

PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCALA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA



**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO
DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE DIFERENÇA DE
VELOCIDADE TOTAL**

GUILHERME ROCHA DA SILVA

GOIÂNIA

2021

GUILHERME ROCHA DA SILVA

**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO
DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE DIFERENÇA DE
VELOCIDADE TOTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Escola de Ciências Exatas e da Computação, da
Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Licenciatura Plena em Física.

Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva.

Banca Examinadora:

Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.

Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

GUILHERME ROCHA DA SILVA

**A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO
DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DA DIFERENÇA DE
VELOCIDADE TOTAL**

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção do título de Licenciatura em Física, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciência Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em **08/06/2021**.

Prof. Ms. Ludimilla Reis Pinheiro dos Santos.
Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso.

Banca examinadora:



Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva



Prof. Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues.



Prof. Dr. Anderson Costa da Silva.

GOIÂNIA

2021

“Dedico este trabalho aos que me apoiaram, e as pessoas que acreditaram em mim ao longo da minha trajetória”.

Guilherme Rocha da Silva

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família por todo o suporte e apoio para que eu pudesse focar em meus estudos. Aos meus avós pela compreensão e apoio financeiro. E a todos os professores da PUC/Goiás, especialmente aos professores Andre Luiz e Raffael, que foram apoios fundamentais no meu amadurecimento e aprendizagem ao longo do curso de física.

Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador, Dr. André Luiz Cardoso da Silva, por ter me orientado durante o meu Trabalho de Final de Curso (TCC) e a sua dedicação em seu trabalho como professor e também agradeço ao Coordenador do curso Dr. Anderson Silva pelo apoio através da organização do curso de Física.

“Os dias prósperos não vêm por acaso; nascem
de muita fadiga e persistência”

Henry Ford (1863-1947)

RESUMO

Neste trabalho propomos estudar uma abordagem microscópica da dinâmica newtoniana para o estudo do fluxo de tráfego de veículos em via usando o modelo da diferença de velocidade total (FVD, *full velocity difference*) obtido de uma extensão do modelo velocidade ótima (OV) que surgiu para incluir a velocidade relativa de forma explícita na manobra do condutor e os resultados são bons se comparados com dados empíricos. Diversos autores entendem que deve-se considerar a aceleração causada pela velocidade relativa de dois veículos consecutivos. O estudo desta dinâmica será feita por simulações numéricas do fluxo de tráfego usando o software MATLAB para resolver um conjunto de equações diferenciais pelo método Runge Kutta 4^a ordem. Simulações numéricas evidenciaram regimes que compartilham aspectos comuns com os regimes de condução real, nomeadamente, as situações de “para-arranca”, as acelerações e desacelerações, e o congestionamento. Os resultados do modelo revelam-se bons comparados aos resultados empíricos de Li e Sun (2012).

Palavras chave: A Dinâmica de Newton, Fluxo de Tráfego de Veículos, Simulações computacionais ou numéricas.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Esquema de veículos num espaço L.	6
Figura 2:	Diagrama fundamental	7
Figura 3:	Efeito de Histerese	8
Figura 4:	Diagrama fluxo-velocidade.	8
Figura 5:	Diagrama fluxo-densidade.	8
Figura 6:	Modelo de perseguição Car-Following	9
Figura 7:	Headway espacial e temporal	10
Figura 8:	Modelo cinemático Car-Following	11
Figura 9:	Relação sensibilidade espaçamento	11
Figura 10:	Diagrama de Greenshields: densidade-velocidade	15
Figura 11:	Diagrama de Greenshields: fluxo-densidade	17
Figura 12:	Curva densidade-velocidade e densidade-fluxo Greenberg	17
Figura 13:	Curva densidade-velocidade e densidade-fluxo de Underwood.	20
Figura 14:	Região de estabilidade	21
Figura 15:	Posição dos veículos em $t = 300s$: Caso Estável	24
Figura 16:	Posição dos veículos em $t = 300s$: Caso Instável	25
Figura 17:	Evolução do headway espacial: Caso Estável	26
Figura 18:	Evolução do headway espacial: Caso Instável.	26
Figura 19:	Velocidade vs. tempo: Caso Estável.	27
Figura 20:	Velocidade vs. tempo: Caso Instável	27
Figura 21:	Flutuação de velocidades: Casos Estável e Instável	28
Figura 22:	Perfil de velocidade vs. veículos: Caso Estável	29
Figura 23:	Perfil de velocidade vs. veículos: Caso Instável.	29
Figura 24:	Gráfico da distância vs. tempo estável	30
Figura 25:	Gráfico da distância vs. tempo instável	30
Figura 26:	Gráfico de flutuação do espaço percorrido.	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Relação entre parâmetros macroscópicos e microscópicos	5
Tabela 2:	Relação entre as variáveis do tráfego	10

