

PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS  
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO  
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA



A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO  
DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE FORÇA GENERALIZADO

LETÍCIA BRAGANÇA DA SILVA

GOIÂNIA

2021

LETÍCIA BRAGANÇA DA SILVA

**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO  
DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE FORÇA GENERALIZADO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura Plena em Física.

Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva.

Banca Examinadora:

Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.

Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

LETÍCIA BRAGANÇA DA SILVA

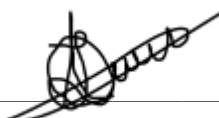
**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO  
DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE FORÇA GENERALIZADO**

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção do título de Licenciatura em Física, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciência Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em **08/06/2021**.

---

Prof. Ms. Ludimilla Reis Pinheiro dos Santos.  
Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso.

Banca examinadora:



---

Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva



---

Prof. Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.



---

Prof. Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

*Dedico à  
Minha família*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família por todo o suporte e apoio. Aos meus amigos em especial Iorran Vieira Batista, Guilherme Rocha e Bruno Hoffman que estiveram comigo durante a graduação. E a todos os professores da PUC/Goiás, especialmente aos professores Edson Vaz de Andrade, Raffael Costa de Figueiredo Pinto, Sandra Regina Longhin pelo ótimo trabalho realizado no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) na qual eu tive a felicidade de participar, Vanda Domingos Vieira pelo apoio no Programa de Residência Pedagógica e André Luiz Cardoso da Silva pelo projeto de pesquisa Iniciação Científica (IC).

Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador, Dr. André Luiz Cardoso da Silva, por ter me orientado durante o meu Trabalho de Final de Curso (TCC) e ao Coordenador do curso Dr. Anderson Silva pela organização do curso de Física.

Agradeço à OVG e ao ProUni pelo apoio financeiro durante meu curso de graduação.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”

Isaac Newton (1643-1727)

## RESUMO

Neste trabalho, propomos mostrar a interdisciplinaridade da dinâmica newtoniana estudando uma abordagem microscópica do fluxo de tráfego de veículos em via usando o modelo de força generalizada (GF, Generalized Force), obtido de uma extensão do modelo velocidade Ótima (OV, Optima Velocity) que apresenta desacelerações irrealistas e a ocorrência de altas acelerações comparativamente com os dados empíricos. Diversos autores entendem que deve-se considerar a aceleração causada pela velocidade relativa de dois veículos consecutivos. O estudo desta dinâmica será feita por simulações numéricas do fluxo de tráfego usando o software MATLAB/OCTAVE para resolver um conjunto de equações diferenciais pelo método Runge Kutta 4<sup>a</sup> ordem. Simulações numéricas evidenciaram regimes que compartilham aspectos comuns com os regimes de condução real, nomeadamente, as situações de “para-arranca”, as acelerações e desacelerações, e o congestionamento. Os resultados do modelo GF revelam-se bons comparativamente aos resultados empíricos.

**Palavras chave:** A Dinâmica de Newton, Fluxo de Tráfego de Veículos, Simulações computacionais.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Dr. Bruce Douglas Greenshields (1893-1979). . . . .	4
Figura 2:	Via de veículos de comprimento $L$ e seção $A$ . . . . .	4
Figura 3:	Representação de um Diagrama Fundamental de Fluxo de Tráfego. . . . .	10
Figura 4:	Modelo “Following-Car” . . . . .	14
Figura 5:	O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do Modelo de Chandler . . . . .	18
Figura 6:	O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do modelo de Greenshiels. . . . .	20
Figura 7:	O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do Modelo de Greenberg . . . . .	22
Figura 8:	O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do modelo de Underwood. . . . .	25
Figura 9:	Modelo “Car-following” de carros obedecendo a condição de contorno . . . . .	28
Figura 10:	A região de estabilidade em coordenadas polares $(f, \lambda)$ . . . . .	29
Figura 11:	Gráfico da Velocidade Ótima: Função $V$ (vermelho), derivada primeira (verde), derivada segunda (magenta). . . . .	30
Figura 12:	posições dos 350 veículos obtidos pela implementação do modelo GF durante 350 segundos . . . . .	32
Figura 13:	Headway dos veículos durante 350s. ) . . . . .	32
Figura 14:	Flutuação das velocidades dos veículos ao longo do tempo. . . . .	33
Figura 15:	trajetória de todos os veículos (caso instável) . . . . .	34
Figura 16:	trajetória de todos os veículos (caso instável) . . . . .	34
Figura 17:	headway dos veículos (caso instável). . . . .	35
Figura 18:	Relação da velocidade com o veículo (caso instável). . . . .	35
Figura 19:	Headway dos veículos (caso instável) . . . . .	35
Figura 20:	Relação da velocidade com o veículo (caso instável). . . . .	35
Figura 21:	Relação da velocidade com o tempo (caso instável). . . . .	36



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	A classificação dos níveis de serviço aplicada mundialmente. . . . .	11
Tabela 2:	Valores das constantes $m$ e $\ell$ para alguns parâmetros estimados da equação GHR. Representação do espaço de fase. . . . .	17

**LISTA DE ABREVIATURAS**

OV	Optimal Velocity
GOV	Generalized Optimal Velocity
RK4	Método de Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> Orde .
GF	Generalized Force

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>FUNDAMENTOS</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1	Considerações Gerais. . . . .	3
2,2	Algumas Demandas do Fluxo de Tráfego . . . . .	4
2.3	Variáveis do Fluxo de Tráfego. . . . .	6
	2.3.1 Equação Fundamental do Fluxo de Tráfego. . . . .	6
	2.3.2 As Velocidades do Fluxo de Veículos: Velocidade Média. . . . .	7
	2.3.3 O Regime Transitório. . . . .	9
	2.3.4 Diagrama Fundamental do Fluxo de Tráfego . . . . .	9
2.4	Níveis de Serviço. . . . .	11
<b>3.</b>	<b>TEORIA MICROSCÓPICA DO FLUXO DE TRÁFEGO</b> . . . . .	<b>13</b>
3.1	Modelos Macroscópicos e Microscópicos . . . . .	13
3.2	O Modelo Car-Following: Uma ideia Inicial. . . . .	14
3.3	O Modelo GM. . . . .	15
	3.3.1 Vantagens e Algumas Limitações do Modelo GM. . . . .	17
3.4	Alguns Resultados do Modelo GM . . . . .	17
	3.4.1 O Modelo de Chandler. . . . .	17
	3.4.2 O Modelo de Greenshields. . . . .	19
	3.4.3 O Modelo de Greenberg. . . . .	20
	3.4.4 O Modelo de Underwood. . . . .	23
<b>4.</b>	<b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL</b> . . . . .	<b>26</b>
4.1	O Modelo Velocidade Ótima. . . . .	26
	4.1.1 A Estabilidade do Modelo Velocidade Ótima. . . . .	27
	4.1.2 A Escolha de uma Função Velocidade Ótima . . . . .	28
4.3	Modelo de Força Generalizada. . . . .	30

4.4	Soluções Numéricas do GF. . . . .	30
4.4.1	Problema de Valor de Inicial . . . . .	31
4.4.2	Resultados e Discussões . . . . .	32
5.	<b>CONCLUSÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>38</b>
	<b>APÊNDICE A – Termo de Autorização de Publicação de</b>	
	<b>Produção Acadêmica . . . . .</b>	<b>40</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A análise do fluxo de tráfego de veículos em vias urbanas tem chamado a atenção da comunidade acadêmica de Física, Matemática e Engenharia, apresentando um número crescente de publicações interdisciplinares nos últimos anos (veja, as Revistas TRANSPORTES<sup>1</sup> e REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA). Esse interesse se justifica pelo grande aumento de volume de veículos em vias de trânsito em geral. A descrição desse fluxo consiste na aplicação de conceitos matemáticos (ou probabilísticos) e algumas leis da Física clássica, que tem como propósito descrever o tráfego veicular a partir de um conjunto de dados empíricos, teóricos ou ainda por simulações numéricas. Este estudo é importante em regiões de alta densidade de tráfego que pode ser verificado por um congestionamento causado pelo aumento no tráfego, ou até mesmo por um bloqueio de uma ou mais faixas de rodagem da via.

Descrever as condições de tráfego é essencial para acompanhar o desenvolvimento operacional de uma ou mais vias. Nesse sentido existem várias abordagens para descrever o fluxo de tráfego de veículos. Do ponto de vista teórico ou computacional, são três as abordagens básicas da análise de tráfego: a *macroscópica*, *microscópica* e *mesoscópica*. Na abordagem macroscópica a dinâmica do fluxo de veículos é construída por modelos hidrodinâmicos de fluidos, assumindo a existência de um fluxo contínuo de veículos e as leis da conservação de massa e do momento linear, de fundamental importância no contexto macroscópico. Esses modelos descrevem a relação do desenvolvimento das variáveis fundamentais, a densidade, a velocidade e o fluxo. Neles as equações que descrevem a dinâmica são do tipo Navier-Stokes e descreve uma grande variedade de fluxo de tráfegos com respostas linear e/ou não linear, para diferentes tipos de viscosidades.

Na abordagem mesoscópica (ou cinética), a identificação da posição e da velocidade dos veículos é feita por uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerada como uma variável aleatória. A dinâmica desses modelos é construída a partir das equações integro-diferenciais similares as equações de Boltzmann. A solução desses problemas de tráfego é feita por métodos de simulação computacional tipo Monte Carlo (MC) e descreve uma grande variedade de problemas importantes, como congestionamento e estabilidade do tráfego.

Na abordagem microscópica os veículos e suas interações são analisados de forma individual, como se fossem partículas. É analisado mais precisamente a aceleração do veículo, sua velocidade, posição e distância, o restante dos veículos são as variáveis usadas para caracterizar estes modelos que, de um modo são representados por sistemas de equações diferenciais ordinárias com ou sem retardo, construídas a partir da dinâmica newtoniana. Nessa abordagem, existem vários modelos, provavelmente o mais famoso entre esses modelos é o “*Car-following*” baseia-se na ideia de que cada condutor responde (ou reage) a uma forma específica de estímulo, traduzido na forma de

aceleração ou desaceleração. Estes estímulos tratam de distância ou velocidade relativa entre veículos ainda em grande discussão em publicações atuais. A solução das equações desse modelo permite uma razoável descrição numérica das condições de fluxo de tráfego.

Quando se estuda a dinâmica do fluxo de tráfego em geral, todas as abordagens apresentam suas vantagens e desvantagens. Na abordagem microscópica que permite uma análise mais precisa quando o número de veículos é muito grande nas vias (ou em altas densidades). O tratamento individualizado dos veículos exige mais recursos computacionais do que a abordagem macroscópica. Então na abordagem macroscópica a vantagem e simplicidade computacional, por outro lado apresenta problemas quando há poucos veículos na via (ou em baixa densidade) ou via de fluxo livre, apresentando informações não realistas em vias urbanas. Neste sentido, é que preferimos a abordagem microscópica para usá-la nesse TCC.

No capítulo 2, falaremos um pouco sobre as variáveis fundamentais do fluxo de tráfego, discutiremos os diagramas fluxo e os níveis de serviço. Além disso, falaremos um pouco sobre o estudo do fluxo de tráfego. No capítulo 3, faremos um estudo sobre a teoria microscópica do fluxo de tráfego construída a partir da dinâmica de newtoniana e, analisaremos dois modelos *Car following* linear e não linear proposto nos modelos General Motors (GM). As equações não lineares são utilizadas em seguida para obter diferentes modelos apresentados na literatura. Em cada dos modelos é discutido suas implicações no estudo de um fluxo de tráfego em equilíbrio.

No Capítulo 4, apresentaremos o modelo Velocidade Ótima (OV, *Optimal Velocity*) e uma extensão chamado modelo de Força Generalizada (GF, *Generalized Force*). Em seguida, é usado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), implementado em MATLAB (ou OCTAVE), para solução às equações diferenciais e observar a dinâmica dos veículos para uma velocidade média da Avenida 85 em Goiânia, obtida a partir de um aplicativo de trânsito.

No Capítulo 5, faremos as conclusões finais.

## 2 FUNDAMENTOS

A Teoria do Fluxo de Tráfego (TFT) busca estudar e descrever as relações entre os veículos, estímulos do condutor, via e componentes de infra-estrutura, como semáforos, sinalização, entre outros, em termos de conceitos físicos, matemáticos e de Engenharia. Estas teorias surgiram nos anos 30, na tentativa de relacionar as grandezas de fluxo, densidade e velocidade, pelo engenheiro norte americano *B. Greenshields*. Atualmente estas teorias fundamentam todas as ferramentas e modelos de fluxo de trânsito nas grandes cidades. A TFT possui um grande interesse na Engenharia de transporte, como por exemplo, o tratamentos alternativos de gestão de tráfego, concepção de ensaios de novas vias, modelos de fluxo operacional, formação de gestores de tráfego e outras demandas.

Nesse capítulo discutiremos um pouco sobre fundamentos da TFT.

### 2.1 Considerações Gerais

O sistema de transporte terrestre é, sem sombra de dúvida, um dos recursos mais importantes para a vida social e econômica de grandes cidades ou de um País como o Brasil. Por exemplo, na cidade de Goiânia, estima-se 1,2 milhões de veículos (incluindo, carros, caminhões e ônibus) para aproximadamente 1,5 milhões de habitantes, o que significa 0,8 veículos por habitante de acordo com o IBGE/2020<sup>2</sup>. Adicionalmente, somos expectadores e/ou autores de um crescimento considerável de áreas urbanas de nosso País, bem como o aumento de veículos. Parte disso, se deve ao desenvolvimento da indústria automotiva brasileira em 2020, com 2,01 milhões de veículos montados (uma queda de 31,6% em relação a 2019), a mais baixa produção em 17 anos segundo dados da ANFAVEA (a entidade que representa as montadoras instaladas no País). Apesar de uma queda considerável, na montagem do número de veículos, por todo território nacional, esse número ainda é grande.

