂMICA DE NEWTON PARA ESTUDO DE VIGAS . . .	11
3.1	Um Breve Histórico sobre o Estudo de Vigas.	11
3.2	Tipos de Vigas e Vínculos	13
3.3	Objeto de Estudo: A Viga em Balanço	14
3.4	Dinâmica de Newton: Equação de Euler-Bernoulli	17
3.4.1	Condições Iniciais e Condições de Vínculos	19

3.4.2	Vibrações Livre	20
3.4.3	Solução Temporal	20
3.4.4	Solução Espacial.	21
4.	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	23
4.1	A Simulação Computacional	23
4.1.1	O Software MaTLab	23
4.1.2	Contexto Histórico do Método dos Elementos Finitos	24
4.1.3	Formulação do MEF: Uma Introdução.	24
4.3	Análise dos Resultados e Discussões	30
5.	CONCLUSÕES	33
	REFERÊNCIAS	34
	Apêndice A – Termo de Autorização de Publicação de	
	Produção Acadêmica	35

1. INTRODUÇÃO

O interesse pelas vibrações começou juntamente com os primeiros instrumentos musicais, provavelmente apitos e tambores, portanto os primeiros estudos nessas áreas foram voltados para vibrações sonoras, harmonicidade dos instrumentos musicais, tonalidade entre outros aspectos, como acústicas em determinados ambientes. O estudo das vibrações foi feito e descrito por Galileu Galilei observando primeiramente o comportamento de um pêndulo simples, e através desse estudo ele pode descrever como acontecia o fenômeno das vibrações, e definindo vários conceitos físicos para essa área, então vieram estudos na vibração de uma corda e foram se abrindo as possibilidades de estudo da vibração e entendendo sua importância.

Uma vibração é uma oscilação localizada, em geral, numa pequena região do espaço e efetuando-se em torno de um centro de equilíbrio. O seu modelo mais simples é o oscilador harmônico, com uma frequência própria bem definida, que se mostra capaz de uma boa descrição de vibrações moleculares, de simples circuitos elétricos, etc. A sobreposição de vibrações com diferentes frequências fundamenta fenômenos de interferência e batimento, e a consideração de vários osciladores harmônicos acoplados conduz ao importante conceito de modos normais de vibração, bem como a propagação das vibrações no espaço, um fenômeno que antecipa o conceito de onda.

Pode-se observar as vibrações em todos os lugares, desde caminhar, mexer os braços enquanto andamos, falar (que envolve a oscilação da laringe para produção do som), aos tímpanos que recebem essa vibração, até mesmo em instrumentos com a função de auxiliar trabalhos humanos, como bateadeiras, motores, esteiras, apitos, relógios etc. E claro a vibração é muito utilizada nas engenharias.

É através dos estudos do controle das vibrações que há a possibilidade de trabalhar em construções desde pisos e pontes até arranha-céus. Um exemplo disso é o sistema de amortecimento do maior residencial da América Latina construído aqui no Brasil, que tem 81 pavimentos e 281 metros de altura, para um prédio com as oscilações devido a grandes rajadas de ventos e água, é também através desses estudos que são construídos motores como de aviões, e até mesmo utilizados em escovas de dente elétricas. Observa-se que a vibração é de grande auxílio para muitas áreas contudo vibração mecânica pode ser prejudicial ao ser humano e aos projetos das engenharias então por isso o estudo do controle delas.

Isaac Newton (1642-1727) descreveu a lei da gravitação universal, bem como as três leis do movimento e outras descobertas. A segunda lei do movimento de Newton é usada em livros modernos sobre vibrações para derivar equações de movimento de um corpo em vibração. As vibrações de barras delgadas apoiadas e engastadas de várias maneiras foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em

1751, e essa abordagem ficou conhecida como a teoria Euler- Bernoulli ou Viga Delgada a qual usaremos para este trabalho

Neste trabalho de TCC estuda-se os conceitos de vibração e uma de suas inúmeras aplicações, o trabalho está dividido em cinco capítulos. No capítulo 1, começaremos com de aspectos históricos abordando o do estudo das vibrações, e alguns físicos que com seus estudos teve impacto significativo na pesquisa sobre o assunto, e depois da importância do estudo de vibrações. No capítulo 2 o assunto será vibrações mecânicas citando algumas contribuições mais recentes e no capítulo três afunilaremos o assunto para a “Dinâmica de newton para o estudo de Vigas”.

No capítulo 4, apresentamos o método dos Elementos Fintos (MEF) como uma forma alternativa e interdisciplinar de estudar problemas físicos importantes. É discutido seus fundamentos e com ele implementado em MATLAB é estudos os modos de vibração de uma viga em balanço.

No Capítulo 5, faremos as conclusões finais.

2. VIBRAÇÕES MECÂNICAS

2.1 Breve Histórico da Vibração

2.2.1 Origem dos Estudos das Vibrações

O interesse pelas vibrações começou juntamente com os primeiros instrumentos musicais, provavelmente apitos e tambores. Desde a antiguidade músicos e filósofos pesquisavam as regras e leis da produção do som, e usavam-nas para aperfeiçoar instrumentos musicais e transmitiram de geração a geração. O primeiro a investigar sons musicais com base científica foi o filósofo e matemático grego Pitágoras, utilizando experimentos com uma corda vibratória em um instrumento simples denominado monocórdio, observando assim, que duas cordas iguais de comprimentos diferentes forem sujeitas a mesma tensão a mais curta emite uma nota mais aguda, e o comprimento da corda mais curta for metade do comprimento da mais longa, a mais curta emitirá uma nota uma oitava acima da outra. Entretanto, Pitágoras não deixou nenhum registro escrito de seu trabalho. Apesar desses avanços as relações entre tonalidade e frequência não foi entendida até a época de Galileu no século XVI d.C.

Por volta do século 3 a.C., Aristóteles e seu aluno Aristóxenes, também havia estudado sobre os elementos de harmonias, e outros estudos feitos por Euclides também sobre o som, porém sem nenhuma referência a natureza física. Aparentemente não houve nenhum desenvolvimento durante cerca de dezesseis séculos após a obra de Vitruvius, famoso arquiteto romano que escreveu sobre as propriedades acústicas de teatros. Depois de muitos terremotos na China Zhang Heng, historiador e astrônomo, no segundo século, percebeu a necessidade de desenvolver um instrumento para medir a precisão dos terremotos, então em 132 d.C., ele inventou o primeiro sismógrafo do mundo.

2.1.2 De Galileu a Rayleigh

Galileu Galilei (1564-1642) é considerado o fundador da ciência experimental moderna. O século XVII d.C. costuma ser considerado o “século do gênio”, visto que os fundamentos da filosofia e da ciência moderna foram lançados durante esse período. Galileu teve a ideia de estudar o comportamento de um pêndulo simples observando os movimentos pendulares em uma igreja de Pisa. Certo dia, entediado durante um sermão, Galileu estava olhando para o teto da igreja, uma lâmpada que balançava chamou sua atenção, ele começou a medir o período dos movimentos pendulares da lâmpada com sua própria pulsação e, para seu espanto, constatou que o período era independente da amplitude das oscilações. Isso o levou a realizar mais experimentos com o pêndulo simples. E em 1638 no *Discourses concerning two new sciences*, Galileu discutiu corpos vibratórios, descrevendo a dependência entre frequência e vibrações e o comprimento de um pêndulo simples, juntamente com o fenômeno de vibrações solidárias (ressonância).

Os escritos de Galileu também indicam que ele tinha um claro entendimento da relação entre frequência, comprimento, tensão e densidade de uma corda vibratória esticada. Todavia a primeira explicação correta publicada sobre vibrações de corda foi dada pelo matemático e teólogo francês Marin Mersenne (1588-1648), em seu livro *Harmonicorum liber* em 1636. Mersenne é considerado por muitos o pai da acústica, atribui-se a ele a descoberta das leis das cordas vibratórias, porque ele publicou os resultados dois anos antes de Galileu. Contudo o crédito pertence a Galileu, visto que as leis foram escritas muitos anos antes, mas sua publicação foi proibida por ordens do Inquisidor de Roma até 1938.

O trabalho de Galileu inspirou a fundação da Academia del Cimento em Florença em 1657; logo em seguida, foram instituídas a Royal Society of London em 1662 e a Paris Academie des Sciences em 1666. Mais tarde Robert Hooke (1635-1703) também fez experimentos para determinar a relação entre tonalidade e as frequências de vibrações de uma corda. Contudo foi Joseph Sauveur (1653-1716) quem investigou esses experimentos minuciosamente e cunhou a palavra “acústica” para a ciência do som. Sauveur, na França e John Wallis (1616-1703), na Inglaterra, observaram, o fenômeno de formas modais e constataram que certos pontos de uma corda esticada em vibração permanecem sem movimento algum e outros pontos intermediários apresentam um movimento violento. Sauveur denominou os primeiros *nós*, e os outros, *ventres*.

Isaac Newton (1642-1727) publicou sua obra monumental em 1686, na qual descreveu a lei da gravitação universal, bem como as três leis do movimento e outras descobertas. A segunda lei do movimento de Newton é usada em livros modernos sobre vibrações para derivar equações de movimento de um corpo em vibração. A solução teórica do problema da corda vibratória foi descoberta pelo matemático inglês Brook Taylor (1685-1731) em 1713, que também apresentou o famoso teorema de Taylor para series infinitas. As vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas de várias maneiras foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751, e essa abordagem ficou conhecida como a teoria Euler- Bernoulli ou Viga Delgada a qual estudaremos neste trabalho.

2.2 Contribuições Recentes

Em 1902, Frahm investigou a importância do estudo da vibração torcional no projeto de eixos de hélices de navios a vapor. O absorvedor de vibração dinâmica, que envolve a adição de um sistema massa-mola secundário para eliminar as vibrações de um sistema principal, foi também proposto por Frahm em 1909. Entre os contribuintes modernos para a teoria de vibrações são os notáveis Stodola, de Laval, Timoshenko e Mindlin. Aurel Stodola (1859-1943) contribuiu para o estudo da vibração de vigas, placas e membranas. Ele desenvolveu o método para analisar vigas vibratórias que também é aplicável a pás de turbinas. C. G. P. Laval (1845-1913) apresentou solução prática para o problema de vibrações de um disco rotativo desbalanceado. E Stephen

Timoshenko (1878-1972) apresentou a teoria aperfeiçoada de vibrações de vigas que ficou conhecida como teoria de Timoshenko ou de viga grossa, que considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento. Uma teoria parecida foi apresentada por Midlin para análise de vibração de placas grossa que inclui os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento.