LISTA DE ABREVIATURAS

GF	Generalized Force (Força Generalizada)
OV	Velocidade Óptima;
FVD	Full Velocity Difference;
FVAD	Full Velocite and Acceleration Difference;
MAVD	Multiple Ahead and Velocity Differency
MHVD	Multiple Headway and Velocity Differency
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
GM	General Motors

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	O FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS.	3
2.1	Histórico sobre o Estudo do Fluxo de Tráfego de veículos.	3
2.2	Definições Básicas.	5
2.2.1	Velocidade, densidade e fluxo	5
2.1.2	A curva do fluxo de tráfego e a Histerese.	9
3.	A TEORIA MICROSCÓPICA DO FLUXO DE TRÁFEGO.	9
3.1	O Modelo Car-Following	9
3.1.1	Modelo General Motor ou Modelo Linear	11
3.1.2	O Modelo Não-Linear	14
3.2	Modelos de Velocidade do Tráfego de Veículos em Equilíbrio.	15
3.2.1	Modelo de Greenshields	15
3.2.2	Modelo de Greenberg	16
3.2.3	Modelo de Underwood.	17
4.	O MODELO DA DIFERENÇA DE VELOCIDADE TOTAL E AS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	18
4.1	Modelos Velocidade Óptima.	18
4.1.1	Estabilidade linear do modelo e discussão do estado de equilíbrio	19
4.1.2	A função velocidade óptima.	20
4.2	O Modelo da Diferença de Velocidade Total e suas aplicações	21
4.3	Simulações numéricas em MATLAB	22
4.3.1	O modelo e suas definições.	23
4.3.2	Resultados de simulações numéricas	24
5.	CONCLUSÕES FINAIS.	32

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	33
APÊNDICE A – Termo de Autorização de Publicação de Produção Acadêmica	34

1. INTRODUÇÃO

Na atualidade um grande número de veículos e meios de transportes circulam por todo o mundo, porém essa quantidade de veículos tem aumentado significativamente nas últimas décadas. Conseqüentemente para evitar a desordem e permitir um bom funcionamento das vias e pistas, é necessário estabelecer uma organização que permita que o trânsito flua de forma mais consistente. Por meio dos estudos da teoria de fluxo de tráfego é possível conhecer o número de veículos que circula por uma via em um determinado período, suas velocidades, suas ações mútuas, os locais onde seus condutores tendem a estacioná-los, as regiões na qual se concentram as maiores probabilidades de acidentes de trânsito e etc. Estes estudos, permitem a determinação quantitativa da capacidade das vias e, em consequência, o estabelecimento dos meios construtivos necessários à melhoria da circulação ou das características de seu projeto (DNIT, 2006). Os estudos de tráfego têm crescido consideravelmente, devido à enorme concentração de veículos provenientes do desenvolvimento do transporte das últimas décadas que atualmente ocupam as vias e causam congestionamento e atrapalham o processo fundamental de transporte dos países quando há um número de veículos elevado em uma via. Portanto seu estudo é de importância fundamental tanto em âmbito estatístico tanto econômico, uma vez que os países dependem do transporte para atender a demanda industrial e comercial.

A teoria do fluxo de tráfego consiste na aplicação de leis da matemática, da teoria da probabilidade e da física à descrição do comportamento do tráfego veicular rodoviário. Na realidade, não existe uma única teoria de fluxo de tráfego. Existem pelo menos três abordagens teóricas para o tema, cuja validade é determinada pelo interesse do estudo que se deseja realizar. Nas últimas décadas, o desenvolvimento de várias teorias a respeito dos fenômenos de tráfego tem recebido uma considerável atenção. Um número crescente de investigadores com diferentes conhecimentos e pontos de vista tem estudado os vários aspectos dos fenômenos de tráfego com resultados bastante satisfatórios (Jiang et al., 2001).