O mês de dezembro de 2020 foi, porém, positivo, com crescimento de 22,8% em relação ao mesmo período de 2019, chegando a 209,3 mil veículos. Com o aumento no número de veículos e da urbanização surgem os congestionamentos, que são um dos principais componentes contra qualidade de vida nas grandes cidades brasileiras. Neste sentido, torna-se importante o estudo acadêmico sobre o fluxo de tráfego de veículos, congestionamentos e outros gargalos do trânsito com uma boa TFT.

O pioneiro do desenvolvimento sobre a TFT foi o Engenheiro norte americano *Bruce Douglas Greenshields* (1893-1079). Ele nasceu em Winfield, Kansas, em 14 de abril de 1893. Morreu em 12 de fevereiro de 1979. Formou-se na Universidade do Oklahoma e fez seu mestrado e doutorado em Engenharia Civil na Universidade do Michigan. Sua teoria foi decorrente de experimentos em campo, apoiado por um sistema que ele criou de registros fotográficos em série, usando uma câmera de cinema

de 16 mm. O equipamento foi conectado a um motor que disparava a câmera em intervalos regulares, gerando fotos que permitiam a observação posterior do espaçamento e da velocidade dos veículos em uma rodovia.

Figura 1: Dr. Bruce Douglas Greenshields (1893-1979).



Fonte: <http://tft.eng.usf.edu/>.

O resultado de seus estudos foi apresentado pela primeira vez no 14<sup>o</sup> Encontro Anual de Comitê de Pesquisas Rodoviárias, em 1935, sob o título “*A Study of Traffic Capacity*” e naquele mesmo ano foi publicado nos anais do evento (GREENSHIELD, 1935). A obra pioneira de Greenshields foi uma grande contribuição para os estudos do fluxo de tráfego. Com o passar dos anos, outras pesquisas foram aperfeiçoando o modelo de Greenshields e dados obtidos por meio de medições mais acuradas, com instrumentos mais modernos e precisos, trouxeram a constatação de que o fluxo de tráfego não apresenta um comportamento regular, com diferenças significativas entre as condições de normalidade e de saturação.

## **2.2 Algumas demandas do Fluxo de Tráfego**

A tarefa fundamental de uma TFT o objetivo principal é estabelecer relações válidas entre as variáveis de interesse. Formulando da forma mais genérica, uma TFT deve estabelecer as relações básicas entre as variáveis de demanda, de oferta e de operação viária. As variáveis de demanda devem ser definidas para representar as diferentes solicitações a serem atendidas. As variáveis de operação ou serviço devem ser definidas, por sua vez, para expressar todos os aspectos relevantes da operação viária que interessam aos usuários da via ou aos demais agentes sociais afetados. Por fim, as



variáveis de oferta devem descrever as características essenciais do sistema viário e seu dimensionamento, incluindo seu desempenho potencial (através de variáveis chaves, como capacidade de tráfego, ou de uma curva de desempenho ao longo de todos os regimes possíveis de operação, para cada variável de serviço relevante).

Quando é estudado uma TFT em vias, levando em conta apenas os deslocamentos surgem os seguintes conceitos:

- a) Volume de Tráfego: É o número de veículos que passam por uma seção da via durante um período da investigação;
- b) O fluxo de Tráfego: É definido como a taxa de veículos que passam por uma seção da via durante um intervalo de tempo (veículos por hora, v/h).

As medidas usuais de demanda para a função deslocamento correspondem a demanda do tráfego de passagem em uma via e têm pouca relação com as atividades existentes no trecho de via considerado e somente usam o trecho porque a melhor rota existente para a viagem passa pelo trecho. Medidas de demanda para outras funções de tráfego também devem ser obtidas,

- Circulação: fluxos de entrada e saída nas vias estruturais;
- Acesso: volumes ou fluxos de estacionamento, de travessias de pedestres, de entrada e saída de veículos em edificações, de paradas em pontos de ônibus ou para embarque/desembarque
- Ambiente: o nível de ocupação das atividades residenciais, de comércio, de serviço, e etc.

e são definidas mais claramente como:

#### I – As Medidas de Operação para Funções de Tráfego:

- Circulação: distâncias ou tempos e risco de acidentes no acesso/egresso às vias estruturais;
- Acesso: distâncias ou tempos e risco de acidentes na busca por vagas de estacionamento ou nas travessias de pedestres;
- Ambiente: nível de ruído ou intimidação gerado pelo tráfego, qualidade do espaço local para liberdade de utilização.

#### II – Medidas Usuais de Oferta para a Função de Deslocamento em uma Seção:

- Capacidade de tráfego: geralmente medida como máximo fluxo de tráfego veicular escoado em uma seção da via (em v/h ou v/s);
- Velocidade de fluxo livre: geralmente medida em uma seção (pontual) como a máxima velocidade média praticada pelos usuários quando restritos apenas pela via, pode ser medida como velocidade global ou de percurso para um trecho de via, como velocidade média ou extrema, a velocidade limite da via pode ser menor que a velocidade de fluxo livre, em função de outras restrições (exemplo:

segurança); o controle de tráfego inclui a regulamentação da velocidade limite na via;

III – Medidas usuais de Oferta para outras funções da via:

- Capacidades para entrada e saída de veículos, estacionamento de veículos, travessia de pedestres;
- Tempos mínimos requeridos para manobras de entrada e saída, estacionamento, travessia de pedestres.

Para se estudar as demandas da TFT é necessário definir algumas variáveis que devem ser medidas para obter as demandas do tráfego de veículos.

## 2.3 A Variáveis do Fluxo de Tráfego

A TFT é geralmente apresentada na maioria dos livros textos sobre o assunto em regime contínuo, isto é, em rodovias e vias expressas, como estudado por B. D. Greenshields. Embora esse regime seja limitado, ele é utilizado para obter as relações básicas que permitirão uma análise inicial dos fenômenos de tráfego. O primeiro passo para construir a teoria é o estudo das relações entre fluxo de tráfego e a velocidade de percurso. Essas relações são expressas pela equação de continuidade do tráfego e tradicionalmente chamada de “*equação fundamental do tráfego*”. Esta última recebeu esse nome por ter sido uma das primeiras relações que permitiram completar uma teoria capaz de dar explicações relevantes sobre fenômenos de interesse.

A equações de continuidade do tráfego exprime uma relação entre os veículos que passam por uma seção da via e aqueles que ocupam o trecho anterior a tal seção. Em função do período de medição do fluxo de tráfego  $\phi$ , um trecho anterior maior contribuirá com veículos passando pela seção da via e a extensão deste trecho de contribuição é naturalmente função da velocidade dos veículos. Esta relação é facilmente estabelecida considerando uma corrente de tráfego estacionária (isto é, estável ao longo do tempo) e homogênea, onde os veículos têm todos a mesma velocidade  $v$  e, pode ser utilizada em situações mais gerais.

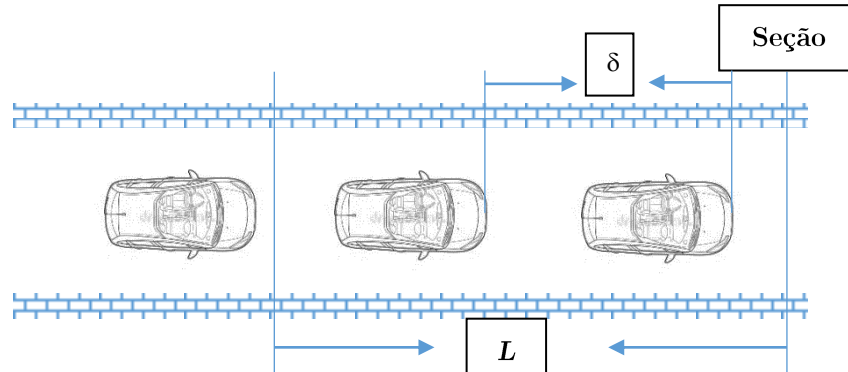
### 2.3.1 Equação Fundamental do Fluxo de Tráfego

Consideremos um elemento de via de extensão  $L$  anterior à seção transversal  $A$ , Figura 2.2, Na via existe um *fluxo em regime contínuo* (e estável) de  $N$  veículos passam pela seção  $A$  com velocidades iguais  $v$  em um intervalo de tempo  $\Delta t = L/v$ . O fluxo  $\phi$  de tráfego é expresso pelo número de veículos em uma determinada seção da via, em um intervalo de tempo. Então temos que,

$$\phi = \frac{N}{\Delta t} = \frac{N}{L/v} = \frac{N}{L}v = \rho v, \quad (2.1)$$

onde  $\phi$  é o fluxo,  $\rho = N/L$  é a densidade linear de tráfego e  $v$  é velocidade dos veículos. A equação (2.1) é a chamada “equação fundamental do tráfego” de veículos.

Figura 2: Via de veículos de comprimento  $L$  e seção  $A$ .



Fonte: autor.

Note que o número de veículos no trecho pode flutuar ao longo do tempo e, com isso, flutuando a densidade de tráfego de forma correspondente. Entretanto, ele não depende do intervalo usado para a medição: para cada intervalo de medição de tempo  $\Delta t$  haveria uma extensão de contribuição  $L$ , ao contrário do fluxo de tráfego  $\phi$ , que cresce com o intervalo de medição e solicita a contribuição de um trecho de extensão maior. Se o fluxo de tráfego é estacionário, mas não homogêneo, isto é, os veículos têm velocidades de percurso distintas, a validade da equação de continuidade (2.1) pode depender de uma “*velocidade média*” adequada ou de introdução de termos complementares.

### 2.3.2 As Velocidades do Fluxo de Veículos: Velocidade Média

Quando se estuda a TFT existem duas maneiras usuais de se medir a velocidade média dos veículos:

- a) a velocidade média temporal;
- b) a velocidade média espacial.

A velocidade média temporal é a média aritmética das velocidades individuais de todos os veículos que passam em uma dada seção da via  $A$  (Veja, Figura 2.2), ao longo de um período  $\Delta t$  (de tempo). Já a velocidade média espacial é a média aritmética das velocidades individuais de todos os veículos que distribuem ao longo de uma extensão  $L$  da via. De forma geral, a velocidade média espacial tende a ser menor que a velocidade média temporal porque os veículos lentos ficam mais tempo em um trecho de extensão qualquer e são, por isso, mais prováveis de serem amostrados no trecho em relação à sua participação no volume de tráfego. Na velocidade média temporal, a probabilidade de ser amostrado é igual à proporção no volume de tráfego dos veículos de cada faixa de velocidade.

Dois resultados gerais são conhecidos sobre a relação entre as velocidades média temporal e média espacial: a) a diferença entre as duas médias temporal  $\langle \rangle_t$  e espacial  $\langle \rangle_L$  é definida por,

$$\langle v \rangle_t - \langle v \rangle_L = \frac{\sigma^2}{\langle v \rangle_L} \quad (2.2)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância da velocidade espacial; b) Como o tempo em que o veículo permanece em um trecho de extensão qualquer é inversamente proporcional à sua velocidade individual, a velocidade média espacial pode ser medida observando os veículos que passam em uma seção ao longo do tempo utilizando uma média harmônica (com ponderação inversa),

$$\langle v \rangle_L = \frac{L}{\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^N \frac{L}{v_i}} \quad (2.3)$$

onde os tempos  $t_i = L/v_i$ .

As velocidades médias temporal e espacial são diferentes (exceto quando a corrente de tráfego é homogênea e ambas são iguais à velocidade comum). No entanto na TFT, adotando-se a velocidade média definida pela velocidade média espacial, mesmo com tráfego seja heterogêneo. Nestas condições na equação fundamental (2.1) a velocidade é a velocidade média espacial.

Outra observação importante na equação fundamental é que a densidade do tráfego de veículos  $\rho$  é também um valor médio para um período de fluxo, mas neste caso é uma simples média aritmética. Além disso, ela é o inverso do espaçamento médio entre veículos  $\rho = 1/\langle \delta \rangle$  (da mesma forma que o fluxo de tráfego é o inverso do intervalo médio entre veículos  $\phi = 1/\langle \Delta t \rangle$ ). Note que o espaçamento entre veículos inclui o veículo em si, ao contrário da distância entre veículos. Também vale notar que o intervalo entre veículos  $\Delta t$  inclui a passagem dos veículos, ao contrário da brecha entre veículos. Deve-se também observar que a equação de continuidade de tráfego pode ser aplicada para cada

faixa de tráfego ou, como é mais comum, para toda a via, com todas as faixas medidas coletivamente.

### 2.3.3 Regime Transitório

Em regime transitório, em que as condições de tráfego estão variando, a equação fundamental (2.1) é estabelecida por *Equações de Diferenças Finitas* (EDF) que inclui no fluxo líquido, fluxos adjacentes de entrada e saída de trechos elementares. Portanto pode-se incorporar um esquema numérico de simulação do tráfego em que a densidade é atualizada iterativamente. Admitindo um esquema simplificado, os fluxos mostrados na equação seriam determinados pelas densidades nos períodos anteriores (e assim recursivamente). Nessa simulação macroscópica, em que o tráfego é representado como fluxo (não veículo a veículo, como na simulação microscópica), a via seria dividida em trechos elementares e o período dividido em intervalos elementares, de maneira a calcular a evolução do tráfego de forma detalhada. Sua validade é comprovada tanto média de percurso como para médias globais e não é suficiente para determinar as condições de operação porque a relação é intermediada por variáveis de serviço adicional.

Uma situação interessante e esclarecedora é a relacionada com a implantação de redutores de velocidade. Normalmente, estes dispositivos não criam gargalos de capacidade no sistema viário (por isso não geram filas cumulativas). Portanto, o mesmo fluxo de tráfego está sendo escoado antes do redutor, na seção do redutor e após o redutor. A redução de velocidade tem, então, de ser compensada pelo aumento da densidade do tráfego. Quanto menor a velocidade praticada junto ao redutor, maior terá de ser a densidade de tráfego. Naturalmente, há situações em que o redutor de tráfego pode criar gargalos de capacidade (o que é indesejável).