Até 30 anos atrás, estudos de vibrações, mesmo os que tratavam de complexos sistemas de engenharia, eram realizados com a utilização de modelos grosseiros, com apenas alguns graus de liberdade, contudo com os computadores de alta velocidade na década de 1950 possibilitou o tratamento de sistemas de moderada complexidade de soluções aproximadas em forma semidefinida recorrendo a métodos clássicos de solução porém com a utilização da avaliação numérica de certos termos que não podem ser expresso em forma fechada .

2.3 Importância dos Estudo das Vibrações

A maioria das atividades humanas envolve vibrações de uma forma ou de outra. Por exemplo, ouvimos porque os tímpanos vibram, e vemos porque as ondas de luz sofrem vibração. A respiração está associada a vibração dos pulmões e andar envolve movimento oscilatório (periódico) de pernas e mãos. Falamos devido ao movimento oscilatório da laringe (e da língua). Recentemente, muitas investigações foram motivadas pela aplicação da vibração na área da engenharia, como projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle.

A maioria dos motores de acionamento há problemas de vibração em razão do desbalanceamento inerente aos motores. O desequilíbrio pode dever-se a falha de projeto ou manutenção ruim. O desbalanceamento dos motores a diesel por exemplo, pode causar ondas terrestres de potência suficiente para causar incomodo em áreas urbanas. As rodas de algumas locomotivas podem afastar-se mais de um centímetro do trilho em altas velocidades devido ao desbalanceamento. Vibrações em turbinas causam espetaculares falhas mecânicas. Naturalmente, as estruturas projetadas para apoiar máquinas centrífugas pesadas como motores e turbinas, ou máquinas alternativas como motores a vapor e a gás e bombas reciprocas, também estão sujeitas a vibrações.

Em todas as situações, a estrutura ou componente da máquina sujeito à vibração pode falhar devido a fadiga do material resultante da variação cíclica da tensão induzida. Além do mais, a vibração causa desgaste mais rápido de peças de máquinas como rolamento e engrenagens e também gera ruído excessivo. Em máquinas, a vibração pode afrouxar ou soltar elementos de fixação como porcas. Em processos de corte de metais, a vibração pode causar trepidação, o que resulta em mau acabamento superficial.

Sempre que a frequência natural de vibração de uma máquina ou estrutura coincidir com a frequência da excitação externa, ocorre um fenômeno conhecido como ressonância que resulta em deflexões excessivas e falha. A literatura está repleta de relatos de falhas de sistemas causados por ressonância e vibração excessiva de componentes e

sistemas. Devido ao efeito devastador que as vibrações podem causar às máquinas e estruturas, o teste de vibrações tornou-se um procedimento-padrão no projeto e desenvolvimento da maioria dos sistemas de engenharia.

Em muitos sistemas de engenharia, um ser humano age como parte integral do sistema. A transmissão de vibração a seres humanos resulta em desconforto e a perda de eficiência. A vibração e o ruído gerado por motores causam aborrecimento às pessoas e, às vezes, danos a propriedade. A vibração de painéis de instrumentos pode provocar mau funcionamento ou dificultar a leitura dos medidores. Assim uma das finalidades importantes de estudar vibrações é reduzi-la por meio do projeto adequado de máquinas e de suportes, já que há repletos relatos de falhas de sistemas causados por ressonância e vibração excessiva de componentes e sistemas. Por isso o engenheiro mecânico projeta o motor ou máquina de modo a minimizar o desbalanceamento, ao passo que o engenheiro de estrutura tenta projetar a estrutura de suporte de modo a assegurar que o efeito do desbalanceamento não seja danoso.

Apesar de efeitos danosos, a vibração pode ser utilizada a favor em várias aplicações, indústrias e de consumo. Por exemplo, a vibração em esteiras transportadoras, tremonhas, peneira, compactadores, máquinas de lavar, escovas de dentes elétricas, brocas odontológicas, relógios e unidade de massagem elétrica, todos equipamentos vibratórios, a vibração também é usada em bate-estacas, teste vibratório de materiais. Constatou-se que a vibração melhora a eficiência de certos processos de usinagem, fundição, forjamento e soldagem e ela é empregada na simulação de terremotos em pesquisa geológicas e também para realizar estudo no projeto de reatores nucleares.

2.4 Conceitos Básicos de Vibração

2.4.1 Vibração

Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado vibração ou oscilação. O balançar de um pêndulo e o movimento de uma corda dedilhada são exemplos típicos de vibração. A teoria de vibrações trata do estudo de movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas a eles.

2.4.2 Partes elementares de sistemas vibratórios

Em geral, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor).

A vibração de um sistema envolve a transferência alternada de sua energia potencial para energia cinética e de energia cinética para potencial. Se o sistema for amortecido certa quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de vibração e deve ser substituída por uma fonte externa, se for preciso manter um regime permanente de vibração.

2.4.3 Graus de liberdade

O número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante define o grau de liberdade do sistema.

As coordenadas necessárias para descrever o movimento de um sistema constituem um conjunto de *coordenadas generalizadas*, as coordenadas generalizadas normalmente são denotadas por q_1, q_2, \dots e podem representar coordenadas cartesianas ou não cartesianas.

2.4.4 Sistemas discretos e contínuos

Sistemas que podem ser separados em partes de forma que cada uma delas possua um determinado número de graus de liberdade e o sistema global tenha um número finito de graus de liberdade são sistemas discretos, sendo também chamados de sistemas com parâmetros concentrados.

Um sistema contínuo não pode ser dividido, possuindo um número infinito de graus de liberdade sendo também conhecidos como sistemas com parâmetros distribuídos.

2.5 Classificações das Vibrações

Vibrações podem ser classificadas de várias maneiras. Apresentamos a seguir algumas das classificações importantes

2.5.1 Vibração livres e vibrações forçadas

Vibração livre: Se um sistema após uma perturbação inicial, continuar a vibrar por conta própria, a vibração resultante é conhecida como *vibração livre*. Nenhuma força externa age sobre o sistema. A oscilação de um pêndulo simples é um exemplo de vibração livre

Vibração forçada: Se um sistema estiver sujeito a uma força externa (muitas vezes, uma força repetitiva), a vibração resultante é conhecida como *vibração forçada*. A oscilação que surge em máquinas, como motores a diesel, é um exemplo de vibração forçada. Se a frequência da força externa coincidir com uma das frequências naturais do sistema, ocorre uma condição conhecida como ressonância, e o sistema sofre oscilações perigosamente grandes. Falhas de estruturas como edifícios, pontes, turbinas e asas de aviões foram associadas à ocorrência de ressonância.

2.5.2 Vibração Não Amortecidas

Vibração amortecida é aquela em que a energia vibratória se dissipa com o transcorrer do tempo de forma que os níveis vibratórios diminuem progressivamente.

Vibração não amortecida é aquela em que a energia vibratória não se dissipa de forma que o movimento vibratório permanece imutável com o passar do tempo.

Em muitos sistemas físicos, a quantidade de amortecimento é tão pequena que pode ser desprezada para a maioria das finalidades de engenharia. Contudo, considerar o amortecimento torna-se extremamente importante na análise de sistemas vibratórios próximos à ressonância.

2.5.3 Vibração Linear e Não Linear

Vibração linear é aquela que ocorre em um sistema cujos componentes atuam linearmente (a força de mola proporcional ao deslocamento, a força de amortecimento é proporcional à velocidade e a força de inércia é proporcional à aceleração).

Vibração não linear é aquela em que um ou mais componentes do sistema não se comporta linearmente, ou seja, a força produzida não apresenta uma relação linear com a variável cinemática a que se associa (relações quadráticas, cúbicas, logarítmicas, exponenciais, senoidais, etc).

As equações diferenciais que comandam o comportamento de sistemas vibratórios lineares e não lineares são lineares e não lineares, respectivamente. Se a vibração for linear, o princípio da superposição é válido e as técnicas matemáticas de análise são bem desenvolvidas. Para vibração não linear, o princípio da superposição não é válido e as técnicas de análise são menos bem conhecidas. Uma vez que todos os sistemas vibratórios tendem a comportar-se não linearmente como aumento da amplitude de oscilação, é bom conhecer vibrações não lineares ao lidar com sistemas vibratórios na prática.

2.5.4 Vibração Determinística e Aleatória

Se o valor ou magnitude da excitação (força ou movimento) que está agindo sobre um sistema vibratório for conhecido a qualquer dado instante, a excitação é denominada determinística. A vibração resultante é conhecida como *vibração determinística*.

Em alguns casos, a excitação é *não determinística ou aleatória*; o valor da excitação em dado instante não pode ser previsto. Nesses casos, um grande número de registros da excitação pode exibir algumas regularidades estatísticas. É possível estimar medidas como os valores médios e os valores médios ao quadrado da excitação.

Exemplos da excitação aleatória são a velocidade do vento, a aspereza de uma estrada e o movimento do solo durante terremotos. Se a excitação for aleatória, a vibração resultante é denominada *vibração aleatória*. No caso de vibração aleatória a resposta

vibratória do sistema também é aleatória, só pode ser descrita em termos de quantidade estatísticas.

2.6 Procedimento de Análise de Vibrações

Um sistema vibratório é um sistema dinâmico para o qual as variáveis como as excitações (entradas) e respostas (saídas) são dependentes do tempo. Em geral a resposta de um sistema vibratório depende das condições iniciais, bem como das excitações externas. A maioria dos sistemas vibratórios encontrados na prática são muito complexos, e é impossível considerar todos os detalhes para uma análise matemática. Somente as características mais importantes são consideradas na análise para prever o comportamento do sistema sob condições de entradas especificadas. Assim, a análise de um sistema vibratório normalmente envolve modelagem matemática para obtenção de equações governantes, solução das equações e interpretação dos resultados.

Etapa 1: *Moldagem matemática.* A finalidade da modelagem matemática é representar todos os aspectos importantes do sistema com o propósito de obter as equações matemáticas (ou analíticas) que governam o comportamento do sistema. O modelo matemático deve incluir detalhes suficientes para conseguir descrever o sistema em termos de equações sem torna-lo muito complexo. O modelo matemático pode ser linear ou não linear, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Modelos lineares permitem soluções rápidas e são simples de manipular; contudo, modelos não lineares às vezes revelam, certas características do sistema que não podem ser previstas usando modelo lineares.