Dentre as abordagens teóricas do fluxo de tráfego que existem, podemos classificá-las em três tipos, sendo elas macroscópica, microscópica e mesoscópica. Cada abordagem leva em conta alguns parâmetros muito importantes tais como velocidade, fluxo e densidade, cada um explorando de forma mais específica esses parâmetros de forma a obter resultados com diferentes propósitos. Na abordagem macroscópica o tráfego é descrito por três grandezas interligadas entre si, a saber, a velocidade, a densidade e o fluxo, as leis de conservação do momento e da massa. A maioria dos modelos macroscópicos aproxima o tráfego de veículos como um fluido compressível. O primeiro

destes modelos, proposto por Lighthill-Whitham-Richards, traduz a lei de conservação de massa para os carros e requer uma lei de estado para o par velocidade-densidade. Os outros modelos (PW, Zhang e Aw-AR), incorporam duas equações onde a primeira traduz a lei da conservação da massa e a segunda a lei da conservação do momento (FURTADO, 2013). O modelo microscópico considera todo o fluxo de tráfego como sendo uma corrente de veículos. Os aspectos dinâmicos desse fluxo de tráfego são formados pelas interações subjacentes de cada veículo. Geralmente é amplamente determinado pelo comportamento de cada veículo e também pelas características físicas de cada veículo (MAERIVOET, 2005). No modelo Cinético ou Mesoscópico, a identificação da posição e da velocidade dos veículos é feita por uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. Os modelos matemáticos referentes a esta escala são baseados em equações diferenciais similares à equação de Boltzmann (BOGO; GRAMANI, 2015).

Este trabalho tem como objetivo fazer uma abordagem do modelo teórico microscópico, em ênfase o modelo FVD (*Full velocity Difference*). No capítulo 2 será abordado uma breve histórico dos estudos do tráfego e da teoria de fluxo de tráfego, definições e conceitos importantes da teoria. No capítulo 3, teremos uma breve abordagem de alguns dos modelos microscópicos. Por fim no capítulo 4, as simulações numéricas que serão realizadas pelo método de Runge-Kutta de 4^a ordem, utilizando o software MATLAB.

No Capítulo 5, faremos as conclusões finais.

2. O FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS

Neste capítulo iremos abordar um breve histórico sobre as origens da teoria de fluxo de tráfego e estudos de tráfego. Por fim abordaremos os conceitos mais básicos e as relações fundamentais do fluxo de tráfego.

2.1 Histórico sobre o Estudo do Fluxo de Tráfego de veículos

Durante o século XIX nos EUA foi introduzido uma profunda influência sobre o transporte, pois até então todos os serviços de transporte eram a pé, cavalo ou veículos de tração animal. Com o advento da evolução industrial e das grandes invenções da época como o motor a vapor barcos a vapor e a criação das estradas de ferro onde desenvolvimento do transporte passou a receber uma maior atenção industrial que de certa forma ajudou a alavancar o transporte hidroviário e ferroviário. O desenvolvimento do transporte ferroviário nos EUA foi de suma importância para sua transformação através da colonização e o controle de movimentação de cargas. Até o final do século XIX o transporte nos Estados Unidos mostrou-se de suma importância para economia e a para a vida das pessoas através do transporte urbano. Porém não somente houve o crescimento e desenvolvimento do transporte urbano, mas também aéreo e rodoviário que foram um grande marco para o desenvolvimento militar e urbano.

No advento do século XX, e a fundação da Ford Motor Company e suas técnicas de produção em série, no ano de 1901 havia cerca de 8 mil automóveis registrados nos Estados Unidos, 29 anos depois já havia cerca de 23 milhões de automóveis. Com o crescimento explosivo do número de automóveis no século XX as rodovias não eram capazes de atender a demanda e além da necessidade do aperfeiçoamento da infraestrutura das rodovias havia uma necessidade do gerenciamento de veículos. Durante a passagem desse período de expansão e consolidação, o período de 1970 a grande demanda e ultrapassagem das capacidades levou a necessidade do controle da demanda. Na década de 1980 o gerenciamento e controle de tráfego foi aperfeiçoado pelo computador que chegará a qualidades superiores comparados aos computadores da década de 1950. A partir de então já era possível o uso de computadores para realização de simulações computacionais do fluxo de tráfego, que possibilitava através da análise de resultados empíricos e simulados estabelecer um comparativo de dados estatísticos afim de prever o comportamento de veículos.