Na verdade, a equação fundamental do tráfego corresponde à representação macroscópica do comportamento do tráfego. Mesmo atualmente, coexistem diversas representações destas relações de comportamento que adotam formas mais detalhadas, microscópicas (isto é, representando os veículos individuais como as representações baseadas nas teorias de carro-seguidor) ou mesoscópicas (distinguindo grupos de manobras ou veículos na corrente de tráfego).

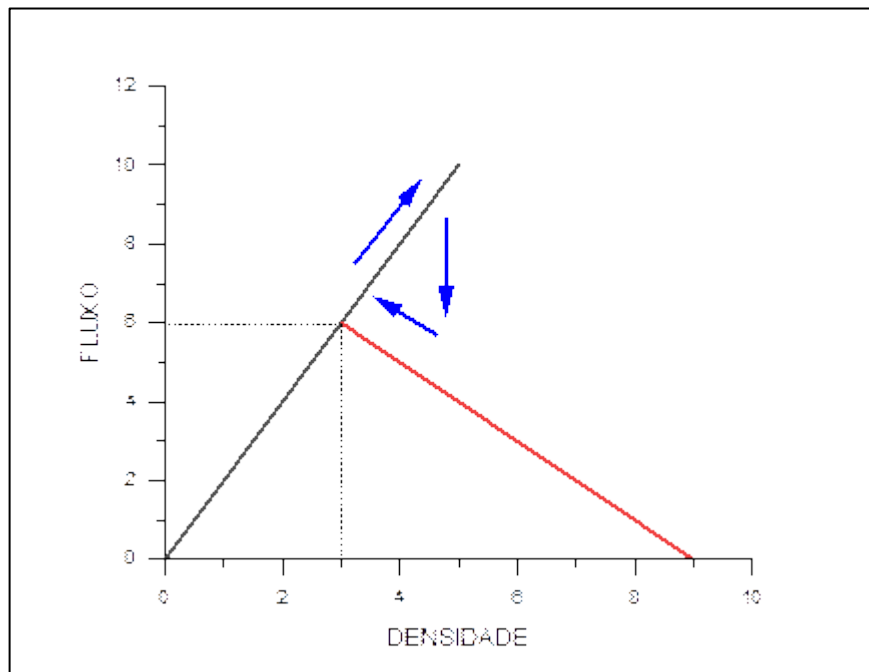
### 2.3.4 Diagrama Fundamental do Fluxo de Tráfego

Como discutido nas seções (2.3.2) e (2.3.3), o fluxo de tráfego e a densidade podem variar com o tempo e o local de observação. A curva que relaciona o fluxo com a densidade é conhecida também como *diagrama fundamental do fluxo de tráfego*, esse diagrama é o mais utilizado devido à sua forte ligação com o nível de saturação da via. Listamos abaixo algumas características que devem existir entre o fluxo e a densidade:

- Para uma densidade nula, o fluxo deve também nulo;
- Um aumento no fluxo de veículos na via, faz aumentar a densidade;
- Deve existir um limite máximo para a densidade de tráfego a partir do qual a velocidade do tráfego é nula (ou fluxo nulo);
- Existe um valor de densidade no intervalo entre 0 (zero) e a densidade máxima, onde o fluxo é máximo.

Um diagrama típico do fluxo de tráfego é ilustrado pela Figura 2.3, onde a abscissa representa a densidade média e ordenada o fluxo médio de tráfego em uma via. Dele podemos tirar algumas informações importantes:

Figura 3: Representação de um Diagrama Fundamental de Fluxo de Tráfego.



Fonte: Esquema do autor.

- No diagrama a região de baixa densidade é chamada de *fluxo livre*, nela os motoristas podem andar na velocidade desejada no limite permitido pela via. Nessa região o diagrama é estritamente crescente de (0) a (3).
- Na região entre (3) e (5) o fluxo é definido pela densidade. Nela a configuração do tráfego influencia diretamente no seu fluxo, pode gerar um fluxo livre ou congestionado. Esta região é denominada região de *metaestabilidade*.
- Na região de alta densidade, maior que (5), o fluxo diminui a medida que a densidade aumenta. Nessa região, a grande concentração de veículos faz com que estes se juntem em engarrafamentos e um veículo que deixa o engarrafamento encontra outro veículo logo a sua frente. Este tipo de tráfego é caracterizado pelo comportamento *pára e anda*.

A região de metaestabilidade entre, ou de média densidade, é caracterizada por um efeito de histerese do tráfego. Numa primeira fase ( $\nearrow$ ) os motoristas conseguem

manter suas velocidades com densidades maiores que (3). Esse comportamento é mantido até uma densidade menor que (5), quando uma distância entre os veículos deixa de ser suficiente para seu deslocamento. A partir desse instante, quando um motorista desacelera, faz com que os veículos que o seguem desacelerem também gerando instantaneamente um engarrafamento ( $\downarrow$ ). Por outro lado, no sentido ( $\nearrow$ ) da Figura 2.3, se o fluxo caminha de engarrafado para livre ou seja, a densidade diminui, o fluxo aumenta linearmente até que se torne um fluxo livre em (3). Este efeito ocorre pelo fato, de que o fluxo de saída de um engarrafamento é baixo em relação ao de entrada.

## 2.4 Níveis de Serviço

A densidade reflete a qualidade do fluxo de tráfego nas vias. Quanto menor a densidade (ou maior o espaçamento entre veículos), maior o conforto no deslocamento, a facilidade de mudança de faixa e a escolha da velocidade. Essas condições de intensidade do tráfego podem ser associadas de forma qualitativa e quantitativa à *níveis de serviço*. Uma escala de nível de serviço para o tráfego contínuo mais conhecida e aplicada mundialmente é a do *Highway Capacity Manual* – HCM, publicado pelo *Transportation Research Board* – TRB (EUA). A classificação do HCM também segue uma divisão de A até F, cuja separação é determinada pela densidade, usando como unidade pc/mil/ln (passenger car/mile/lane). A Tabela 2.1., traz os valores constantes na versão 2010 do HCM, adaptados para a unidade cp/km/fx (carro de passeio por quilômetro por faixa).

Tabela 1: A classificação dos níveis de serviço aplicada mundialmente.

Níveis de Servio	Densidade (CP/km/fx)
A	Até 17,7
B	>17,7-20,1
C	>20,1-41,8
D	>41,8-56,3
E	>56,3-72,4
F	>72,4
Demanda excede a capacidade	

Fonte: Highway Capacity Manual (HCM).

A descrição a seguir traz os níveis de serviços classificados de forma qualitativa:

**NÍVEL A:** descreve a condição de fluxo livre com baixos volumes e altas velocidades. A densidade de trânsito é baixa. Existe pouca ou nenhuma restrição à liberdade de manobra devido à presença de outros veículos e os motoristas podem manter a velocidade desejada com pequeno ou nenhum retardamento;

**NÍVEL B:** constitui a zona de fluxo estável, com velocidades de operação começando a sofrer restrição devido à presença de outros veículos. Os motoristas ainda têm razoável liberdade na escolha da sua velocidade e faixa de trânsito para operação. Reduções de velocidade são razoáveis, com baixa probabilidade do fluxo se tornar restrito. O limite inferior (mais baixa velocidade e mais alto volume) deste nível tem sido associado a volumes de serviço empregados no projeto de rodovias rurais;

**NÍVEL C:** constitui ainda faixa de fluxo estável. Muitos dos motoristas, no entanto, sofrem restrições na liberdade de escolha de sua própria velocidade, mudança de faixa ou ultrapassagem. Uma velocidade de operação relativamente satisfatória ainda pode ser obtida. São os volumes de serviço desejáveis no projeto de vias urbanas;

**NÍVEL D:** aproxima-se do fluxo instável, com velocidade de operação toleráveis, embora consideravelmente afetadas pela mudança na condição operacional. Flutuações no volume e temporárias restrições ao fluxo podem causar substanciais quedas na velocidade de operação. Os motoristas têm pouca liberdade de manobra e o conforto e a convivência são sofríveis, mas essas condições podem ser toleradas por curto período de tempo;

**NÍVEL E:** não pode ser descrito apenas pela velocidade. Porém apresenta velocidades de operação ainda inferiores àsquelas do nível D, com volumes próximos ou iguais à capacidade da rodovia. Ao atingir a capacidade, as velocidades são tipicamente de 48 km/h, embora nem sempre. O fluxo é sensível e podem ocorrer paradas com duração de alguns instantes;

**NÍVEL F:** descreve a operação em fluxo forçado e onde os volumes são inferiores à capacidade. Essas condições usualmente resultam em filas de veículos que se formam devido à restrição a jusante. O trecho em estudo serve como área de armazenamento durante uma fração ou toda a hora de pico. As velocidades são reduzidas substancialmente e as paradas podem ocorrer por períodos de tempo curtos ou longos devido ao congestionamento a jusante. Em um caso extremo, tanto a velocidade como o volume podem cair a zero.



## 2. OS MODELOS CAR-FOLLOWING

Na abordagem microscópica, o tráfego de veículos e suas respectivas interações são consideradas como partículas de massa igual a um e, destaca-se entre eles o modelo car-following. A idéia central desse modelo, é descrever a aceleração e/ou desaceleração do *i-ésimo* veículo como resposta ao um conjunto de estímulos, que determinam a performance e a diferença entre os vários modelos. Esses estímulos podem ser a sensibilidade do condutor, a velocidade/distância relativa, etc.

Nesse capítulo, discutiremos os diferentes modelos *car-following* construídos a partir dos modelos microscópicos.

### 3.1 Modelos Macroscópicos e Microscópicos

A descrição das condições de tráfego é essencial para acompanhar o desenvolvimento operacional de uma ou mais vias nas grandes cidades. Nesse sentido existem várias abordagens para descrever o fluxo de tráfego de veículos. Do ponto de vista teórico ou computacional, são três as abordagens básicas da análise de tráfego: a *macroscópica*, *microscópica* e *mesoscópica*. Na abordagem macroscópica a dinâmica do fluxo de veículos é construída por modelos hidrodinâmicos de fluidos, assumindo a existência de um fluxo contínuo de veículos e as leis da conservação massa e do momento linear, de fundamental importância no contexto macroscópico. Esses modelos descrevem a relação do desenvolvimento das variáveis fundamentais, a densidade, a velocidade e o fluxo. Neles as equações que descrevem a dinâmica são do tipo Navier-Stokes e descreve uma grande variedade de fluxos de tráfegos com respostas linear e/ou não linear, para diferentes tipos de viscosidades. Os modelos mais conhecidos são os modelos de Payne-Whitham, de Zang e o de Aw Rascle (ANDRÉ, 2000).

Na abordagem mesoscópica (ou cinética), a identificação da posição e da velocidade dos veículos é feita por uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerada como uma variável aleatória (ANDRÉ, 2000). A dinâmica desses modelos é construída a partir das equações integro-diferenciais similares as equações de Boltzmann. A solução desses problemas de tráfego é feita por métodos de simulação computacional tipo Monte Carlo (MC) e descreve uma grande variedade de problemas importantes, como congestionamento e estabilidade do tráfego.

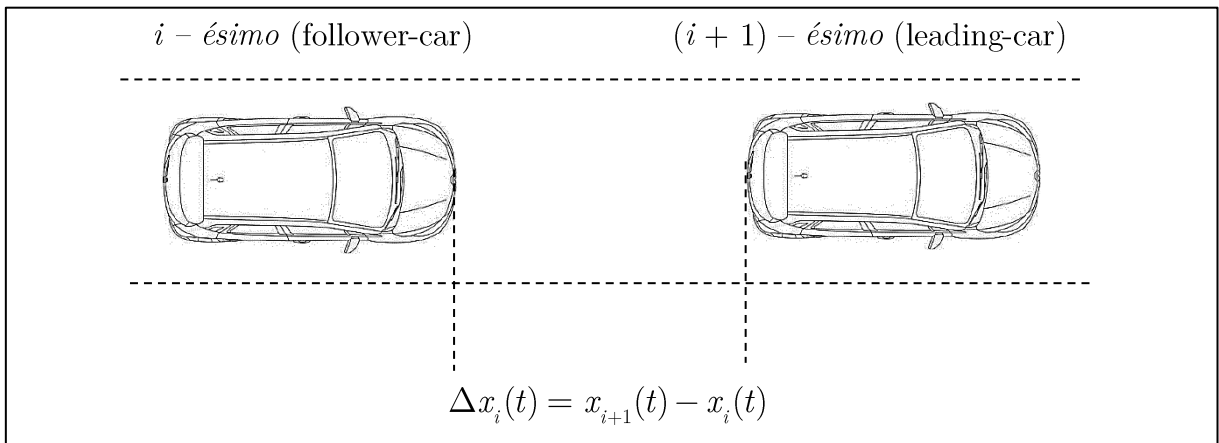
Na abordagem microscópica os veículos e suas interações são analisados de forma individual, como se fossem partículas de massa unitária. É analisado mais precisamente a aceleração do veículo, sua velocidade, posição e distância, o restante dos veículos são as variáveis usadas para caracterizar estes modelos que, de um modo são representados por sistemas de equações diferenciais ordinárias com ou sem retardo, construídas a partir da dinâmica newtoniana. Nessa abordagem, existem vários modelos, provavelmente o mais famoso entre esses modelos é o “*Car-following*”, baseia-se na ideia de

que cada condutor responde (ou reage) a uma forma específica de estímulo, traduzido na forma de aceleração ou desaceleração. Estes estímulos tratam de distância ou velocidade relativa entre veículos ainda em grande discussão em publicações atuais. A solução das equações desse modelo permite uma razoável descrição numérica das condições de fluxo de tráfego (JIANG *et al.*, 2001).