Às vezes, o modelo matemático é aperfeiçoado gradativamente para obter resultado mais precisos. Nessas abordagens, em primeiro lugar, é usado um modelo muito grosseiro ou elementar para ter-se uma ideia rápida do comportamento global de sistema. Na sequência, o modelo é refinado com a inclusão de mais componentes e/ou detalhes de modo que o comportamento do sistema possa ser observado mais de perto.

Etapa 2: *Derivação das equações governantes.* Uma vez disponível o modelo matemático, usamos os princípios da dinâmica e derivamos as equações que descrevem a vibração do sistema. As equações de movimento podem ser derivadas convenientemente desenhando-se os diagramas de corpo livre de todas as massas envolvidas. O diagrama de corpo livre de uma massa pode ser obtido isolando-se a massa e indicando todas as forças externas a ela aplicadas, as forças reativas e as forças de inércia. As equações de movimento podem ser derivadas convenientemente desenhando-se os diagramas de corpo livre de todas as massas envolvidas. O diagrama de corpo livre de uma massa pode ser obtido isolando-se a massa e indicando todas as forças externas a ela aplicadas, as forças reativas e

as forças de inércia. As equações de movimento de um sistema vibratório estão normalmente na forma de um conjunto de equações diferenciais ordinárias para um sistema discreto e equações diferenciais parciais para um sistema contínuo. As equações podem ser lineares ou não lineares dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Há várias abordagens que costumam ser usadas para derivar as equações governantes, entre elas a segunda lei do movimento de Newton, o princípio de D'Alembert e o princípio da conservação de energia.

Etapa 3: Solução das equações governantes. As equações de movimento devem ser resolvidas para determinar a resposta do sistema vibratório. Dependendo da natureza do problema, podemos usar uma das seguintes técnicas para determinar a solução: métodos padronizados para resolver equações diferenciais, métodos que utilizam transformações de Laplace, métodos matriciais e método numérico. Se as equações governantes forem não lineares, raramente podem ser resolvidas na forma fechada. Além do mais, a solução de equações diferenciais parciais é muito mais elaborada do que a de equações diferenciais ordinárias. Métodos numéricos que envolvem computadores podem ser usados para resolver as equações. Todavia, será difícil tirar conclusões gerais sobre o comportamento do sistema usando resultados de computador.

Etapa 4: Interpretação dos resultados. A solução das equações governantes fornece os deslocamentos, velocidade e acelerações das várias massas do sistema. Esses resultados podem ser interpretados com uma clara visão da finalidade da análise e das possíveis implicações dos resultados no projeto.

2.7 Controle de Vibrações

Em muitas situações práticas é possível reduzir, mas não eliminar, as forças dinâmicas que causam vibrações. Há vários métodos que podem ser utilizados para controlar vibrações. Entre eles, os seguintes são importantes:

- 1) Controlar as frequências naturais do sistema e evitar ressonância sob excitações externas.
- 2) Evitar resposta excessiva do sistema, mesmo em ressonância, introduzindo um mecanismo de amortecimento ou de dissipação de energia
- 3) Reduzir a transmissão das forças de excitação de uma parte da máquina para outra mediante a utilização de isoladores de vibração.
- 4) Reduzir a resposta do sistema mediante a adição de um neutralizador de massa ou absorvedor de vibração auxiliar.

3. A DINÂMICA DE NEWTON PARA O ESTUDO DE VIGAS

Na abordagem dinâmica de vigas, as vibrações e deflexões são determinadas pela mecânica newtoniana ou por métodos variacionais usando a densidade Lagrangeana, obtendo-se equações diferenciais parciais (EDPs) com enorme potencial de aplicabilidade destaca-se entre elas a equação de Euler-Bernoulli. A teoria construída a partir dessa equação é conhecida como “teoria clássica de vigas”, é bastante simples e fornece resultados razoáveis para frequências de vigas finas (ou delgadas) que não incluem o cisalhamento longitudinal. Neste capítulo é apresentado o modelo de viga em balanço que é uma viga de edificação com um só apoio (engaste). Toda a carga recebida é transmitida a um único ponto de fixação, e a partir da dinâmica newtoniana são obtidos os modos de vibração da viga a partir da Euler-Bernoulli.

3.1 Um breve histórico sobre o estudo de vigas

Essas grandes contribuições de matemáticos e físicos como Newton, podem ficar perdidos para o mundo a menos que outros cientistas as compreendam e se interessem a ponto de encará-las de várias perspectivas, além de interpretá-las e indicar suas implicações. Newton não se comunicava livremente e por isso o método de fluxos, por exemplos não era muito conhecido fora da Inglaterra, entretanto o filósofo e matemático Leibniz conseguiu encontrar discípulos extremamente interessados e dedicados a aprender cálculo diferencial e integral e conseqüentemente transmitir o conhecimento a outros.

Os primeiros foram os dois irmãos suíços Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), também conhecidos como James e John na língua inglesa (ou pelos equivalentes alemães, Jakob e Johann), cada um favorável a um comportamento que atingem gravemente a dignidade, a integridade, a honra e também cada um disposto tanto a ofender quanto ser ofendido. Nenhuma família na história da matemática produziu tantos matemáticos renomados quanto a família Bernoulli, que por conta da fúria espanhola em 1576, tinha fugido para Basileia, vinda dos países baixos espanhóis católicos em 1583.

Jakob I (1647-1705), foi obrigado a estudar Filosofia e Teologia pelos seus pais, tendo-se graduado na Universidade de Basileia como mestre em Filosofia em 1671 e licenciado em Teologia em 1676. Contra a vontade de seus pais, estudou Matemática e Astronomia, tendo ministrado a cadeira de Matemática em Basileia até à data da sua morte. Juntamente com o seu irmão Johann I, estudou e difundiu na Europa o cálculo de Leibniz. Apesar de nunca ter feito nenhuma publicação, deixou vários artigos nos jornais científicos da época, um importante diário - *Meditationes* - e uma obra inacabada - *Ars Conjectandi*.

Johann I (1667 - 1748) Tal como o seu irmão Jacob, apesar de ter estudado Medicina, o seu interesse pela Matemática falou mais alto tendo sido iniciado em matemática pelo seu irmão Jacob. Apesar desta relação inicial, a vida destes dois homens está marcada por intermináveis desavenças e disputas científicas. Johann I Bernouille foi um dos mais bem sucedidos matemáticos da sua época, justificando-se assim o ser frequentemente apelidado de Aristóteles do Século XVII. E quando seu irmão Jacob faleceu, ocupou a cadeira de Matemática na Universidade de Basileia até à data da sua própria morte. As suas áreas de maior interesse foram o estudo das propriedades da luz, as famílias de curvas, tal como o problema de Braquistócrona, a quadratura de áreas e as séries.

Aproximadamente uma dúzia de membros da família conseguiu notoriedade na matemática e na física, e quatro deles foram eleitos como socio estrangeiro da Academie des Science. Jacques Bernoulli foi o primeiro a atingir sublimidade na matemática. Ele nasceu e morreu em Basileia, porém esteve em muitas viagens já afim de encontrar outros cientistas. Seu interesse pelas obras de Wallis e Barrow e os artigos de Leibniz em 1684-1686 lhe permitiram dominar os novos métodos. Em 1680 Jacques estava contribuindo com os artigos sobre o assunto de *Acta Eruditorum* e foi quando sugeriu a Leibniz o termo “integral”, ele também observou que num ponto de máximo ou mínimo a derivada da função não precisa se anular, mas pode tomar um “valor infinito” ou assumir forma indeterminada. Ele logo se interessou por séries infinitas, e em seu primeiro artigo sobre o assunto em 1689 ele apresentou a bem conhecida “desigualdade de Bernoulli”.

A ele também foi atribuída frequentemente a demonstração de que a série harmônica é divergente, e Jacques acreditava que seu irmão foi o primeiro a observar a divergência de série harmônica. Estava sempre a par dos problemas populares, como achar as equações da catenária, da tratriz e da isócrona, e foi com tais problemas que os irmãos Bernoulli descobriram o poder do cálculo, e mantiveram a comunicação com Leibniz sobre todos os aspectos do novo assunto. E em sua obra sobre isócrona na *Acta Eruditorum* de 1690 usou a palavra “integral” e poucos anos depois Leibniz concordou que *calculus integralis* seria um nome melhor que *calculus summatorius*. No campo das equações diferenciais Jacques Bernoulli contribuiu com o estudo da “equação de Bernoulli” $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ que ele, Leibniz e Jean Bernoulli resolveram – Jean por redução a equação linear mediante a substituição $z = y^{1-n}$.

E foi por conta de um problema sobre cálculo de variações que os dois irmãos Bernoulli entraram em forte conflito um com o outro. Jacques era o quinto filho da família, Jean o décimo; e o mais jovem talvez tivesse ressentimentos pelo que considerava como atitude condescendente do outro.

Nicolau I (1687 – 1759), estudou matemática com os seus tios Jacob e Johann. Foi o próprio Jacob que supervisionou a sua graduação, terminada em 1704, como mestre na Universidade de Basileia onde, cinco anos mais tarde, recebeu o doutoramento. Nicolau I era um matemático bastante dotado, mas não muito produtivo. Como consequência muitos dos seus importantes descobertas estão espalhadas na sua correspondência, que ascende a 560 textos. A mais significativa parte da sua

correspondência com Montmort, entre 1710 e 1712, está publicada na obra “*Essay d'analyse sur les jeux de hazard*” (Paris, 1713).

Nicolau II (1695 - 1726), entrou para a universidade de Basileia apenas com 13 anos de idade, formou-se em Jurisprudência e, como muitos membros da sua família, acabou por estudar Matemática. Foi chamado para a Academia de São Petersburgo. Infelizmente morreu passados apenas oito meses. Esteve envolvido na famosa disputa entre Newton e Leibniz. As suas áreas de interesse preferencial foram curvas, equações diferenciais, probabilidades e teoria fundamental de álgebra.

Daniel (1700 - 1782), entrou para a Universidade de Basileia aos 13 anos para estudar Filosofia e Lógica. Obteve o grau em mestre em 1716. A sua educação em Matemática começou com o seu irmão mais velho Nicolau. Sete anos após a morte do seu irmão, regressou a Basileia onde foi professor de várias disciplinas matemáticas. Daniel foi grande amigo de Euler e teve a honra de ganhar por dez vezes a distinção da Academia Francesa. Entre os seus estudos contam-se trabalhos sobre cálculo e equações diferenciais, probabilidades e uma tentativa de explicar a teoria cinética dos gases.