### 3.2 O Modelo Car-Following: Uma ideia Inicial

O modelo “*car-following*” (ou modelo carro seguidor) é construído a partir da relação entre o estímulo e a resposta do condutor que controla o veículo que o precede. Nele é descrito a relação entre a variação da velocidade de um veículo, chamado *following-car* (carro seguidor), em resposta ao estímulo que recebe de um veículo que o precede, designado por *leading-car* (carro líder). De um modo geral, considera-se resposta proporcional ao estímulo como discutido por Li *et al.* (LI e SUN, 2012). Na figura 3.1, é ilustra uma pequena amostra de dois veículos consecutivos deslocando-se sobre um eixo  $ox$  num determinado instante  $t$  em que  $(i+1)$ -ésimo veículo é o *leading-car* e  $i$ -ésimo veículo é o *following-car*. O condutor do carro de traz acelera (ou desaceleração em função do estímulo que recebe do veículo da frente).

Figura 4: Modelo “Following-Car”.



Fonte: o autor.

Atualmente existem várias propostas de modelos “*car-following*” para descrever o comportamento de veículos em vias com determinadas demandas. Os modelos diferenciam de acordo com os estímulos incorporados. De um modo geral, estes estímulos incluem: a velocidade do veículo, a aceleração do veículo, distância relativa entre veículos (também conhecida como *headway*), a velocidade relativa, a sensibilidade do condutor e o número de veículos na via. A função resposta do modelo é a aceleração do veículo. Em todos os modelos, considera-se que os veículos se movem numa linha reta e não há ultrapassagens. O tráfego é anisotrópico, ou seja, os condutores apenas reagem as variações do comportamento que recebem do veículo que o precede.

Na construção de um modelo “car-following” deve-se definir as seguintes variáveis fundamentais em estudo:

- a) Os veículos devem ser ordenados de tal modo que o *following-car* segue o *leading-car*;
- b) As funções  $x_i(t + \tau)$  e  $v_i(t + \tau)$  são respectivamente posição e a velocidade do  $i$ -ésimo veículo no instante  $t + \tau$ , onde  $\tau$  é o tempo de atraso (ou de reação) de um condutor e representa o tempo médio que um condutor leva para reagir ao um determinado estímulo.
- c)  $a_i(t + \tau)$  é a aceleração *following-car* no instante  $t + \tau$ .
- d)  $b_i = x_{i+1}(t) - x_i(t) = \Delta x_i$  é a distância entre veículos, chamada de *headway*.

### 3.3 O Modelo GM

O primeiro modelo *car-following* foi proposto por Grazis *et al.*, em 1959 no laboratório de investigação da General Motors (GM) em Detroit e ficou conhecido como “modelo clássico”. Ele se baseou nas propostas de “follow-the-leader” de Pipers (1953) e Chandler (1958) (GRAZIS, 1959). Este modelo serviu de base para a família dos modelos GM construídos com base em dois princípios:

- a) Quanto maior é a velocidade dos veículos na via, maior será a distância relativa entre os veículos;
- b) Para evitar colisão, o condutor deve manter uma distância de segurança em relação ao veículo da frente.

A construção da dinâmica de veículos do modelo “car-following” é feita a partir do formalismo newtoniano, em a aceleração é dada por,

$$a_i(t) = \frac{v_{i+1}(t) - v_i(t)}{\tau} \quad (4-1)$$

onde  $a_i(t)$  é a aceleração e  $v_{i+1}(t) - v_i(t)$  é a velocidade relativa entre veículos,  $\tau$  é o tempo de atraso (ou de reação) e massa igual a um ( $m = 1$ ). A equação (4-1) assume que existe correlação entre o condutor (aceleração ou desaceleração) e a velocidade relativa entre os veículos *following-car* e *leader-car*. Baseado neste modelo desenvolveu-se os modelos GM.

Chandler *et al.*, foi o primeiro a propor um modelo linear baseado no conceito de estímulo resposta. Ele considerou que a resposta ao estímulo do veículo que o precede tem um tempo de atraso  $\tau$ . Neste modelo o único estímulo é a relação e  $\lambda$  é o fator de proporcionalidade. Além disso, cada veículo tende a mover-se a uma velocidade igual ao do veículo que o precede e pode ser descrito pela equação,

$$a_i(t + \tau) = \lambda [v_{i+1}(t) - v_i(t)] \quad (4-2)$$

em que,

$$\lambda = \begin{cases} a : \Delta x_i(t) < x_c \\ b : \Delta x_i(t) \geq x_c \end{cases} \quad (4-3)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro de sensibilidade constante obtidas experimentalmente através uma análise gráfica da sensibilidade de vários condutores,  $a$ ,  $b$ ,  $x_c$  são constantes definidas nos trabalhos de HERMAN e POTTS em 1961.

O modelo descrito pelas equações (4.2)–(4.3) assume que a taxa de aceleração (ou desaceleração) é uma função do parâmetro de sensibilidade e estímulo. O estímulo presente no modelo é a velocidade relativa do *leading-car*. Apesar da elegância do modelo contém muitas limitações. Quando a velocidade do *following-car* e o *leading-car* forem iguais, a resposta da aceleração (ou desaceleração) do modelo é zero, independente da distância entre os veículos ou da densidade de tráfego. Assim, não consegue prever a distinção entre cenários cuja velocidade relativa é a mesma para os veículos nas distâncias relativas diferentes. O modelo prevê as mesmas acelerações nos dois cenários, o que não é esperado na prática.

Após identificar as falhas no modelo linear, surgiram vários outros modelos. GRAZIS *et al.* (1959) propôs o primeiro modelo não linear, em colaboração com colaboradores do laboratório da General Motors (GM) incluindo o *headway* dos veículos de forma explícita no denominador. Apesar de resolver a questão da distância, o modelo não consegue prever a distinção de cenários de velocidade relativas iguais e mesmo *headway*. Na prática, o condutor do *following-car* no cenário em que a velocidade relativa é a mesma, mas velocidades dos veículos maiores, a pressão para se manter a uma distância segura de forma a poder desacelerar/travar para evitar colisão é maior. Então, é de se esperar que, nesse cenário, a resposta seja superior, o que não acontece. Resumindo, o modelo não consegue diferenciar cenários de altas e baixas velocidades, mas cujo *headway* é o mesmo.

A modificação do modelo de Grazis foi feita por Edie *et al.*, em 1961, considerando que a velocidade do próprio veículo também influencia o comportamento do condutor, e deveria incluir a multiplicação coeficiente de sensibilidade pela velocidade do próprio veículo. De acordo com esse modelo, dois veículos podem ficar arbitrariamente perto, viajando a mesma velocidade, o que certamente não se verifica na prática diária como EDIE (1961) mostrou.

Na tentativa de corrigir as falhas anteriores, generalizou-se o modelo GM da seguinte forma:

$$a_i(t + \tau) = \lambda \frac{[v_i(t + \tau)]^m}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^\ell} [v_{i+1}(t) - v_i(t)] \quad (4-4)$$

onde a equação acima é conhecida equação de *Grazis-Helman-Rothery* (GHR) para o modelo GM não linear. A constante  $\lambda$  é o fator de sensibilidade e,  $m$  e  $\ell$  são constantes para cada tipo de influência que se deseja estudar (Tabela 3.1). Uma das vantagens do modelo GM, é de se permitir estabelecer uma relação com os resultados macroscópicos através dos parâmetros: fluxo de velocidade e densidade.

Na tabela 3.1, abaixo se encontram alguns valores de  $m$  e  $\ell$  mais utilizados.

Tabela 3.1: Valores das constantes  $m$  e  $\ell$  para alguns parâmetros estimados da equação GHR.

Fonte Bibliográfica	$m$	$\ell$	Abordagem
Chandler et al. (1958)	0	0	Microscópica
Crazis, Helman e Potts (1959)	0	1	Microscópica
Herman, Potts (1959)	0	1	Microscópica
Helly (1959)	1	1	Microscópica
Grazis et al. (1961)	0-2	1-2	Microscópica
May e Keller (1967)	0.8	2.8	Microscópica
Heyes e Ashworth (1972)	1,5/0,2/0,6	0,9/0,9/0,3	Microscópica

Fonte: (BRACSTONE e McDONALD, 1999).

### 3.3.1 Vantagens e Algumas Limitações do Modelo GM

O modelo GM possui várias lacunas que foram resolvidas ao longo de várias publicações científicas. Contudo, apesar das melhorias, o modelo ainda contém algumas falhas que inviabilizam a tradução real do que acontece com o tráfego de veículos. Entre elas, podemos citar:

- O following-car reage a qualquer variação, por menores que sejam da velocidade relativa do leadin-car (OLSTAM et al., 2004).
- O following-car é afetado pelo seu leading-car mesmo que a distância entre eles seja significativa. Este efeito impossibilita o following-car de aumentar a sua velocidade a fim de atingir a velocidade desejada.
- Não foi demonstrado se existe uma conexão entre o comportamento do condutor e os parâmetros  $\lambda$ ,  $m$  e  $\ell$  propostos.

Uma das vantagens do modelo GM, é de se permitir estabelecer uma relação com os resultados macroscópicos através dos parâmetros: fluxo de velocidade e densidade. A partir do modelo (4-3) é possível obter modelos macroscópicos com a mudança dos parâmetros  $m$  e  $\ell$  devido sua simplicidade.

Nas seções seguintes, obteremos alguns modelos macroscópicos da literatura usando o modelo GM generalizado.

## 3.4 Alguns Resultados obtidos do Modelo GM

### 3.4.1 O Modelo de Chandler

O modelo do fluxo de tráfego propostos por *Chandler et al.* (CHANDLER, 1958) é obtido admitindo  $m = 0$  e  $\ell = 0$  na equação (4-4),

$$a_i(t + \tau) = \lambda[v_{i+1}(t) - v_i(t)]. \quad (4-4)$$

Deve-se observar que no equilíbrio estacionário, ou de fluxo isotrópico, todos os veículos percorrem via com o mesmo *headway* ( $\Delta x_i = \text{cte}$ ) e circulam com a mesma velocidade  $v$  para que não exista colisão. Portanto, temos por definição uma densidade  $\rho = 1/\Delta x_i$

Integrando a equação (4-4) em relação ao tempo, teremos:

$$\begin{aligned} v_i(t + \tau) &= \lambda[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + C' = \lambda\Delta x_i + C' \\ &= \frac{\lambda}{\rho} + C' \end{aligned} \quad (4-5)$$

onde  $C'$  é uma constante de integração a ser determinada pelas condições de tráfego. Na condição de densidade máxima veículos na via,  $\rho = \rho_m$ , os condutores devem parar seus veículos,  $v = 0$ , e portanto,  $C' = -\lambda/\rho_m$ . Assim a velocidade terá a forma,

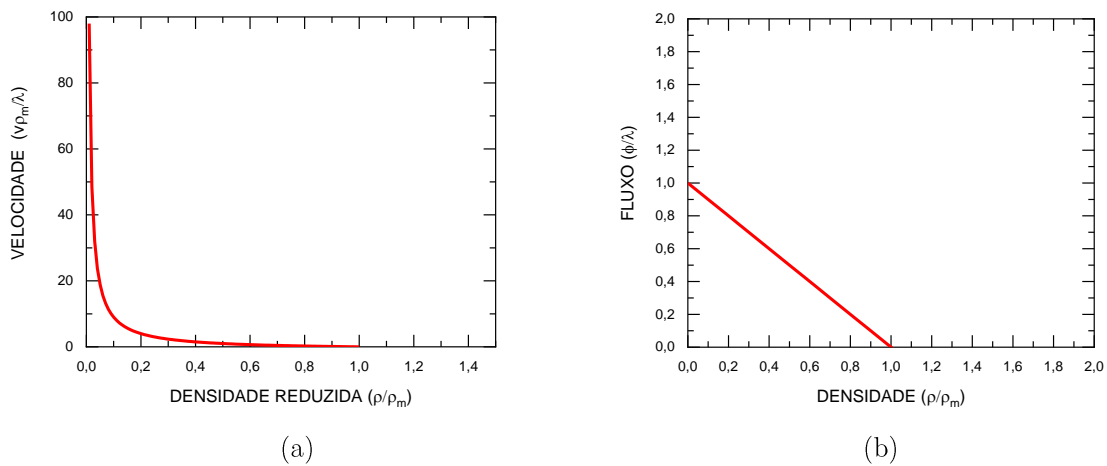
$$v = \lambda \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{\lambda}{\rho} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right), \quad (4-6)$$

e o fluxo,

$$\phi = \rho v = \lambda \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) \quad (4-7)$$

A partir da equação (4-7) pode-se observar que quando  $\rho = 0$  o fluxo deve atingir o valor  $\phi_m = \lambda$ , uma constante  $\lambda = 1\text{s}^{-1}$ . Isso contradiz a idéia de fluxo de tráfego, para uma densidade nula não deve existir fluxo na via, portanto, essa informação não é realista nesse modelo “macroscópico”. A figura 3.2 (a) e (b) mostram os gráficos do fluxo  $\phi/\lambda$  e da velocidade  $v\rho_m/\lambda$  em unidades reduzidas.

Figura 5: O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do Modelo de Chandler.



Fonte: Autor.