Johann II (1710 - 1790) o mais novo dos três filhos de Johann I. Começou por estudar Direito tendo obtido em 1727 o doutoramento em Jurisprudência. Trabalhou com o seu pai em matemática, mas também como investigador independente. Recebeu por quatro vezes distinções da Academia de Paris. Quando o seu pai morreu, foi-lhe designada a disciplina de Matemática na Universidade de Basileia. Estudou prioritariamente a luz e o calor.

Johann III (1744 - 1807) Considerado um prodígio desde pequeno, obteve o grau de doutor em Direito quando tinha apenas 14 anos. Como todos os Bernoulli, interessou-se por Matemática e foi chamado pela Academia de Berlim aos 19 anos. O rei Frederico II chamou-o para dirigir o observatório astronômico da Academia, tarefa para a qual não estava adequadamente preparado. Assim, a maior parte das suas obras recaíram sobre Astronomia, mas nunca atingiram grande fama nem glória. As suas áreas de maior interesse foram Probabilidades, Recorrência Decimal e a Teoria das Equações.

Jacob II (1759 - 1789) como outros Bernoulli, estudou Direito e enveredou pela Matemática. Em 1782 candidatou-se à cadeira de Física na Universidade de Basileia, quando Daniel morreu. Acabou por não conseguir e mudou-se para Turim e Veneza acabando por se fixar em São Petersburgo. Aí escreveu importantes trabalhos sobre Física Matemática, referentes a elasticidade, hidrostática e balística. Morreu em São Petersburgo, afogado nos rios e canais daquela a que chamam a Veneza do Norte.

3.2 Tipos de Vigas e Vínculos

As estruturas são os elementos que mantêm o edifício em pé. Se distinguem basicamente por vigas e pilares. Viga é um elemento estrutural horizontal das edificações, geralmente utilizada no sistema laje-viga-pilar. Servem de apoio para lajes e paredes, conduzindo suas cargas até os pilares. Pilar é um elemento estrutural vertical das

edificações, usado para receber os seus esforços verticais e transferi-los para as fundações. Também chamado de coluna, mas esta tem um significado próprio, a diferenciação entre eles está no fuste, enquanto o pilar possui fuste quadrangular ou poligonal, na coluna é arredondado. Entretanto, pode-se ter também paredes autoportantes, em que a própria vedação serve também de estrutura.

De maneira simples, a viga é uma estrutura horizontal que serve para sustentar o peso de uma cobertura entre suas colunas. Ele faz a distribuição do peso na laje para que essa fique mais sólida e segura. No entanto, essas vigas também desempenham outra tarefa. São elas que transferem a carga vertical de elementos como paredes e portas para as colunas. Portanto, as vigas de sustentação são peças presentes na maioria das construções de residências e edifício

As edificações basicamente apresentam três tipos de vigas, que diferem na forma como são ligados aos seus apoios. Portanto, classificam-se em:

- **Viga em balanço:** ou em console: é uma viga de edificação com um só apoio. Toda a carga recebida é transmitida a um único ponto de fixação.
- **Viga bi-apoiada:** ou simplesmente apoiada: diz das vigas com dois apoios, que podem ser simples e/ou engastados, gerando-se vigas do tipo simplesmente apoiadas, vigas com apoio simples e engaste, vigas bi engastadas.
- **Viga contínua:** diz-se da viga com múltiplos apoios.

As vigas feitas em concreto armado, são dimensionadas de forma que apenas a sua ferragem longitudinal resista aos esforços de tração, não sendo levado em conta a resistência a tração do concreto, por esta ser muito baixa. As vigas de concreto armado recebem ferragens secundárias distribuídas transversalmente ao longo da sua seção, denominadas estribos. Possuem a finalidade de levar até os apoios as forças cisalhantes.

Os materiais variam de acordo com os tipos de vigas. Assim, podem ser feitos de madeira, concreto ou ferros também soldados, com quatro tiras e peças angulares que se cruzam para dar apoio e união. Os materiais de fabricação devem ser flexíveis, duráveis e resistentes ao mesmo tempo. Abaixo vamos conhecer melhor os diferentes materiais e composição.

VIGAS DE MADEIRA: A madeira das vigas se comporta de maneira ortotrópica, com diversidade em sua resistência e rigidez, apoiando diferentes direções nos esforços (paralelos ou transversais à fibra de madeira). Em outras palavras, a madeira é capaz de suportar demandas com menos deformação do que outros materiais.

VIGAS EM BALANÇO: Esse modelo de viga funciona transmitindo toda carga a um único ponto de fixação. Ou seja, são vigas que possuem apenas um apoio no pilar.

VIGAS DE CONCRETO: Para a fabricação de vigas, é utilizado concreto protendido e pós-tensionado, diferentemente de seu antecessor – concreto armado. Isso devido à sua adaptação às demandas das obras e esforços. São resistentes, possuem boa flexibilidade e adaptação às demandas e tensões do terreno. Porém, esses tipos de vigas são mais pesados que as de ferro, normalmente utilizadas na construção de moradias.

VIGAS AÇO OU FERRO: Um dos tipos mais comuns, o aço nas vigas tem um comportamento isotrópico, com mais resistência e menos peso que o concreto. Com isso, eles conseguem suportar maiores esforços de compressão e também maiores trações, o que os torna ótimos para obras residenciais e urbanas.

VIGAS COMPOSTAS: As vigas compostas são constituídas de dois ou mais diferentes tipos de vigas. Ele tem como objetivo ser mais vantajoso já que além de possuir a junção de outras vigas, além disso é também economicamente mais barato. Uma linha de estudo interdisciplinar é a de vibrações transversais, esbeltas ou grossas, submetidas a determinados vínculos com condições iniciais variadas. O estudo das respostas elásticas e dinâmicas de componentes estruturais, sob várias condições de carga é muito útil para a modelagem e análise do comportamento de estruturas mais reais e complexas sujeitas a carregamentos similares. Na literatura, o estudo das deflexões ou vibrações transversais de vigas, pode ser representado por quatro modelos “físico-matemático” principais largamente estudados: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ou Vlasov e Timoshenko. Esses modelos diferenciam-se pelos efeitos considerados, via hipóteses simplificadora, o que gera resultados com distintos níveis de precisão a depender da aplicação de interesse.

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada, ela é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Porém, esta teoria tende a superestimar levemente as frequências naturais. Este problema é exacerbado para as frequências naturais dos maiores modos. Além disso, a predição das frequências também é melhor para vigas finas ou delgadas do que para vigas não delgadas. Já a teoria de Reyleigh apresenta um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito da rotação da seção transversal. Como consequência, parcialmente corrige os efeitos da superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, as frequências naturais são ainda superestimadas.

3.3 Objeto de Estudo: A Viga em Balanço

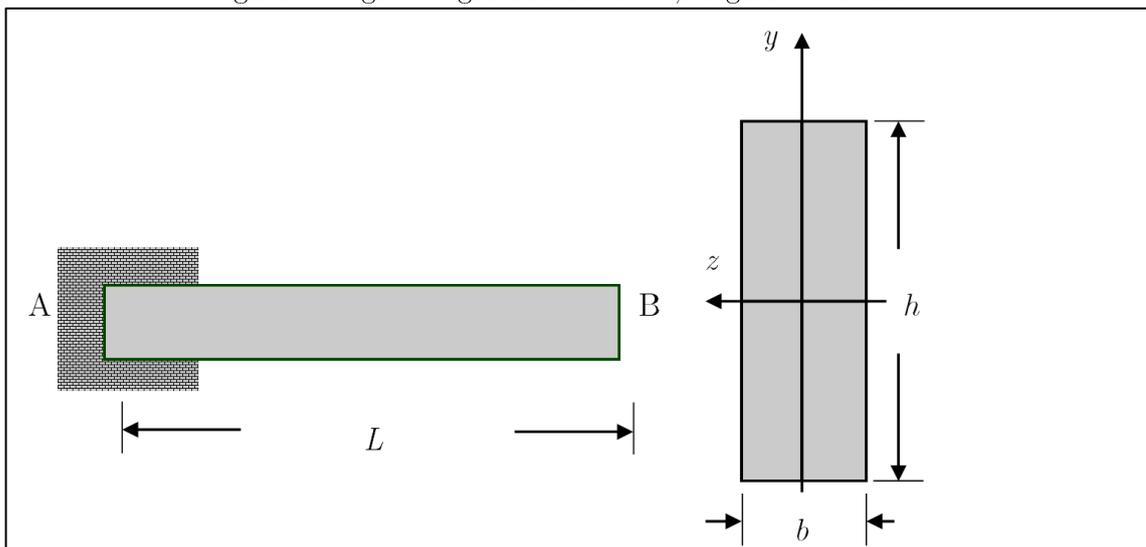
Consideremos uma viga *fixa-livre de Euler-Bernoulli*, Figura 3.1 . A viga está presa em A por vínculos que restringem os translacionais e rotacionais e livre em B. Além

disso, ela é prismática possuindo um comprimento L (seu vão), largura a e altura b . Além disso, a viga possui uma linha neutra (onde a tensão $\sigma_x = 0$), o eixo z , que está posicionada em um plano que intercepta a viga em $h/2$ e seu momento de inércia da seção em relação a linha neutra é $I = bh^3/12$ e seu coeficiente de Poisson é definido pela razão,

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}, \quad (3-1)$$

onde ε_α são as deformações específicas (deformações por comprimento).

Figura 1: Viga Biengastada de vão L , largura b e altura h .



Fonte: Autor.

A viga acima não deformada pode ser considerada composta por infinitas fibras longitudinais de comprimento L . Quando a viga sofre flexão, as fibras próximas à superfície côncava se contraem sob então de compressão e as fibras próximas à superfície convexa devem distender por tensão de tração. A superfície que separa a região de compressão da região de deformação (onde o comprimento permanece inalterado) é chamada de superfície neutra. A intersecção entre superfície neutra e o plano de simetria é chamada de linha neutra.