### 3.4.2 O Modelo de Greenshields

Para o modelo de *Greenshields* (GREENSHIELDS, 0000) é adotado os valores  $m = 0$  e  $\ell = 2$  na equação (4-4),

$$a_i(t + \tau) = \lambda \frac{v_{i+1}(t) - v_i(t)}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^2}. \quad (4-5)$$

Integrando a equação (4-5) em (4-5) em relação a variável  $x$  obtém-se,

$$\begin{aligned} v_i(t + \tau) &= -\lambda \frac{1}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} + C' \\ &= -\lambda \frac{1}{\Delta x_i(t)} + C' \end{aligned} \quad (4-5)$$

onde  $C'$  é uma constante de interação que pode ser determinada pelas condições de equilíbrio do tráfego. A densidade  $\rho = 1/\Delta x_i$  (fluxo homogêneo) a equação (4-5) se reduz a seguinte expressão:

$$v_i(t + \tau) = -\lambda \rho + C'. \quad (4-6)$$

Na condição  $\rho = 0$ ,  $v_i = v_f$  e obtemos  $C' = v_f$ . No caso em que  $\rho = \rho_m$ , a velocidade dos veículos deve ser nula, ou seja,  $-\lambda \rho + v_f = 0 \rightarrow \lambda \rho_m = v_f$ , de onde obtemos que:

$$v_i(t + \tau) = v_f - \frac{v_f}{\rho_m} \rho = v_f \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right). \quad (4-7)$$

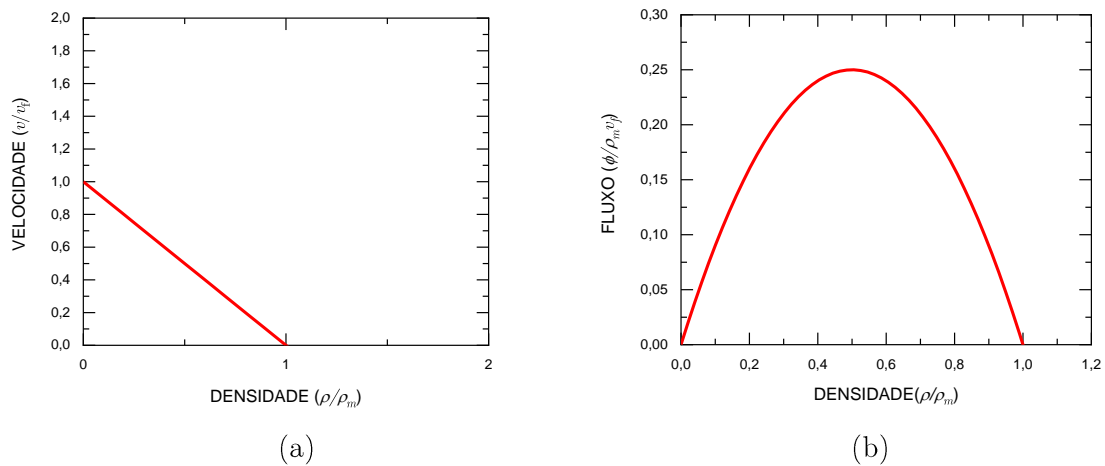
e o fluxo,

$$\phi = \rho v = \rho v_f \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right). \quad (4-8)$$

As relações (4-7) e (4-8) são as relações obtidas por *Greenshields* de forma aproximada para lidar com resultados experimentais. A velocidade  $v_f$  foi chamada de velocidade de fluxo livre (ou máxima velocidade de acordo com os limites da via) e  $\rho_m$  a densidade máxima de veículos na via (número de veículos/comprimento da via). As figuras 3.3(a) e 3.3(b) são os gráficos representativos da velocidade  $v/v_f$  e do fluxo  $\phi/\lambda \rho_m$  de veículos em unidades reduzidas em função da densidade reduzida  $\rho/\rho_m$ . Na figura 3.3(a) podemos verificar que quando a densidade se aproxima de zero, a velocidade dos veículos aproxima-se da velocidade de fluxo livre (via não congestionada). Por outro

lado, quando a densidade se aproxima da densidade máxima, a velocidade dos veículos tende a zero (via congestionada).

Figura 6: O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do modelo de Greenshiels.



Fonte: Autor.

Na Figura 3.3(b) é o gráfico representativo do fluxo em unidades reduzidas. Podemos observar que, quando a densidade se aproxima de zero, o fluxo também se aproxima de zero indicando que não há muitos veículos na via. Por outro lado, quando a via está congestionada (densidade máxima) o fluxo torna-se zero também, já que os veículos não se movem. Além disso, como estamos lidando com função quadrática com o termo de segunda ordem negativo a concavidade é para baixo. Portanto, a partir da origem o fluxo aumenta à medida que a densidade aumenta até atingir um máximo em  $\frac{1}{2} \rho/\rho_m$  e a partir desse ponto, à medida que a densidade aumenta o fluxo, tende para um valor nulo em que os veículos vão parando. Apesar da qualidade e da simplicidade do *modelo de Greenshields*, existem algumas limitações. Por exemplo, na previsibilidade dos resultados de máxima densidade, se comparado com dados experimentais.

### 2.4.3 O Modelo de Greenberg

Para o modelo de *Greenberg* (GREENBERG, 0000) é adotado os valores  $m = 0$  e  $\ell = 1$  na equação (4-4),

$$a_i(t + \tau) = \lambda \frac{v_{i+1}(t) - v_i(t)}{x_{i+1}(t) - x_i(t)}. \quad (4-9)$$

Integrando a equação (4-5) em (4-9) em relação a variável  $x$  obtém-se,



$$\begin{aligned}
v_i(t + \tau) &= \lambda \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + C' = \lambda \ln[\Delta x_i(t)] + C' \\
&= \lambda \ln \frac{1}{\rho} + C'
\end{aligned} \tag{4-5}$$

onde  $C'$  é uma constante de interação que pode ser determinada pelas condições de equilíbrio do tráfego. Observamos novamente que  $\rho = 1/\Delta x_i$  (fluxo homogêneo). Considerando  $v = 0$  em  $\rho = \rho_m$  obtemos a constante de integração  $C' = \lambda \ln \rho_m$  e podemos expressar a velocidade na forma,

$$\begin{aligned}
v_i(t + \tau) &= \lambda \ln \frac{1}{\rho} + \lambda \ln \rho_m = \lambda[-\ln \rho + \ln \rho_m] \\
&= \lambda \ln \frac{\rho_m}{\rho}
\end{aligned} \tag{4-10}$$

e o fluxo,

$$\phi = \rho v = \rho \lambda \ln \frac{\rho_m}{\rho}. \tag{4-11}$$

Para determinar o valor de  $\lambda \neq 0$  e relacionar o fluxo com velocidade dos veículos pode-se usar a condição da derivada do fluxo ser nula ( $\phi' = d\phi/d\rho = 0$ ) no intervalo entre a densidade nula e a densidade máxima.

Derivando (4-11) em relação a densidade,

$$\begin{aligned}
\phi' &= \frac{d\phi}{d\rho} \\
&= \lambda \frac{d}{d\rho} \rho [\ln \rho_m - \ln \rho] = \lambda [\ln \rho_m - \ln \rho] - \lambda \rho \frac{1}{\rho} \\
&= \lambda \ln \frac{\rho_m}{\rho} - \lambda = \lambda \left[ \ln \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right] = \lambda \left[ \ln \frac{\rho_m}{\rho} - \ln e \right] \\
&= \lambda \ln \frac{\rho_m}{\rho e}
\end{aligned} \tag{4-12}$$

onde  $e$  é o número neperiano. Usando a condição  $\phi' = 0$ , determinamos,

$$\ln \frac{\rho_m}{\tilde{\rho} e} = 0 \rightarrow \tilde{\rho} = \frac{\rho_m}{e}. \tag{4-13}$$

o ponto crítico  $\tilde{\rho}$  (ou o ponto de máximo do fluxo). Definindo  $v_f$  como velocidade a velocidade de fluxo máximo, logo  $\phi_m = v_f \tilde{\rho} = v_f \rho_m / e$ . Substituindo  $v_f$  e  $\tilde{\rho}$  na equação (4-10) obtém-se,

$$v_f = \lambda \ln \frac{\rho_m}{\tilde{\rho}} = \lambda \ln \frac{\rho_m}{\rho_m/e} = \lambda \ln e = \lambda, \quad (4-14)$$

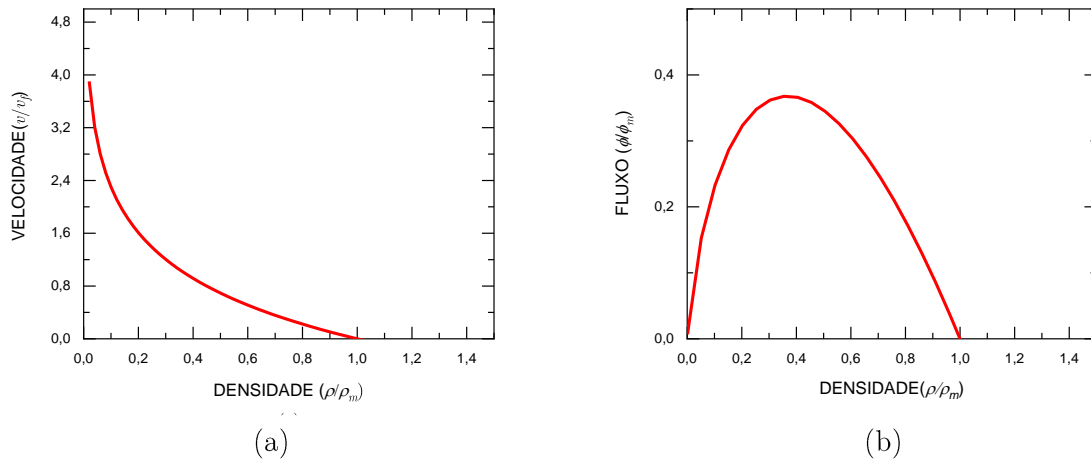
e conseqüente as expressões para velocidade e o fluxo,

$$v_i(t + \tau) = v_f \ln \frac{\rho_m}{\rho}. \quad (4-15)$$

$$\phi = \rho v = \rho v_f \ln \frac{\rho_m}{\rho}. \quad (4-16)$$

As equações (4-15) e (4-16) são exatamente as equações obtidas por Greenberg para o modelo de fluxo de tráfego. As figuras 3.3(a) e 3.3(b) são os gráficos representativos da velocidade  $v/v_f$  e do fluxo  $\phi/\rho_m v_f = \phi/\phi_m$  de veículos em unidades reduzidas, em função da densidade reduzida  $\rho/\rho_m$ . Na figura 3.4(a) podemos verificar que quando a densidade se aproxima de zero, a velocidade dos veículos aproxima-se da velocidade de fluxo livre (via não congestionada) que é uma divergência. Por outro lado, quando a densidade se aproxima da densidade máxima, a velocidade dos veículos tende a zero (via congestionada) que é um bom resultado.

Figura 7: O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do Modelo de Greenberg.



Fonte: Autor.

Na Figura 3.4(b) é o gráfico representativo do fluxo em unidades reduzidas. Podemos observar que, o fluxo anula nas condições de fluxo livre (densidade nula) e na condição de congestionamento (densidade máxima). Além disso, sua convexidade para baixo nos dá um máximo em  $\tilde{\rho}/\rho_m = e^{-1}$ . Portanto, a partir da origem o fluxo aumenta à medida que a densidade aumenta até atingir um máximo e a partir desse ponto, à medida que a densidade aumenta o fluxo, tende para um valor nulo em que os

veículos vão parando. Apesar da qualidade e da simplicidade do *modelo de Greenshields*, existem algumas limitações também. Vários autores mostram que este modelo existe uma forte correlação com os dados obtidos no Túnel Lincoln nos EUA apesar de não ser adequado para baixas densidades devido a divergência da função velocidade.

### 3.4.4 O Modelo de Underwood

Para o modelo de *Underwood* (UNDERWOOD, 0000) é adotado os valores  $m = 1$  e  $\ell = 2$  na equação (4-4),

$$a_i(t + \tau) = \lambda \frac{v_{i+1}(t)[v_{i+1}(t) - v_i(t)]}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^2}. \quad (4-17)$$

onde pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{a_i(t + \tau)}{v_i(t + \tau)} &= \frac{\frac{d}{dt} v_i(t + \tau)}{v_i(t + \tau)} = \frac{d}{dt} \ln[v_i(t + \tau)] \\ &= \lambda \frac{\frac{d}{dt} [x_{i+1}(t) - x_i(t)]}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^2}, \end{aligned} \quad (4-18)$$

$$d \ln[v_i(t + \tau)] = \lambda \frac{d[x_{i+1}(t) - x_i(t)]}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^2} \quad (4-19)$$

Integrando a equação (4-19) em relação a variável  $x$  e usando  $\rho = 1/\Delta x_i$  (fluxo homogêneo) obtém-se a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \ln[v_i(t + \tau)] &= -\lambda \frac{1}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} + C' \\ &= -\lambda \rho + C' \end{aligned} \quad (4-20)$$

a velocidade na forma,

$$\begin{aligned} v_i(t + \tau) &= \exp[-\lambda \rho + C'] = \exp[C'] \exp[-\lambda \rho] \\ &= C \exp[-\lambda \rho] \end{aligned} \quad (4-21)$$

Da equação (4-21) devemos observar que se  $\rho = 0$  teremos que a velocidade é o fluxo livre  $v_f = C$  e portanto a velocidade pode ser expressa como,

$$v_i(t + \tau) = v_f \exp[-\lambda\rho]. \quad (4-22)$$

e o fluxo,

$$\phi = v\rho = v_f\rho \exp[-\lambda\rho]. \quad (4-23)$$

Na equação (4-22) a constante  $\lambda$  pode ser determinada pela condição de máximo do fluxo de veículos. Fazendo,  $\phi' = d\phi/d\rho = 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi' &= C \frac{d}{d\rho} \rho \exp[-\lambda\rho] = C \exp[-\lambda\rho] - C\lambda\rho \exp[-\lambda\rho] \\ &= C \exp[-\lambda\rho](1 - \lambda\rho) \end{aligned} \quad (4-24)$$

teremos,

$$\exp[-\lambda\tilde{\rho}](1 - \lambda\tilde{\rho}) = 0. \quad (4-25)$$

Como a exponencial  $\exp[-\lambda\tilde{\rho}] \neq 0$  o ponto crítico é obtido de  $1 - \lambda\tilde{\rho} = 0 \rightarrow \tilde{\rho} = 1/\lambda$  onde o fluxo é máximo. Substituindo o ponto crítico em (4-22) obtemos a velocidade de fluxo máximo,

$$v_m = v_f \exp\left[-\lambda \frac{1}{\lambda}\right] = v_f e^{-1} = \frac{v_f}{e}. \quad (4-22)$$

Em seguida substituindo  $\lambda$  nas equações (4-22) e (4-23) obtém-se expressões matemáticas para a velocidade,

$$v(t + \tau) = v_f \exp\left[-\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right]. \quad (4-23)$$

e o fluxo,

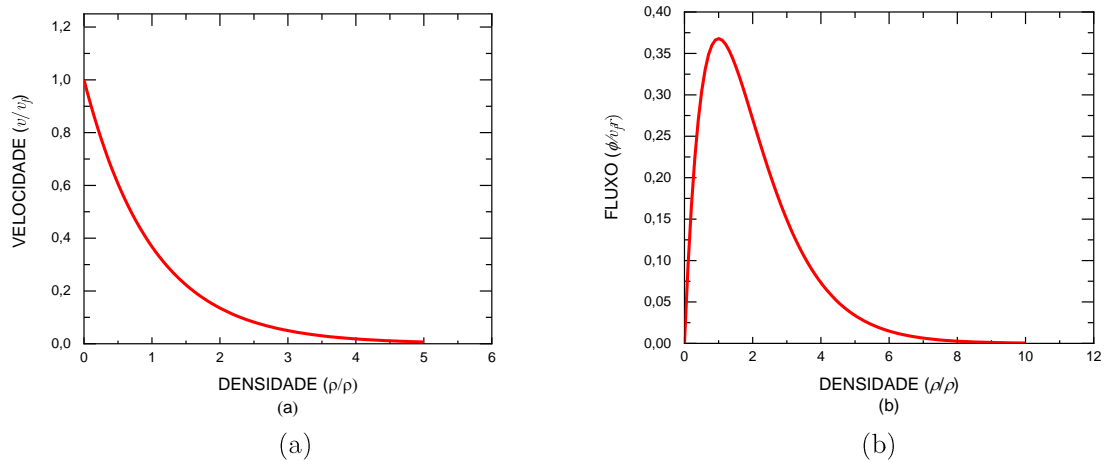
$$\phi = v_f \rho \exp\left[-\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right]. \quad (4-24)$$

As equações (4-23) e (4-24) são expressões do modelo *Underwood* para o fluxo de tráfego. Estas são consideradas por muitos autores adequadas para análise do fluxo de tráfegos, ajustados os dados numericamente à função (4-24) multiplicando a razão  $\rho/\tilde{\rho}$  por um fator multiplicativo a ser minimizado.

As figuras 3.5(a) e 3.5(b) são os gráficos representativos da velocidade  $v/v_f$  e do fluxo  $\phi/\tilde{\rho}v_f$  de veículos em unidades reduzidas, em função da densidade reduzida  $\rho/\tilde{\rho}$ . Na

figura 3.5(a) podemos verificar que quando a densidade se aproxima de zero, a velocidade dos veículos aproxima-se da velocidade de fluxo livre que não apresenta divergência igual ao modelo de Greenberg. Por outro lado, quando a densidade se aproxima da densidade máxima, a velocidade dos veículos não tende a zero (via congestionada) manifestando uma divergência pequena na velocidade dos veículos.

Figura 8: O fluxo e a velocidade em unidades reduzidas do modelo de Underwood.



Fonte: Autor.

Na Figura 3.5(b) é o gráfico representativo do fluxo em unidades reduzidas. Pode-se observar que, o fluxo anula nas condições de fluxo livre (densidade nula) e na condição de congestionamento (densidade máxima) ele converge rapidamente para zero. Além disso, sua convexidade para baixo nos dá um máximo em  $\tilde{\rho}/\rho_m = e^{-1}$ . Portanto, a partir da origem o fluxo aumenta à medida que a densidade aumenta até atingir um máximo e a partir desse ponto, à medida que a densidade aumenta o fluxo, tende para um valor nulo em que os veículos vão parando. Apesar de sua simplicidade esse modelo apresenta bons resultados e foi utilizado de forma eficiente para estudar estradas americanas.

## 4. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Simulações computacionais sobre o fluxo de tráfego, aliadas com o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes e o rápido avanço tecnológico na área da computação, permitem que atualmente diversas demandas sejam tratadas detalhadamente num nível microscópico de forma muito acurada. Elas podem fornecer informações sobre situações nas quais resultados analíticos não podem ser obtidos, ou ainda, nas quais dados experimentais não são viáveis (ou os dados são escassos), sendo portanto de grande importância para predições de novos fenômenos. Além disso, as simulações têm um papel fundamental para auxiliar na interpretação de resultados experimentais.

Nesse capítulo, faremos uma simulação do fluxo de tráfego em uma via usando o modelo *car-following* conhecido como modelo de “força generalizada” (GF, *Generalized Force*)<sup>1</sup>.

### 4.1 O Modelo Velocidade Ótima

O modelo *velocidade Ótima* é um modelo “Car-Following” que se baseia no fato de cada condutor acelerar (ou desacelerar) proporcionalmente à diferença entre uma velocidade ótima e a velocidade atual, onde a velocidade ótima depende do *headway*. A dinâmica newtoniana para esse modelo foi proposto por Bando *et al.*, através da equação diferencial (BANDO, 1995),

$$\frac{d^2 x_i(t + \tau)}{dt^2} \approx \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = \lambda [V(\Delta x_i(t)) - v_i(t)] \quad (4-1)$$

onde  $\Delta x_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$  é o *headway* e  $v_i$  é a velocidade dos veículos para  $i = 1, 2, \dots, N$ , onde  $N$  é o número total de veículos na via, onde se conhece, *a priori*, a posição de  $N - \text{ésimo}$  veículo líder (ou *leading-car*).

Neste modelo o condutor calcula a distância  $\Delta x_i(t)$  e determinada a velocidade ótima  $V(\Delta x_i)$  a que se deve prosseguir. A estratégia do condutor é manter uma velocidade segura de acordo com a velocidade relativa que o precede. Quando  $V(\Delta x_i)$  for superior (ou inferior) a  $v_i(t)$  isto significa que o veículo acelerou (ou desacelerou). A constante de proporcionalidade  $\lambda$ , igual para todos os condutores, quantifica a rapidez com que o  $i$ -ésimo veículo atinge a velocidade ótima e a estabilidade da solução estacionária. A função  $V$  é uma função monótona crescente e tal que  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} V(\Delta x_i) = V_{\text{máx}}$ , onde  $V_{\text{máx}}$  denota a velocidade máxima do veículo ou a velocidade máxima permitida pelo código de trânsito para aquela via (ou uma fração desta). Estudos mostram que é praticamente irrelevante a inclusão do tempo de retardo

na função resposta. Isso deixa de ser significativo para valores suficientemente pequenos do atraso  $\tau$  (BANDO et al., 1998).

#### 4.1.1 A Estabilidade do Modelo Velocidade Ótima

A estabilidade do modelo OV é feita na hipótese de assumir as seguintes condições periódica de fronteira: “Assumimos que os condutores têm as mesmas características, que o  $i$ -ésimo veículo segue o  $(i+1)$ -ésimo veículo e  $N$ -ésimo segue o primeiro”. Portanto o sistema de equações diferenciais obtido admite uma solução estacionária que corresponde  $N$  veículos, em uma pista circular de perímetro  $L$  (comprimento da via), igualmente espaçados entre si de uma distância  $b = L/N$  e todos a viajam à mesma velocidade ótima, veja a Figura 4.1.

Figura 9: Modelo “Car-following” de carros obedecendo a condição de contorno.

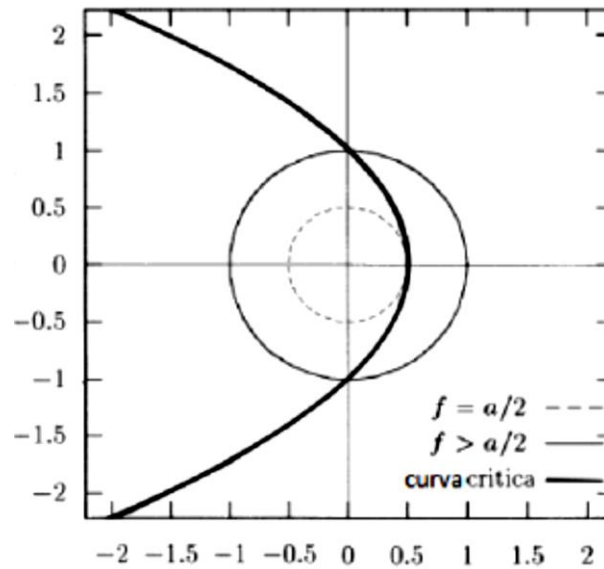


Fonte: Physics of Traffic (nagoya-u.ac.jp).

A solução da equação (4-1) foi estudada em detalhe no trabalho (BANDO, 1998), admitindo como solução uma série de Fourier do tipo  $e^{i\gamma_k n + zt}$ , onde  $z = u + iv$  ( $u$  e  $v$  são reais) é um número complexo. Verificou-se, portanto, que a solução é instável, se a amplitude aumentar indefinidamente com o tempo, o que ocorre quando  $u > 0$ . Se  $u < 0$  a solução estacionária é *estável*. A separatriz  $u = 0$  determina a fronteira entre estas duas regiões de estabilidade e instabilidade, determina a região crítica no plano polar  $f = (\lambda/2) / \cos^2(\lambda/2)$ , onde  $f = V(\Delta x_i)$ . A estabilidade significa que um condutor pode deslocar-se com uma velocidade a uma distância segura. Quanto maior é a região de estabilidade, menor é a chance de se colidir com outro veículo na mesma via. Assim, o critério de estabilidade resume-se, para função velocidade ótima  $V$ , da

seguinte forma: Se  $f < \lambda/2$  o estado é estável porque  $u < 0$  para qualquer  $\gamma_k$ ; se  $f > \lambda/2$  o estado é instável porque existe pelo menos um  $\gamma_k$  tal que  $u > 0$ ; se  $f = \lambda/2$  o estado mantém-se na região crítica (BANDO *et al.*, 1998).

Figura 10: A região de estabilidade em coordenadas polares  $(f, \lambda)$ .



Fonte: (BANDO *et al.*, 1998).

#### 4.1.2 A Escolha de uma Função Velocidade Ótima

A escolha de função velocidade ótima, não é arbitrária. Geralmente estas funções devem satisfazer as seguintes condições:

- a) A função velocidade ótima deve ser contínua (sem salto) e positiva em um intervalo  $h = \Delta x_i > 0$ ;
- b) Ela deve ser estritamente crescente. Nesta situação os condutores tendem a conduzir mais depressa na via quando *headway* aumentar;
- c) Ela deve possuir um limite inferior (para um dado  $\Delta x_0 > 0$ , a função é nula em intervalo entre 0 e  $\Delta x_0$ ). A constante  $h_0$  é denominado *jam roadway* e funciona como limiar, sempre que o *headway* for inferior ou igual a  $h_0$  o condutor tende a parar o veículo.
- d) A velocidade ótima deve ser limitada superiormente por  $v_{\text{máx}}$ . Na prática  $v_{\text{máx}}$  corresponde a velocidade desejada ou máxima permitida pelas leis de trânsito.

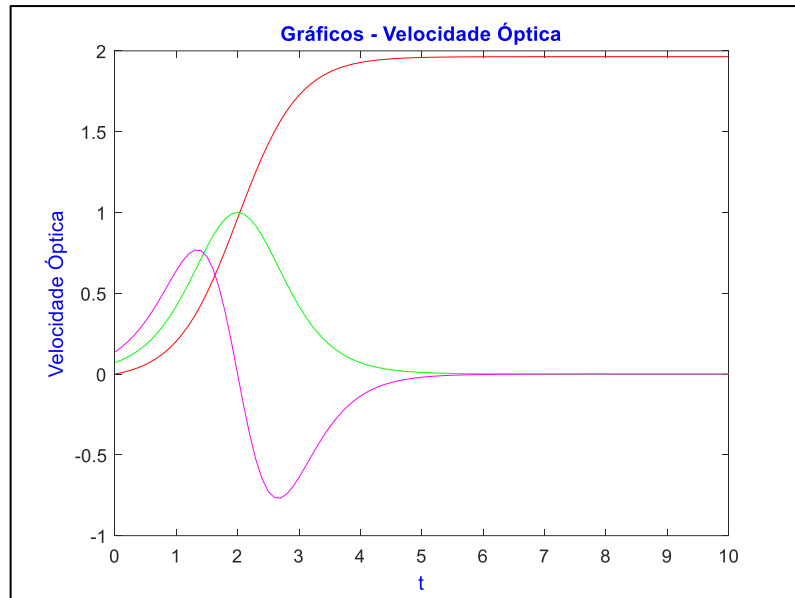
Por exemplo, uma função que satisfaz os itens acima, (a) – (d), é a função velocidade ótima de Orosz *et al.*, (OROSZ, 2004):



$$V(\Delta x) = \begin{cases} 0 & 0 < \Delta x < 1 \\ \frac{v_{\text{máx}}(\Delta x - 1)^3}{1 + (\Delta x - 1)^3} & \Delta x > 1 \end{cases} \quad (4-2)$$

que considera onde  $\Delta x_0 = 1$ , veja a figura 4.3.

Figura 11: Gráfico da Velocidade Ótima: Função V (vermelho), derivada primeira (verde), derivada segunda (magenta).



Fonte: do autor.

A função proposta por *Orosz* (2004) satisfaz todos os requisitos apresentados para a velocidade ótima, mas possui um ponto de inflexão designado como distância de segurança. Em termos físicos, o ponto de inflexão representa a distância entre os veículos a partir do qual se espera a ocorrência de fluxo estáveis. A existência deste ponto é muito importante. Caso contrário, não se pode obter a onda de densidade representando o tráfego congestionado. Obviamente se o *headway* for menor do que a distância de segurança é que se esperar que o condutor pare de forma a não bater no veículo da frente.