A equação que determina tensão de flexão é dada por,

$$\sigma_x = -\frac{M}{I}y \quad (3-1)$$

onde I é o momento de inércia da seção reta, M é momento fletor em relação a linha neutra e y é a distância da linha neutra a um ponto da viga. Sua curvatura fica determinada pela relação conhecida do cálculo,

$$\rho^{-1} = \frac{M}{EI} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3-2)$$

que no caso de pequenas deflexões ($dy/dx = 0$), se reduz a,

$$\rho^{-1} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (3-3)$$

A viga mostrada acima (Figura 3.1) é considerada de Euler-Bernoulli se satisfazer as seguintes hipóteses:

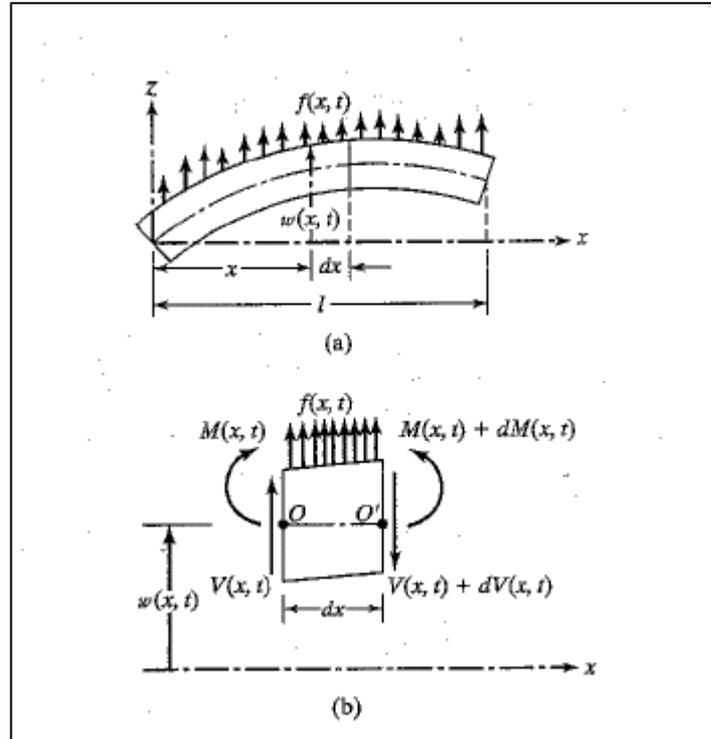
- a) O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões da viga;
- b) A viga é constituída de um material linearmente elástico;
- c) O Coeficiente de Poisson é negligenciável (não deve contração ou expansão transversal ao longo dos eixos y ou z);
- d) A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele (a linha neutra é posicionada em $h/2$);
- e) Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação;
- f) O ângulo de rotação é muito pequeno;
- g) O efeito de momento de inércia de rotação é desprezado;
- h) A energia envolvida no cisalhamento é desprezada.
- i) A viga é constituída de material homogêneo com densidade ρ .

O objetivo desse TCC é obter os modos vibracionais da viga em balanço (Figura 4.1) usando a equação de Euler-Bernoulli construída a partir da dinâmica de Newton. A viga utilizada é de aço com densidade 7880 Kg/m^3 e modulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa ; o comprimento é de 65 cm com uma base e largura de seção transversal de $0,4 \times 1,7 \text{ cm}$ respectivamente.

3.4 A Dinâmica de Newton: Equação de Euler-Bernoulli

Considere o diagrama de corpo livre de um pequeno elemento de viga de massa dm , comprimento dx e uma área de seção transversal $A(x)$ em uma vibração transversal ao longo e y com uma carga distribuída. O elemento foi obtido usando o método da seção, fazendo um corte nos pontos O e O' a uma distância x de A . Nas seções O e O' aparecem o momento fletor $M(x,t)$, a força cortante $V(x,t)$. A carga distribuída foi por $f(x,t)$, uma força por unidade de comprimento. O elemento de massa pode ser determinado a partir da relação $dm = \rho dV = \rho A dx$ onde ρ é a densidade volumétrica da viga em questão.

Figura 2: (a) Viga de vão L em vibração transversal. (b) O elemento da viga obtido por corte.



Fonte: (RAO, 2008)

De acordo com a dinâmica newtoniana a força resultante ao longo de y e o momento em relação à O (nulo) são determinados por,

$$+ \uparrow \sum F_y = ma_y ,$$

$$-(V + dV) + f(x,t)dx + V = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{dt^2} \quad (3-4)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_{O'} = 0 ,$$

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3-5)$$

Escrevendo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx, \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx, \quad (3-6)$$

E desconsiderando os termos que envolvem potências ao quadrado de $dx \ll 1$, as equações (3-5) e (3-6) podem ser escritas como,

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{dt^2} \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t) \quad (3-8)$$

Em seguida, combinando as equações (3-7) e (3-6) obtemos,

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{dt^2} \quad (3-9)$$

Da teoria elementar de flexão de vigas (também conhecida como teoria de Euler-Bernoulli ou teoria da viga delgada ou fina) a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa a partir de (3-4) e a equação (3-8) pode ser reduzida a uma equação de derivada parcial de quarta ordem em x e segunda ordem em t

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A dx \frac{\partial^2 w}{dt^2} = f(x,t) \quad (3-10)$$

Para a viga mostrada na figura 3.2, em que a área da seção transversal é constante a equação e as vibrações são livres ($f(x,t) = 0$), a equação (3-8) reduz a equação de Euler-Bernoulli para vibrações livres,

$$c^4 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3-11)$$

onde,

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (3-12)$$

3.4.1 Condições Iniciais e Condições de Vínculos

Uma vez que a equação de movimento envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação a x , são necessárias duas condições iniciais (CI) e quatro condições de contorno para determinar uma solução única para $w(x,t)$. Normalmente, os valores de deslocamento lateral e velocidade são especificados como $w(x,t)$ e $\partial w(x,t)/\partial t$ em $t = 0$, de modo que as condições iniciais tornam-se

$$w(x, t = 0) = w_0(x) \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial w(x, t = 0)}{\partial t} = p_0(x) \quad (3-14)$$

onde $w_0(x)$ e $p_0(x)$ são funções que dependem das condições iniciais escolhidas.

Já as condições de contorno (CC) de uma viga biengastada é obtida das condições de que a deflexão e a inclinações são nulas em $x = 0$ e $x = L$:

$$x = 0: \quad w(x = 0, t) = 0 \quad (3-15)$$

$$\frac{\partial w(x=0,t)}{\partial t} = 0 \quad (3-16)$$

$$x = L: \quad EI \frac{\partial^2 w(x=L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{Momento Fletor Nulo}) \quad (3-17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w(x=L,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{Força de Cisalhamento}) \quad (3-18)$$

Estas equações determinam as formas nodais (funções nodais) e as frequências naturais da viga biengastada. As condições (3-15) até (3-18) são as condições de vínculos da viga em questão, por não existir efeito de rotação e translação nesses pontos.

3.4.2 Vibrações Livres

Para estudar os modos de vibração livre da viga em balanço deve-se usar a equação (3-11) e as condições (3-15)-(3-18). A solução pode ser determinada usando o método de separação de variáveis $w(x,t) = X(x)T(t)$ substituindo em (3-12) e rearranjando os termos, obtemos

$$c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (3-19)$$

Em que a equação (3-21) pode ser escrita como,

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3-20)$$

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3-21)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3-22)$$

e as equações (3-20) e (3-21) permitem soluções analíticas em t e x .

3.4.3 Soluções no Tempo

A solução temporal (3-21) é obtida procurando soluções do tipo $W(x) = e^{st}$ que obtém a equação de autovalor, $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ cujas solução são $\pm i\omega$. Portanto a solução temporal é dada pela combinação linear,

$$T(t) = A^* \cos \omega t + B^* \sen \omega t \quad (3-23)$$

onde usamos,

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \operatorname{sen} \omega t \quad (3-24)$$

e o fato de que $(A + B) = A^*$ e $i(A - B) = B^*$.

3.4.4 A Solução Espacial

A solução temporal (3-20) é obtida procurando soluções do tipo $W(x) = e^{st}$ que obtém a equação de autovalor $(s^2 - \beta^2)(s^2 + \beta^2) = 0$, cujas solução são

$$\begin{cases} s^2 - \beta^2 = 0 \rightarrow s = \pm\beta \\ s^2 + \beta^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\beta \end{cases} \quad (3-25)$$

Portanto a solução temporal é dada pela combinação linear,

$$W(x) = C^* \cosh \beta x + D^* \operatorname{senh} \beta x + E^* \cos \beta x + F^* \operatorname{sen} \beta x \quad (3-26)$$

onde usamos,

$$e^{\pm \beta x} = \cosh \beta x \pm \operatorname{senh} \beta x \quad (3-27)$$

$$e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \operatorname{sen} \beta x$$

e o fato de que $(A + B) = A^*$, $(C - D) = D^*$, $(E + F) = E^*$ e $i(E - F) = F^*$. A equação (3-26) como as condições de contorno (3-15)-(3-18) ou na forma,

$$\begin{aligned} W(0) &= W(L) = 0 \\ W'(0) &= 0 \\ W''(L) &= 0 \\ W'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (3-20)$$

permite obter a equação,

$$\cosh \beta L \cos \beta L = -1. \quad (3-29)$$

As soluções da equação (3.29) permitem obter os valores βL e conseqüentemente as frequências dos modos de vibração da viga obtida de (3-22) (em Hz),

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3-30)$$

onde

$$\omega = (\beta L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}. \quad (3-31)$$

As soluções da equação (3-29) podem ser obtidas por softwares gratuitos na internet, como por exemplo, os softwares *desmos* ou *Geogebra*. Neste trabalho optou-se

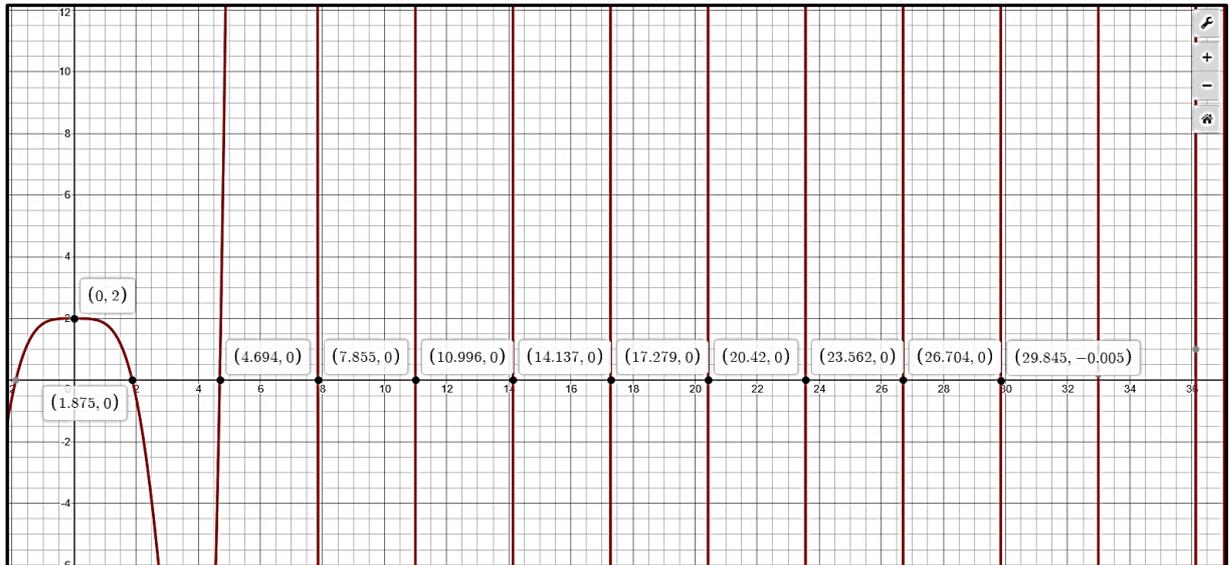
pela *calculadora gráfica desmos* lançada em 2011 pela Universidade de Yale. Ela permite possui uma interface gráfica que permite obter gráficos de qualidade.

A figura 3.3 mostra as possíveis soluções da equação (3-29) na forma,

$$\cosh\beta L \cos \beta L + 1 = 0. \quad (3-29)$$

usando a *calculadora gráfica desmos*.

Figura 3: Cálculo das frequências de vibração usando *desmos*.



Fonte: Autor.

No próximo capítulo os valores de βL calculados e tabelados para determinar as frequências dos 10 (dez) primeiros modos de vibração da viga em balanço e o método dos elementos finitos será para verificar os resultados

4. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

O método dos elementos finitos (MEF) tornou-se uma ferramenta poderosa na solução numérica de uma grande variedade de problemas de Física e Engenharia. As aplicações variam desde a análise de tensão, deformação e vibrações em estruturas automotivas, aeronaves, prédios e pontes até a análise de transferência de calor, escoamento de fluidos, fluxo magnético, infiltração e outros problemas de fluxo. Com o avanço da tecnologia de computação e sistema, problemas complexos podem ser modelados com relativa facilidade. Diversas configurações alternativas podem ser testadas em um computador antes que o primeiro protótipo seja construído. Tudo isso sugere que precisamos acompanhar esse desenvolvimento a partir da compreensão da teoria básica, das técnicas de modelagem e dos aspectos computacionais do método dos elementos finitos.

Neste capítulo, faremos uma introdução básica sobre o MEF e em seguida usamos o método para obter os modos de vibração de uma viga em balanço.

4.1 A Simulação Computacional

A simulação computacional usando o MEF pode ser feita ou programável em qualquer linguagem de programação como o Fortran 95 (ou o Fortran HPF), a linguagem C ou C++ ou ainda MATLAB (ou OCTAVE, versão livre). Neste TCC escolhemos o MATLAB como o ambiente de programação.

4.1.1 O Software MaTLab

O MATLAB (abreviatura para MaTrix LABoratory – Laboratório de Matrizes) é um programa de computador especializado e otimizado para cálculos científicos e de Engenharia. Inicialmente ele foi projetado para cálculo com matrizes; ao longo dos anos, transformou-se em um sistema computacional flexível, capaz de resolver essencialmente qualquer problema técnico. Ele implementa a linguagem de programação de mesmo nome, juntamente com uma vasta biblioteca de funções predefinidas que torna as tarefas de programação técnica mais fáceis e eficientes. Além disso, o MATLAB tem muitas vantagens, em comparação com linguagens computacionais convencionais (C++, Fortran e Python), entre elas podemos citar: Facilidade de uso, independência da plataforma, funções predefinidas diagramações independentes de dispositivos e interface gráfica de usuário.

Com o MaTLab é possível estudar:

- a) Sistemas moleculares por Monte Carlo ou Dinâmica Molecular;

- b) Tensão e deflexão de elementos estruturais por Métodos de Elementos Finitos;
- c) Dinâmica e Estática de Fluidos;
- d) Resistência de Estruturas;
- e) Propriedades de Materiais Magnéticos;
- f) Simulação de Fármacos em Indústrias farmacêuticas e outras.

4.1.2 Contexto Histórico do Método dos Elementos Finitos

As ideias básicas do método dos elementos finitos (MEF) se originaram dos avanços na análise estrutural de aeronaves. Em 1941, Herenikoff apresentou uma solução para problema da elasticidade usando “método de teoria de estruturas”. O artigo usava a interpolação polinomial por partes sobre sub-regiões triangulares para modelar problemas de torção, foi publicado em 1943. Turner et al. Derivaram matrizes de rigidez para treliça, viga e outros elementos, e apresentaram seus resultados em 1956. O termo elemento finito foi a princípio criado por Clough em 1960.

Na década de 1960, os engenheiros usaram o método para aproximar a solução de problemas de análise de tensão, escoamento de fluidos, transferência de calor e outras áreas. Um livro de Argyris de 1955 sobre o teorema de energia e métodos matriciais estabeleceu uma base para outros desenvolvimentos nos estudos sobre elementos finitos. O primeiro livro sobre elementos finitos, de Zienkiewicz e Cheung, foi publicado em 1967. No final da década de 1960 e no início da de 1970, a análise de elementos finitos foi aplicada a problemas não lineares e a grandes deformações. O livro de Oden sobre contínuos não lineares foi publicado em 1967.

Portanto, as bases matemáticas foram estabelecidas na década de 1970. O desenvolvimento de novos elementos, estudo de convergência e outras áreas relacionadas se encaixaram nessa categoria. Hoje, o avanço em computadores de grande porte e a disponibilidade de microcomputadores poderosos mantêm esse método ao alcance de alunos de Física e Engenharia que trabalham o ensino e em industriais. Alguns autores entendem que o MEF é uma ferramenta poderosa se simulação interdisciplinar que permite estudar problemas importantes de Física e de Engenharia usando os conceitos de Álgebra Linear, uma disciplina extremamente importante neste método além da mecânica clássica.

Na seção seguinte falaremos um pouco sobre o MEF e seus fundamentos.

4.1.3 Formulação do MEF: Uma Introdução

Nesse método de análise, uma região complexa definindo um meio contínuo é transformada em formas geométricas simples e discretas, chamadas elementos finitos. A propriedades dos materiais e as relações governantes são consideradas sobre esses elementos e expressas em termos de valores, considerando o carregamento e os vínculos, resulta em um conjunto de equações. A solução dessas equações nos dá o comportamento aproximado do meio contínuo.

Uma Viga no MEF é dividida em elementos, como mostrado na Figura 4.1. Cada nó tem dois graus de liberdade (GDL). Normalmente, os GDL do nó i são Q_{2i-1} e Q_{2i} . O GDL Q_{2i-1} é o deslocamento transversal, e Q_{2i} é a declividade ou rotação da tangente à linha elástica (ou linha neutra). O vetor

$$\mathbf{Q} = Q_1, Q_2, \dots, Q_{10} \quad (4-1)$$

Representa o vetor deslocamento global. Para um único elemento, os GDL locais são indicados por

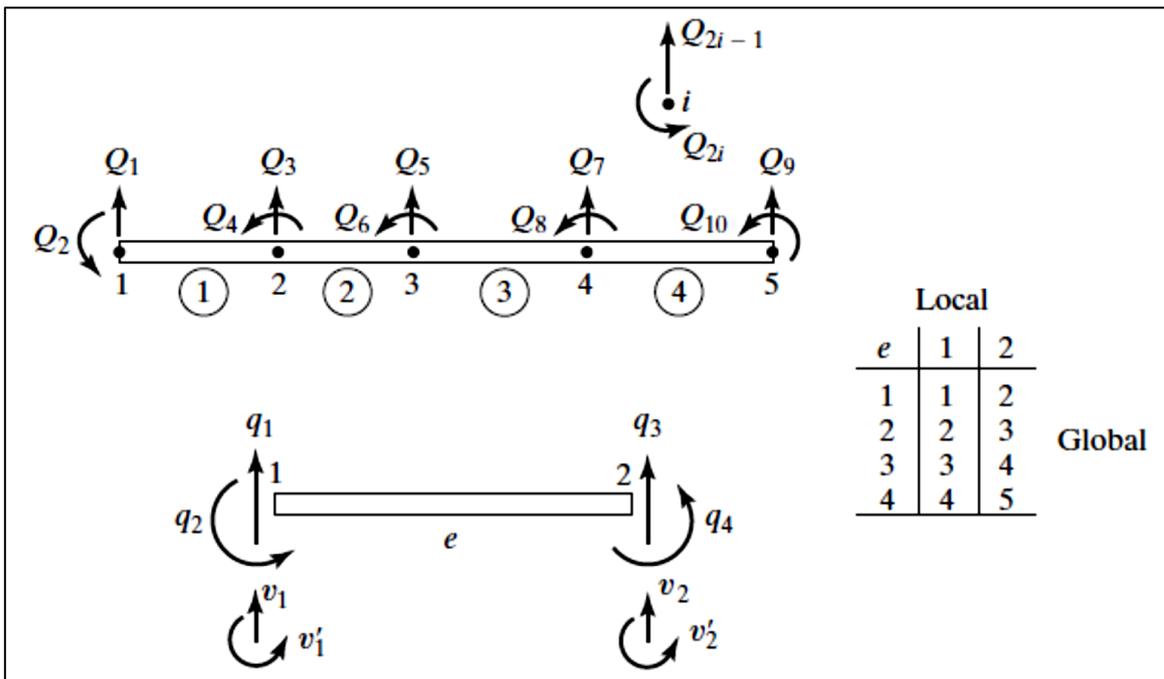
$$\mathbf{q} = q_1, q_2, q_3, q_4 \quad (4-2)$$

A correspondência local-global é fácil de ver pela tabela 4.1. O vetor \mathbf{q} é o mesmo que v_1, v_1', v_2, v_2' . As funções de interpolação de v em um elemento são definidas de ξ no intervalo -1 a $+1$, como mostra a Figura 4.2. As funções de forma para os elementos de viga diferem daquelas discutidas anteriormente. Como são envolvidos deslocamentos e declividades nodais, definimos funções de forma de Hermite, que satisfazem os requisitos de continuidade de deslocamento e declividade nodal. Cada uma das funções de forma tem ordem cúbica representada por

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3. \quad (4-3)$$

onde $i = 1, 2, 3, 4$ e as condições dadas na tabela 4-1.

Figura 4: Discretização em elementos finitos.