Atualmente existem várias propostas para a função velocidade ótima para modificar a descrição do tráfego de veículos. Apesar do sucesso e da simplicidade do modelo OV, também foram apontados algumas limitações no modelo. Estas limitações motivaram o desenvolvimento de vários outros modelos mantendo a ideia base do modelo original e acrescentando novos estímulos como, por exemplo, a atenção do condutor ao *headway*. Entre esses modelos estão o *Generalized Optimal Velocity* (GOV) (Li e Sun, 2012), o *Generalized Force* (GF) (Helbing e Tilch, 1998b), o *Full Velocity*

*Differency* (FVD) (Jiang et al.,2002), *Multiple Headway and Velocity Differency* (MHVD) (Xie et al., 2008).

## 4.2 Modelo de Força Generalizada

Apesar do sucesso e da simplicidade do modelo velocidade Óptima, nele existem algumas limitações. Essas limitações motivam o desenvolvimento de vários outros modelos que mantêm a ideia original apresentado novos estímulos. Em 1998, Henlbind e Tileh (HENLBIND e TILEH, 1998) realizaram a calibração do modelo OV buscando dados empíricos do modelo follow-the-leader. Eles entenderam que se as distâncias relativas dos veículos forem negativas, é necessário considerar a aceleração causada pela velocidade relativa de dois veículos consecutivos. O modelo proposto por eles é conhecido na literatura científica como modelo da força generalizada (GF, *Generalized Force*) definido pela equação diferencial,

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = \lambda[V(\Delta x_i(t) - v_i(t)) + \alpha \Delta v_i(t)H(-\Delta v_i(t))] \quad (4.3)$$

onde,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de sensibilidade e H e a função de Heaveside ou função degrau.

O modelo GF em publicações atuais mostra ser muito eficiente na descrição do fluxo de tráfego se comparado como dados empíricos (LI e SUN, 2012). O GF possui limitações como todos os modelos, por exemplo, se o veículo que precede o  $i$ -ésimo veículo forem mais rápidos do que aqueles que o seguem, então o veículo não consegue parar, mesmo que se *headway* for menor do que a distância de segurança. ZAO e GAO (ZAO e GAO, 2005) argumentaram que o modelo GF tem fortes efeitos sobre o comportamento do trânsito, devido à seu grande valor, de modo que o veículo em movimento pode responder rapidamente ao veículo que está a frente. Assim, a diferença de aceleração deve ser também levada em conta.

## 4.3 Soluções Numéricas do GF

Solução da equação (4-4) é impossível de ser solucionada de forma analítica sem aproximações devidas. Neste sentido deve-se recorrer a métodos de numéricos como um meio alternativo.

### 4.3.1 Problema de Valor de Inicial

A equação (4-3) escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i(t)}{dt} &= v_i(t) \\ \frac{dv_i(t)}{dt} &= \lambda[V(\Delta x_i(t) - v_i(t)) + \alpha \Delta v_i(t)H(-\Delta v_i(t))]\end{aligned}\tag{4.5}$$

que é um problema de valor inicial (PVI) para a dinâmica do modelo microscópico. A integração da equação (4.5) pode ser feita pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem,

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t f(x_i) \\ k_2 &= \Delta t f\left(x_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta t f\left(x_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta t f(x_i + k_3) \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]}{6} + O(\Delta t^5)\end{aligned}\tag{4.5}$$

com  $\Delta t = 10^{-4}$  s. A implementações foram feitas no MATLAB com algoritmos em teses de doutoramento. do ponto de vista prático o MATLAB é muito amigável quando comparado com outras linguagens como o FORTRAN 95 (ou HPF) e C++ no sentido que permite uma boa integração gráfica. Para o tipo de problemas as linguagens compiláveis são mais eficientes que uma linguagem executável como o MATLAB. Além disso, o MATLAB exige um computador com processador mais eficiente e mais memória RAM. Nesta simulação usando um DELL INSPIRON Core i7 com 8 mega de RAM. O tempo de computação para 100 veículo na via é aproximadamente 5 minutos e aumenta drasticamente quando se aumentou o número de veículos ou o tempo de observação.

Na solução da equação (4.5) usando (4.6) foi considerado as seguintes condições iniciais para o problema,

$$\begin{aligned}x_1(0) &= x_1^{(0)} + \varphi_i \quad \varphi_i \rightarrow [0,1] \\ x_i(0) &= x_i^{(0)} \quad i \neq 1 \\ v_i(0) &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

e assumindo que todos movem nas mesmas condições, com  $x_n^{(0)} = bn$  e, além disso, desprezamos nessa primeira observação o comprimento dos veículos (considerando os veículos como partículas). A *velocidade Ótima* usada é

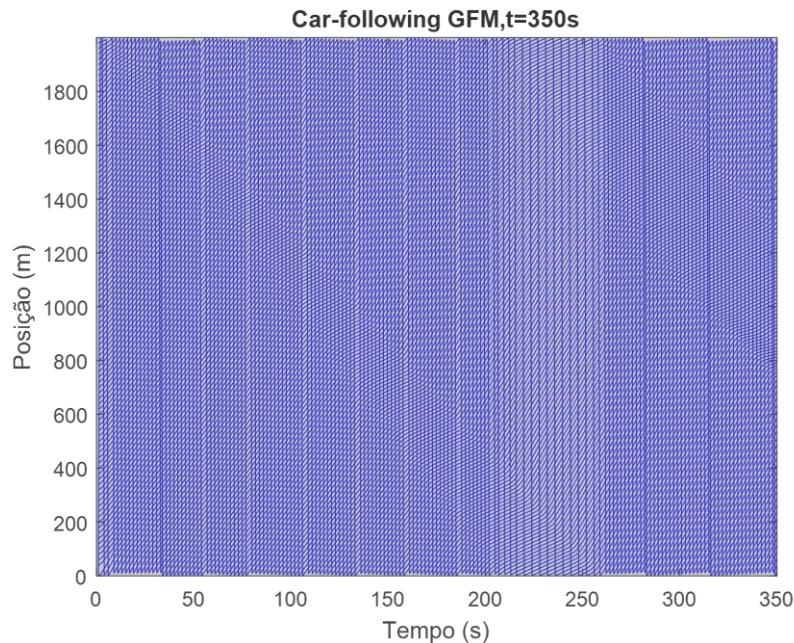
$$V(\Delta x_i) = v_1 + v_2 \tanh\{c_1[\Delta x_i(t) - l_c] - c_2\} \quad (4.7)$$

onde as constantes são dadas por:  $l_c = 5\text{m}$ ,  $v_1 = 6,75\text{m/s}$ ,  $v_2 = 7.91 \text{ m/s}$ ,  $c_1 = 0.13$  e  $c_2 = 1.57$  obtidas do artigo (HELBING e TILCH, 1998).

### 4.3.2 Resultados e Discussões

Nestas simulações consideramos 350 veículos em uma via com velocidade ótima (4-7) e observamos o movimento por 300 segundos. Na Figura 4.3, podemos perceber a presença de certa perturbação inicial provocando instabilidade no fluxo de tráfego. Ou seja, há congestionamento, mas não há colisões (acidentes). O congestionamento está identifica-do pelas formações dos *clusters* resultantes das ondas para-arranca.

Figura 12: posições dos 350 veículos obtidos pela implementação do modelo GF durante 350 segundos.

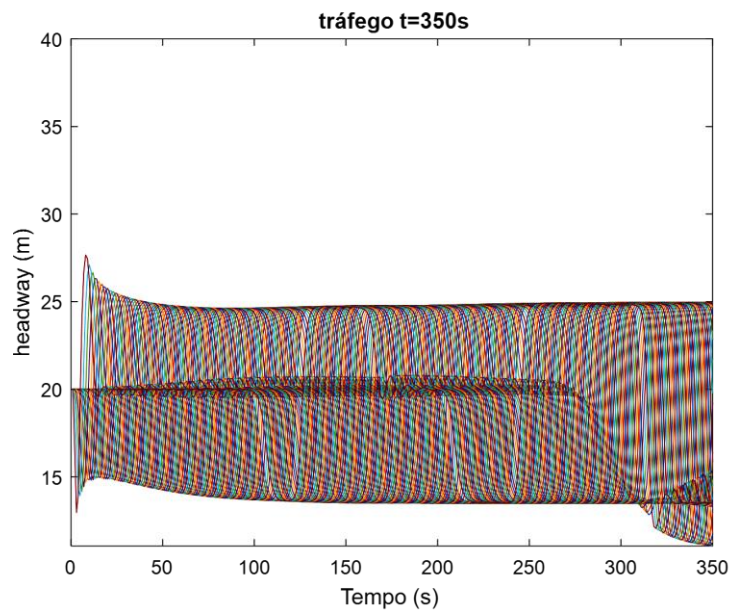


Fonte: Autor.

A Figura 13, mostra o *headway* observado em 350 segundos. Os *headway* dos veículos oscilam em torno da distância de segurança ( $hc = 2\text{m}$ ). Os valores inferiores

são responsáveis pela formação de *clusters* (congestionamentos). No início os *headway* são maiores até acontecer o congestionamento.

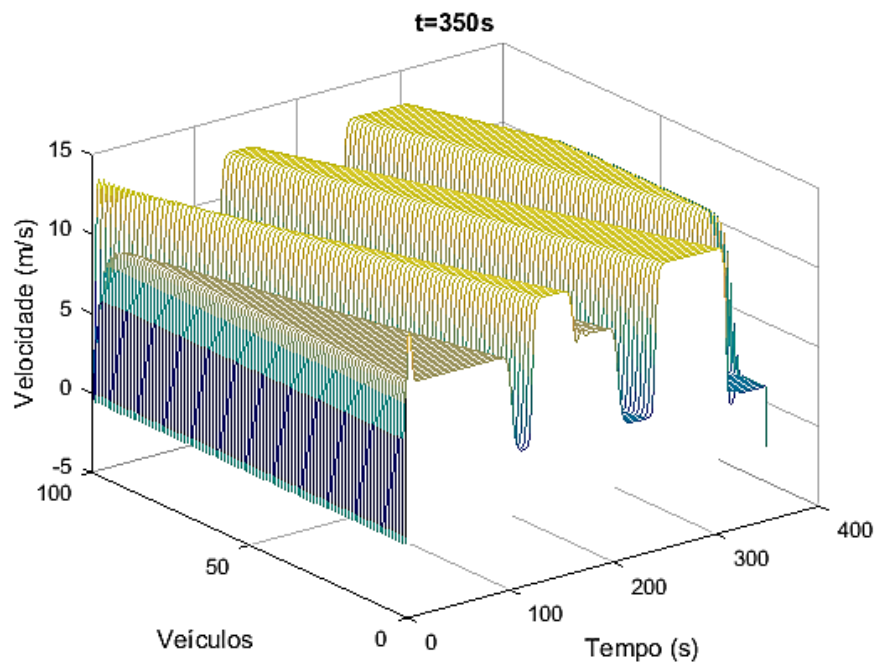
Figura 13: Headway dos veículos durante 350s.



Fonte: Autor.

Na Figura 14 temos a ilustração da flutuação das velocidades dos veículos no tempo, esta flutuação é responsável pela formação de congestionamentos (*clusters*).

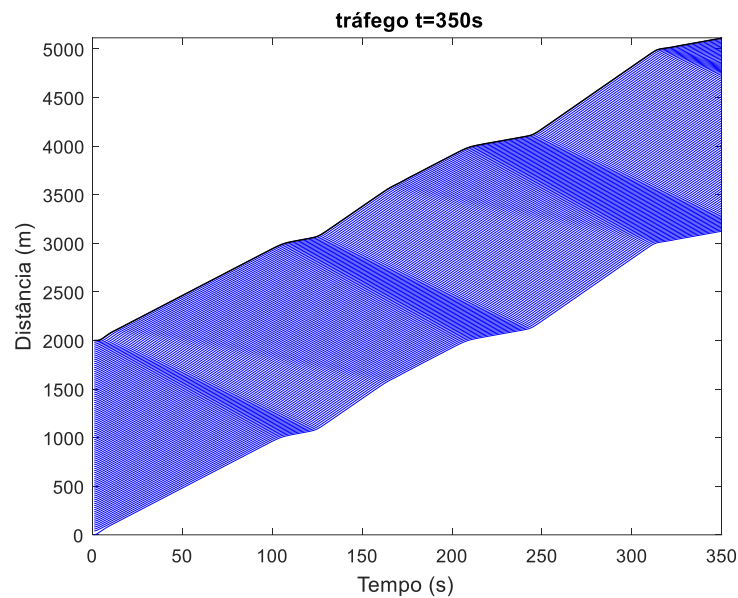
Figura 16: Flutuação das velocidades dos veículos ao longo do tempo.



Fonte: Autor.