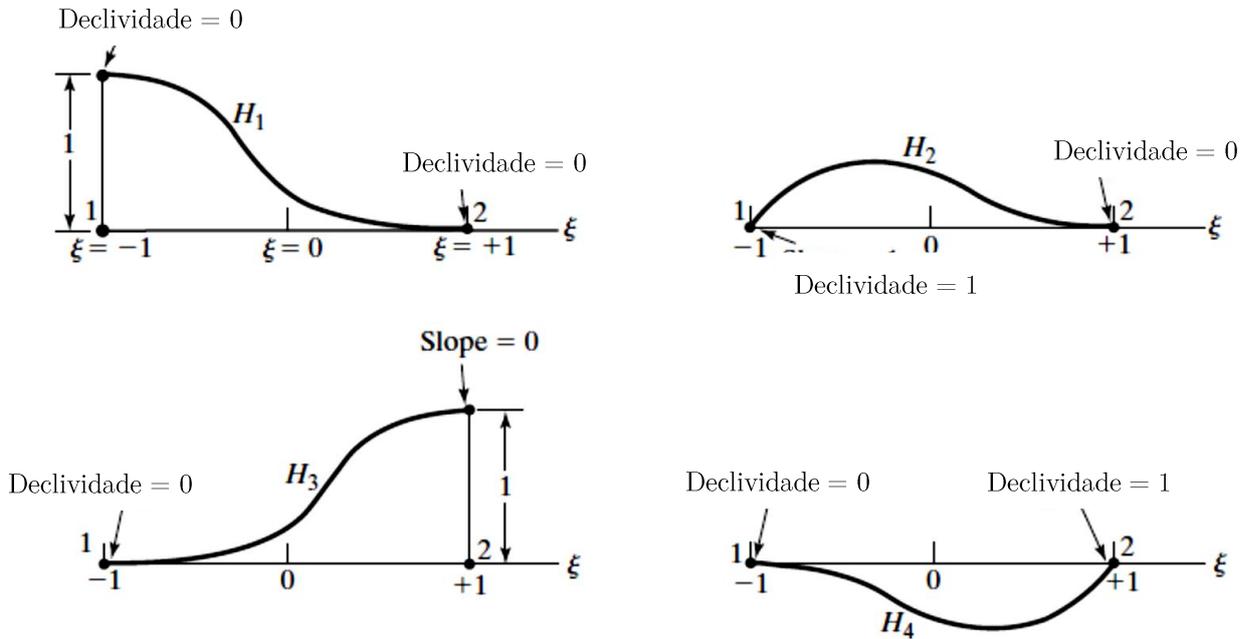
Fone: (TIRUPATHI, 2017)

Tabela 1: Condições de H_i e suas derivadas para cada valor ξ .

ξ/H_i	H_1	H'_1	H_2	H'_2	H_3	H'_3	H_4	H'_4
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = +1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Fonte: (TIRUPATHI, 2017)

Figura 5: Funções de Forma de Hermite.



Fone: (TIRUPATHI, 2017)

Os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i podem ser facilmente obtidos com a imposição dessas condições, assim,

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\
 H_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\
 H_3 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\
 H_4 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

e, portanto, os polinômios de Hermite podem ser usados para escrever as funções de interpolação $v(\xi)$

$$v(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)_1 \tag{4-6}$$

Onde as coordenadas transformam-se pela relação

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}\xi = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{\ell_e}{2}\xi \quad (4-7)$$

onde ℓ_e é o comprimento do elemento de viga.

Da regra da cadeia

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\ell_e}{2} \frac{dv}{dx} \quad (4-8)$$

E observando que dv/dx avaliado nos nós 1 e 2 é igual a q_2 e q_4 respectivamente, teremos

$$v(\xi) = H_1q_1 + \frac{\ell_e}{2}H_2q_2 + H_3q_2 + \frac{\ell_e}{2}H_4q_4 \quad (4-9)$$

que pode ser escrita na forma matricial

$$v = \mathbf{H}\mathbf{q} \quad (4-10)$$

onde a matriz é dada por,

$$\mathbf{H} = \left[H_1, \frac{\ell_e}{2}H_2, H_3, \frac{\ell_e}{2}H_4 \right] \quad (4-11)$$

Um elemento de viga sob flexão dinâmica pode ser associado a ele uma energia cinética T e uma energia potencial de flexão transversal U . Essa energia é obtida da relação $L = T - U$, onde L é a lagrangeana. Vamos definir agora essas energias em termos de funções nodais.

Energia Potencial de Flexão

A energia potencial em uma flexão é obtida da relação,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\alpha} EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4-12)$$

onde E e I são respectivamente o módulo de elasticidade e o momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra e v é a deflexão. Calculando a derivada segunda de (4-10) obtemos,

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = \mathbf{q}^T \frac{16}{\ell_e^4} \left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right)^T \left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right) \quad (4-13)$$

em que,

$$\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right) = \left[\frac{3}{2}\xi, \frac{-1+3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2}, -\frac{3}{2}\xi, \frac{1+3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2} \right]. \quad (4-14)$$

Com a substituição de $dx = \frac{1}{2}\ell_e d\xi$ e as equações (4-13) e (4-14) em (4-12), a seguinte relação integral,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{8EI}{\ell_e^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}(-1+3\xi)\ell_e & -\frac{9}{8}\xi^2 & \frac{3}{8}\xi(1+3\xi)\ell_e \\ \frac{1}{16}(-1+3\xi)^2\ell_e^2 & -\frac{3}{8}(-1+3\xi)\ell_e & \frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{1}{16}(-1+9\xi^2)\ell_e^2 \\ & & & \frac{9}{4}\xi(-1+3\xi)\ell_e \\ & & & \frac{1}{16}(1+3\xi)^2\ell_e^2 \end{bmatrix} dx \mathbf{q} \quad (4-15)$$

que pode ser escrita como,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q} \quad (4-16)$$

onde \mathbf{k}_e é a *matriz de rigidez* (MR) do elemento de viga,

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_e & -12 & 6\ell_e \\ 6\ell_e & 4\ell_e^2 & -6\ell_e & 2\ell_e^2 \\ -12 & -6\ell_e & 12 & -6\ell_e \\ 6\ell_e & 2\ell_e^2 & -6\ell_e & 4\ell_e^2 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

A matriz de rigidez é muito utilizada no método matricial da rigidez (ou inglês *direct stiffness method*) é aplicável no cálculo de estruturas hiperestáticas de barras que se comportam de forma linear elástica. Este método é adequado para realizar análise computacional de qualquer estrutura, incluindo estruturas estaticamente indeterminadas. O método matricial se baseia em estimar as componentes das relações de rigidez para resolver as forças ou os deslocamentos com uso de um computador. As propriedades de rigidez do material são computadas em uma única equação matricial que governa o comportamento interno da estrutura idealizada. Os dados que se desconhecem na estrutura são as forças e deslocamentos, que podem ser determinados resolvendo esta equação. O método direto da rigidez é o mais comum nos programas de cálculo de estruturas.

Energia Cinética

A Energia Cinética do elemento de viga é definida pela relação,

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \rho dV \quad (4-18)$$

onde ρ é a densidade volumétrica (massa por volume) e $\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}]$ é o vetor velocidade em um ponto \mathbf{x} . No MEF, dividimos a viga em elementos, e, cada elemento, expressamos por \mathbf{u} em função dos deslocamento nodais \mathbf{q} , usando de forma \mathbf{N} . Assim $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$. Em análise dinâmica, os elementos de \mathbf{q} são dependentes do tempo, enquanto \mathbf{N} representa funções de forma (espaciais) definidas em um elemento mestre. O vetor velocidade é, dada por $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}$ e portanto, a energia cinética de uma elemento pode ser escrita na forma,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\int \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (4-19)$$

onde

$$\mathbf{m}_e = \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4-20)$$

é a matriz de massa do elemento. Essa matriz é consistente com as funções de forma escolhidas e é chamada matriz de massa consistente.

Para o elemento de viga, usamos a função de forma de Hermite (4.5),

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \rho A_e \frac{\ell_e}{2} d\xi \quad (4-21)$$

e integrando todos os elementos da matriz,

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_e & 54 & -13\ell_e \\ 22\ell_e & 4\ell_e^2 & 13\ell_e & -3\ell_e^2 \\ 54 & 13\ell_e & 156 & -22\ell_e \\ -13\ell_e & -3\ell_e^2 & -22\ell_e & 4\ell_e^2 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

a matriz de massa (MM) para o elemento de viga.

Para aproximações discretas da mecânica de meios contínuos, como no método de elementos finitos, pode haver mais de uma maneira de construir a matriz de massa, dependendo da precisão e desempenho computacional desejados. Por exemplo, um método de massas agrupadas, no qual a deformação de cada elemento é ignorada, cria-se uma matriz diagonal de massa e nega a necessidade de integrar a massa ao longo do elemento deformado.

Frequências dos modos de vibração da viga

A energia total da viga no MEF é obtido do lagrangeano da soma da diferença da energia cinética e potencial de cada um dos elementos de viga,

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (4-23)$$

onde,

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \sum_e \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{q}} \quad (4-24)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q} \quad (4-25)$$

para vibrações livres. Portanto, a equação de movimento é obtida da equação de lagrange. Para as condições de regime permanente, começando a partir da posição de equilíbrio $\mathbf{Q} = \mathbf{U} \text{sen}(\omega t)$, onde \mathbf{U} é o vetor de amplitudes nodais de vibração, a equação de movimento é dada por,

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U}. \quad (4-26)$$

As frequências naturais dos modos normais vibração e os vetores nodais são obtidos da diagonalização das matrizes (4-25),

$$\{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}\} \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (4-27)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\{\mathbf{0}\}$ é a matriz nula e $\{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}\} = \{\mathbf{D}\}$ é conhecida como matriz dinâmica. A equação (4-25) é um problema de autovalores e autovetores, de modo que ω^2 são os autovalores da matriz dinâmica do sistema. Tendo em mãos as frequências naturais de vibração, a matriz \mathbf{U} será a matriz de autovetores associado às frequências naturais. A diagonalização da matriz dinâmica permite encontrar as frequências naturais dos modos de vibração da viga

$$\omega^2 = \text{diagonal}\{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}\} \quad (4-28)$$

e as frequências dos modelos de vibração são determinadas a partir da relação $f = \omega/2\pi$ em hertz (Hz).

4.2 Resultados e Discussões

Para verificar o resultado teórico obtido no capítulo 3 usando a equação de Euler-Bernoulli para uma viga em balanço propriedades da pela tabela 4.2 usando o método dos Elementos finitos implementado em MATLAB.