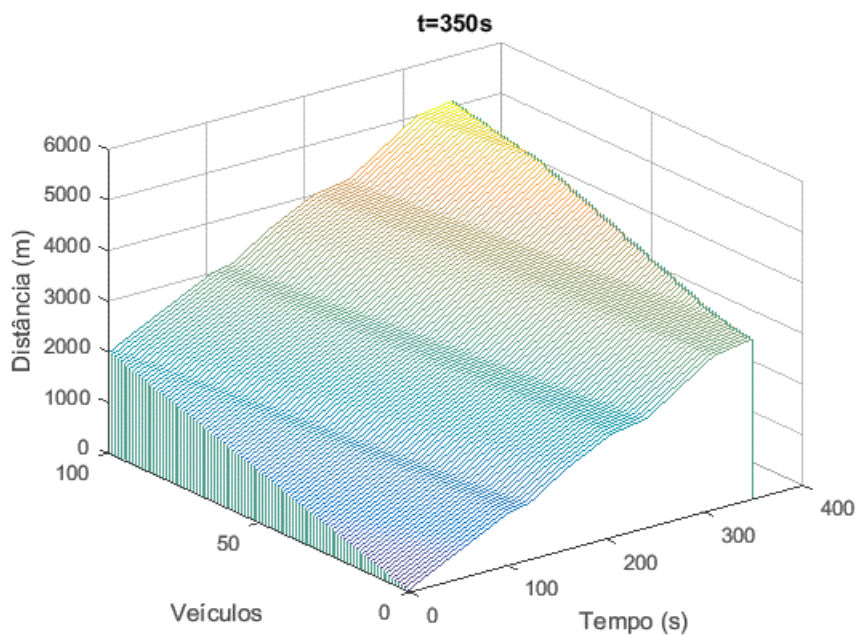
Nas Figura 15 até 18 teremos a trajetória de todos os veículos no caso instável, como visto nas figuras, aqui teremos uma instabilidade, com a presença de congestionamento devido ao processo de pára-arranca, Figuras 15 e 16. Este tipo de evento ocorre em um fluxo de tráfego real em vias congestionadas. O *headway* Figura 15, é maior mostrando que os veículos ficam mais afastado de turbulência no trânsito e os condutores controlam os veículos de forma arbitrária para não provocar colisões inesperadas. Os resultados de efeitos podem ser vistos claramente nos gráficos a seguir.

Figura 17: trajetória de todos os veículos (caso instável).



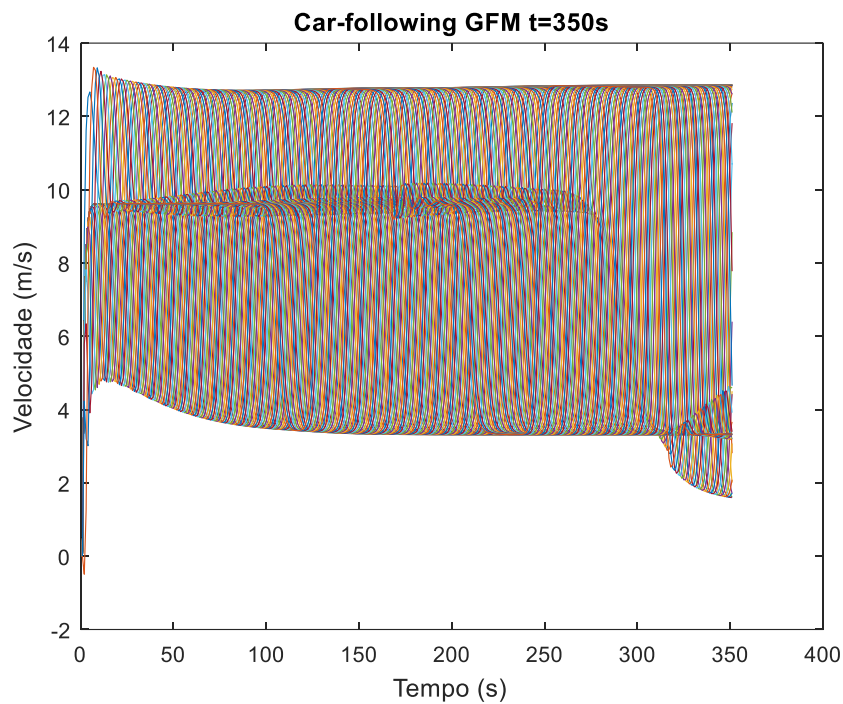
Fonte: Autor.

Figura 18: trajetória de todos os veículos (caso instável).



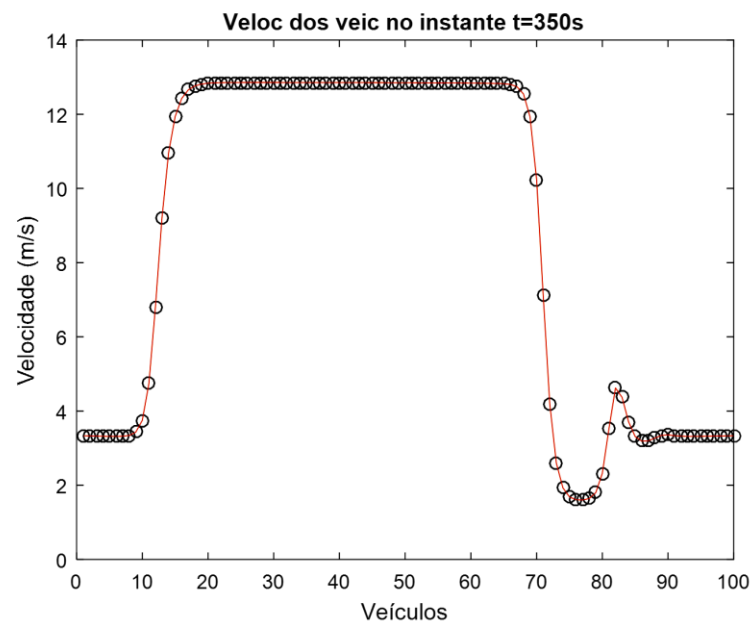
Fonte: Autor.

Figura 19: headway dos veículos (caso instável).



Nas Figura 20 e 21 mostra a relação velocidade com os veículos e o tempo. A Figura 20, mostra que os condutores procuram aumentar sua velocidade, mas devido a instabilidade do trânsito eles são obrigados a voltar para a velocidade anterior para não provocar uma futura colisão e manter o seu *headway*.

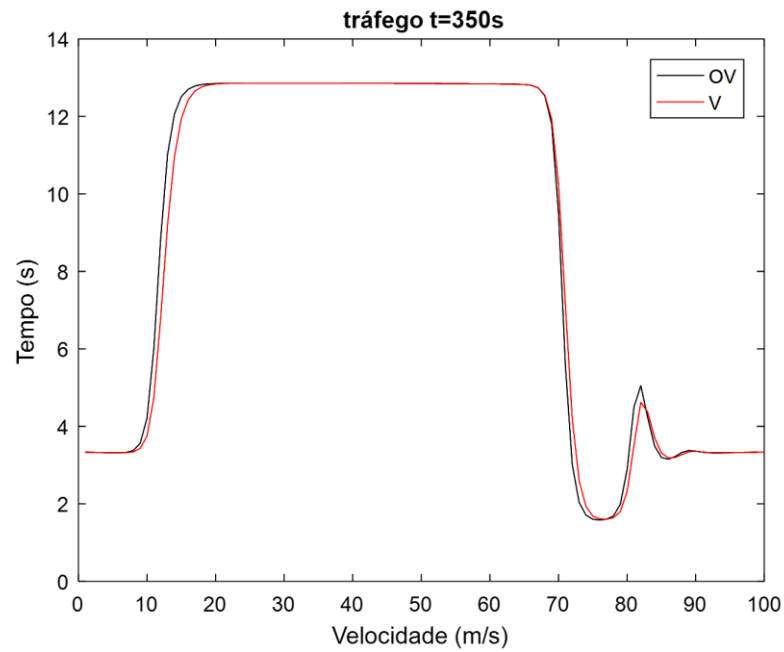
Figura 4.9: Relação da velocidade com o veículo (caso instável).



Fonte: Autor.

Já a Figura 21, mostra o tempo em que cada condutor leva para aumentar e diminuir sua velocidade de cada em função da instabilidade do trânsito.

Figura 21: Relação da velocidade com o tempo (caso instável).



Fonte: Autor.

Estes resultados preliminares é uma etapa inicial para estudos futuro do tráfego em vias de congestionamentos de Goiânia. Para obter um resultado mais realista para a física do tráfego de veículos seria interessante fazer medidas em algumas vias para medir a velocidade média dos veículos. Isto está sendo feitos nos Estados Unidos, Japão e em outros Países como uma metodologia de estudo de trânsito.



## 5. CONCLUSÕES FINAIS

No presente trabalho fizemos um estudo sobre a dinâmica do fluxo de tráfego de veículos, e destacamos as principais abordagens para esse estudo a macroscópica e a abordagem microscópica, na abordagem macroscópica falamos sobre algumas grandezas físicas tais como, velocidade, densidade e fluxo. Já na abordagem microscópica na qual focamos um pouco mais neste trabalho vimos que os veículos são considerados como partículas individuais no fluxo de tráfego.

Na abordagem microscópica observamos os modelos GM, o modelo OV e fizemos uma análise mais detalhada sobre o modelo GF. A tendência de um condutor, no modelo GM é conduzir a uma velocidade igual ao do seu *leading-car*, este modelo baseia-se no modelo *follow-the-leader* desenvolvido por Pipes. No modelo OV, o condutor estabelece uma velocidade ótima, que depende da distância para o veículo da frente. Quando esta distância diminui (aumenta), a velocidade ótima também diminui (aumenta), o modelo foi proposto por Bando et al. (1995) e baseia-se no princípio de que o tráfego é regulado por uma velocidade ótima.

É importante lembrar que todos os modelos possuem imperfeições, e podemos constatar essas imperfeições através das simulações e na condução real (no trânsito). Entre elas podemos citar: o arranque, congestionamentos, para-arranca, aceleração (ou desaceleração), etc. Com base na experiência e resultados adquiridos neste estudo, é necessário um estudo mais aprofundado em alguns casos. Pode-se propor para futuros estudos uma análise mais avançada para a aplicação na engenharia de tráfego, na área da computação, etc.

Este trabalho de TCC deve servir como base para outros trabalhos interdisciplinas de licenciatura física que envolve as áreas da Computação, Engenharia e Matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANDO, M., HASEBE, K., NAKAYAMA, A., SHIBATA, A., SUGIYAMA, Y., “Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation”, *Physical Review E*, vol.51, no.2, p.1035 (1995).
- BOGO, R. L., GRAMANI, L. M., KAVISKI, E., “Modelagem Computacional do Tráfego de Veículos”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol.37, no.1, p.1301 (1015).
- BARROSO, L. C., BARROSO, M. M. CAMPOS FILHO, F. F., CARVALO, M. L. BUNTE, MAIA Cálculo Numérico: com aplicações, 2ª Edição, Editora Harbra, São Paulo, 1987
- BRACKSTONE, M., McDONALD, M., “Car-following: a historical review”, *Transportation Research Part F* 2, p.181-196 (1999).
- CALEFFI, F., LUCCHESI, S. T., ANZANELLO, M. J., CYBIS, H. B. B., “Influência das condições climáticas e de acidente na caracterização do comportamento do tráfego em rodovias”, *Transportes*, v.24, n.4, p.57-63 (2016).
- CHUNCHUN, H., NIANXUE, L., XIAOHONG, Y., WENZHONG, S., “Traffic Flow Data Mining and Evaluation Based on Fuzzy Clustering Techniques. *International Journal of Fuzzy” Systems*, 13(4), 344–349. (1990).
- CHANDLER, R. E. HERMAN, R., MONTROLL, E. W., “Traffic dynamics: studies in car following”. *Operations research*, 6(2), p.165-184. (1958)
- GRAZIS, D.C., HERMAN, R., POTTS, R.B., “Car-following Theory of Steady-state Traffic Flow”. *Operations Research*, 7 (4), p. 499-505. (1959).
- FURTADO, Crispiniano de Jesus Gomes, “Dinâmica de Tráfego de Veículos”, 94p (2013)
- HELBING, D., TILCH, B., “Generalized Force Model of Traffic Dynamics. *Physical” Review E*, 58 (1), p.133. (1998).
- HERMAN, R., POTTS, R. “Proceedings-symposium on Theory of Traffic flow”. Elsevier, New York. (1961).
- HELBING, D., TILCH, B., “Generalized force model of traffic dynamics”. *Physical Review E*, 58(1): p.133. (1998)
- JIANG, R., WU, Q.-S., ZHU, Z.-J., “A new continuum model for traffic flow and numerical tests”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(5): p. 405–419. (2020).

- JIANG, R., WU, Q., ZHU, ZUOJIN, “Full difference Model for a car-following Theory”, *Physical Review E*, vol. 64, p.017101 (2001).
- KIANFAR, J., EDARA, P., “A Data Mining Approach to Creating Fundamental Traffic Flow Diagram”. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v.104, p.430–439. (2013).
- LEE, H.K., LEE, H-W., KIN, D., “Macroscopic traffic Models from Microscopic Car-Following Models”, *Physical Review. E*, v. 64, p.56126 (12). (2001).
- LI, Y., SUN, D., “Microscopic car-following model for the traffic flow: the state of the art”. *Journal of Control Theory and Applications*, 10(2), p.133-143. (2012).
- MAY, A. D. *Traffic Flow Fundamentals*. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.
- MAY, A. D., “Traffic flow Fundamentals”. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1990.
- OLSTAN, J.J., TAPANI, A., “Comparison of Car-following Models”. Swedish National Road and Transporte Research Institute. (2004).
- VARGAS, Marina, GRAMANI, Liliana Madalena, KAVISKI, Eloy, “Modelagem do fluxo de pedestres pela teoria macroscópica” *RBEF*, vol. 34, n.4, p.1-10 (2012).

## APÊNDICE A

### Termo de Autorização de Publicação de Produção Acadêmica

O estudante LETÍCIA BRAGANÇA DA SILVA do curso de Licenciatura em Física, matrícula **2017.2.0018.0007-0**, telefone: (62) **993345234** e-mail **leticia-braganca@hotmail.com**, na qualidade de titular dos direitos autorais, em concordância com a Lei nº 9.610/98 (Decreto dos Direitos do Autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o trabalho de Conclusão de Curso intitulado A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE FORÇA GENERALIZADO, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF), imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão na internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 15 de junho de 2021.

*Letícia Bragança da Silva*

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

Nome Completo do Autor: LETÍCIA BRAGANÇA DA SILVA.

Assinatura do Professor-orientador: \_\_\_\_\_

Nome completo do professor-orientador: ANDRÉ LUIZ CARDOSO DA SILVA