Tabela 2: Propriedades da Viga em Balanço

Densidade (kg/m ³)	7888
Largura (mm)	4
Altura (mm)	17
Comprimento (cm)	65
Módulo de Elasticidade (GPa)	200

Fonte: Autor.

Com os dados da Tabela 4.2 e usando a equação (3-31) determinamos as frequência teórica de Euler-Bernoulli obtida da dinâmica de Newton usando a relação,

$$f = \frac{(\beta L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}. \quad (4-29)$$

onde os resultados estão da Tabela 4.3.

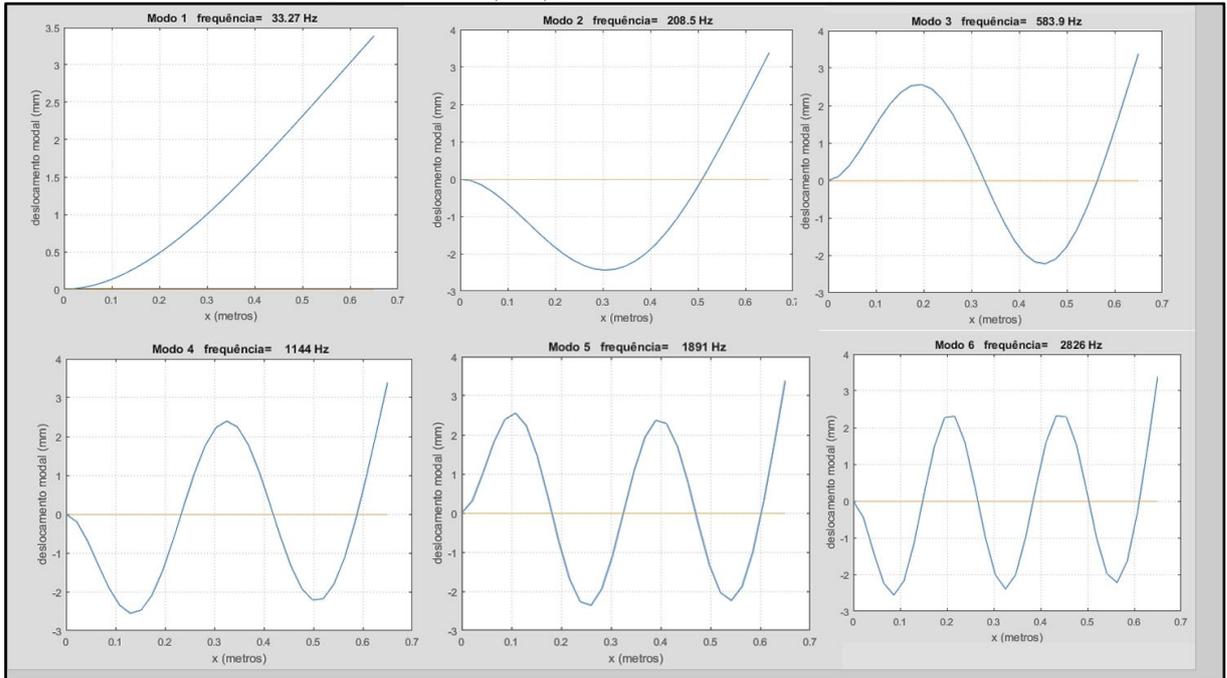
Tabela 3: Frequências teóricas e experimentais.

Modos	βL	ω (rad/s)	Frequencia Teórica (Hz)	Frequência MEF (Hz)	Erro (%)
1	1,875	205,89	32,76	33,27	1,53
2	4,694	1.290,2	205,3	208,5	1,53
3	7,855	3.613,2	575,53	583,9	1,43
4	10,996	7.080,6	1.126,9	1.144	1,49
5	14,137	11.703,4	1.862	1.891	1,00
6	17,279	17.483,8	2.782,6	2.826	1,53
7	20,42	24.418,1	3.886,2	3.947	1,53
8	23,562	32.510,6	5.174,2	5255	1,53
9	26,704	41.759,3	6.646,2	6751	1,55
10	29.845	52.160,7	8.301,64	8435	1,58

Fonte: Autor.

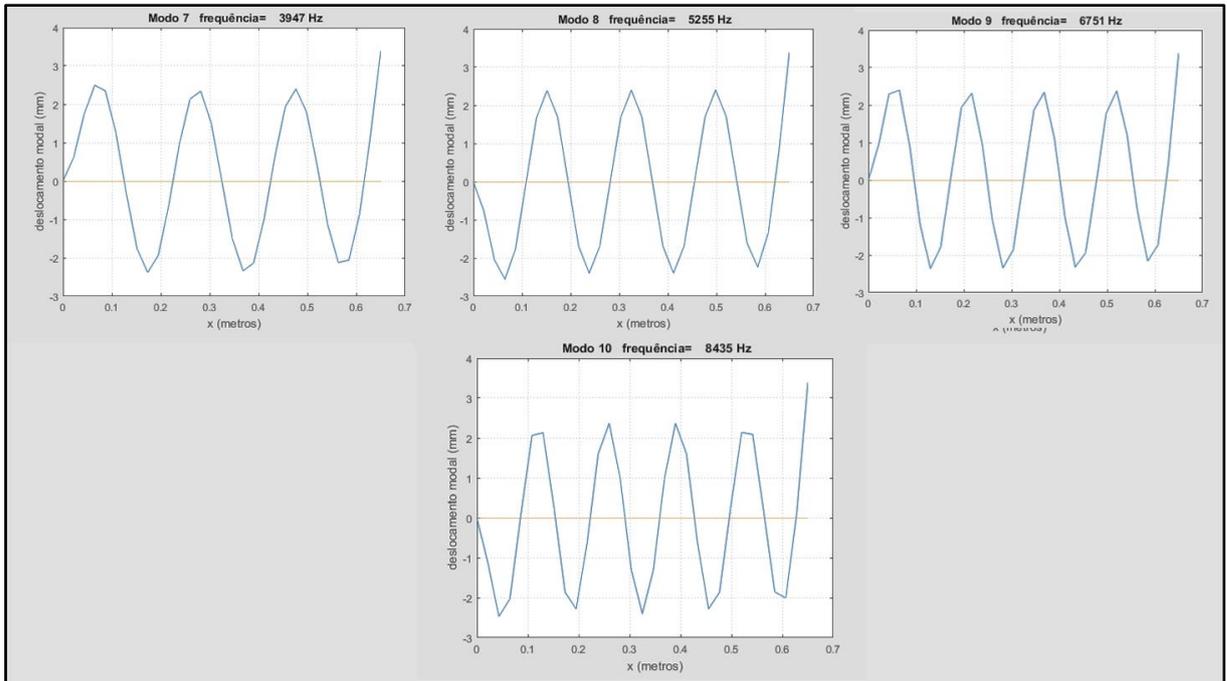
Os modos de vibração da viga para cada frequência tabelada é mostrado na Figuras 4.3 e 4.4 para os 10 (dez) primeiros modos de frequência da viga em balanço simulado em no MEF para divisões de 30 elementos. O lado direito do gráfico onde a viga esta livre apresenta uma amplitude maior de vibração.

Figura 6: Os 6 (seis) primeiros modos de vibração



Fonte: Autor.

Figura 7: Os 4 (quatro) últimos modos de vibração analisados.



Fonte: Autor.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Identificar e analisar o comportamento das deformações de estruturas é fator significativo para o projeto as diversas aplicações nas diversas áreas da engenharia e Física, e ainda poder fazer isso de forma multidisciplinar com a computação é muito eficiente já que através do software as análises feitas neste trabalho ficaram com resultados incríveis, levando em consideração o grau mínimo de erro entre os dados examinados da teoria até a experiência dos dados relacionados.

É importante ressaltar que a porcentagem dos erros cresce exponencialmente conforme o modo de vibração que é analisado, isso acontece, pois, as possibilidades são infinitas, por isso para prever esses dados tem de ser uma barra finita.

Com base na experiência adquirida neste estudo, pode-se propor para futuros estudos uma análise mais aprofundada para a aplicação das engenharias, e também nas áreas da computação, e claro o estudo da física dos materiais, porque é através de estudos como esse que possibilita a construção de por exemplo ‘lajes em balanço’, pois parte dos mesmos princípios citados nos textos, há também inúmeras outras contribuições para o estudo da viga fixa-livre.

Este trabalho de TCC deve servir como base para outros trabalhos interdisciplinas de licenciatura física que envolve as áreas da Computação, Engenharia, Química e Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K. J.; WILSON, E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- RAO, S. S. Vibrações Mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014.
- BEER, F. P. Mecânica dos Materiais. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.838 p.
- BARCELOS NETO, João. “Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana”. 2a. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. “Métodos Numéricos para Engenharia”. Porto Alegre: AMGH, 2011. 809 p.
- FERREIRA, A. J. M., “Matlab: Códigos for Finite Elements”, Porto Portugal.1^a Ed, 2008.
- HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson, 2010. 641p.
- INMAN, D. J. Engineering Vibration. 3rd ed. Prentice Hall, 2007.
- LEMOS, Nivaldo, “Mecânica Analítica”, Editora Livraria da Física, São Paulo (2007).
- POPOV, E.P. Introdução a mecânica dos sólidos. São Paulo: Ed Blücher, 1978. 534p.
- SAVI, M. S., PAULA, A. S., “Vibrações Mecânicas”, Editora LTC – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2017.
- SCHIESSER, W. E. A., “Compendium of Partial Differential Equation Models: Method of Lines Analysis with Matlab’. 1^a Ed., 2009.
- SAVI, M. S., PAULA, A. S., “Vibrações Mecânicas”, Editora LTC – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2017.
- THOMPSON, W. T.; DAHLET, M. D. Theory of Vibration with Applications. 5th ed. Prentice Hall,1997.

APÊNDICE A**Termo de Autorização de Publicação de Produção Acadêmica**

O estudante IORRAN BATISTA VIEIRA do curso de Licenciatura em Física, matrícula **2017.2.0018.0016-0**, telefone: (64) **99227-5943** e-mail **iorranpba@hotmail**, na qualidade de titular dos direitos autorais, em concordância com a Lei nº 9.610/98 (Decreto dos Direitos do Autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o trabalho de Conclusão de Curso intitulado **A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA EM BALANÇO**, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF), imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão na internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 15 de junho de 2021.

Iorran Vieira Batista

Assinatura do autor: _____

Nome Completo do Autor: IORRAN BATISTA VIEIRA

Assinatura do Professor-orientador: _____

Nome completo do professor-orientador: ANDRÉ LUIZ CARDOSO DA SILVA