O primeiro modelo matemático para fluxo de tráfego foi desenvolvido por volta de 1920 produzido por Frank Knight, o modelo se baseava na análise de tráfego em

equilíbrio e que mais tarde foi aperfeiçoado por John Glen Wardrop, chamado de primeiro e segundo princípio de equilíbrio de Wardrop em 1952. No ano de 1935 no 14º Encontro Anual de Comitê de Pesquisas rodoviárias, um engenheiro americano chamado Bruce Douglas Greenshields, que havia desenvolvido uma teoria sobre seus experimentos em campo com o título “A Study of Traffic Capacity” e que foi publicada no mesmo ano. A obra de Greenshields teve grandes contribuições para o estudo de fluxo de tráfego e ao decorrer dos anos outros pesquisadores foram aperfeiçoando o modelo de Greenshields graças a adventos modernos.

Embora limitada, a Teoria do Fluxo de Tráfego tradicional, decorrente do trabalho de Greenshields, foi aqui utilizada para apresentar as relações básicas que permitirão uma análise inicial dos fenômenos da operação de tráfego. O primeiro passo para conhecer a Teoria do Fluxo de Tráfego é o estudo das relações entre fluxo de tráfego e velocidade de percurso. Essas relações são expressas pela equação de continuidade do tráfego e a tradicionalmente chamada equação fundamental do tráfego. Esta última recebeu esse nome por ter sido uma das primeiras relações que permitiram completar uma teoria capaz de dar explicações relevantes sobre fenômenos de interesse (Cucci Neto, 2017).

Outras notáveis contribuições posteriores de modelagem de tráfego foram desenvolvidas por Reuschel (1950) e Pipes (1953) que usavam um modelo microscópico de tráfego que descrevia o movimento dos veículos detalhadamente em uma rota conhecido como Car-Following. E por outro lado Lighthill e Whitham (1955), que propuseram um modelo macroscópico baseado em mecânica dos fluidos, o modelo descrevia o tráfego como um fluido contínuo. O modelo desenvolvido por Lighthill e Whitham apresentava uma boa descrição de fenômenos básicos do tráfego, tais como a propagação de ondas de choque. Contudo o modelo só apresenta bons resultados de ondas de choque quando são separadas por um tempo relativamente considerável, ou seja, de um estado estacionário para outro. Por outro lado, o modelo de Reuschel e Pipes apresentava resultados razoáveis conceitualmente, mas não houve nenhuma verificação experimental do mesmo por alguns anos. Todavia em meados dos anos 50 os modelos de tráfego atraíram bastante atenção da comunidade científica e por influência de vários eventos houve um rápido desenvolvimento da teoria de fluxo de tráfego, e então a General Motors contratará um novo executivo Larry Hafstad, que tinha o objetivo de transformar os laboratórios da General Motors líder em ciências básicas, além do que a mesma foi por alguns anos. Outros notáveis pesquisadores contratados foram Robert Herman e Elliott Montroll que tinham como propósito investigar o modelo Car-Following. Havia muitos outros cientistas renomados na pesquisa como John Campbell e Chandler que se envolveram no projeto. Por alguns anos os pesquisadores da General Motors promoveram estudos com intuito de aperfeiçoar o modelo Car-Following e criar um modelo matemático que apresentasse melhores resultados possíveis em situações e comportamentos diversos. Os resultados alcançados pela General Motors foram de suma importância para estudo de tráfego e que são a base dos modelos mais eficientes e precisos usados na atualidade.

Vale ressaltar a existência de outros modelos macroscópicos e Mesoscópicos de TFT que foram desenvolvidos e estudados por outros cientistas e que também apresentam bons resultados no que se objetivasse.

2.2 Definições Básicas

Os modelos matemáticos da Teoria de Fluxo de tráfego baseiam-se nas abordagens macroscópicas, microscópicas, entre outras. Essas abordagens consistem na análise de certas variáveis que são os parâmetros determinantes das características de cada modelo de fluxo de tráfego. As características fundamentais do fluxo de tráfego são o fluxo, velocidade e densidade. Essas características podem ser determinadas tanto no nível macroscópico quanto microscópico por seus parâmetros particulares de cada abordagem. Através da tabela abaixo é possível verificar os respectivos parâmetros de cada abordagem.

Tabela 1: Relação entre parâmetros macroscópicos e microscópicos.

Características de tráfego	Microscópico	Macroscópico
Fluxo	Headways	Taxa de Fluxo
Velocidade	Velocidade individual	Velocidade Média
Densidade	Espaçamento	Taxa de densidade

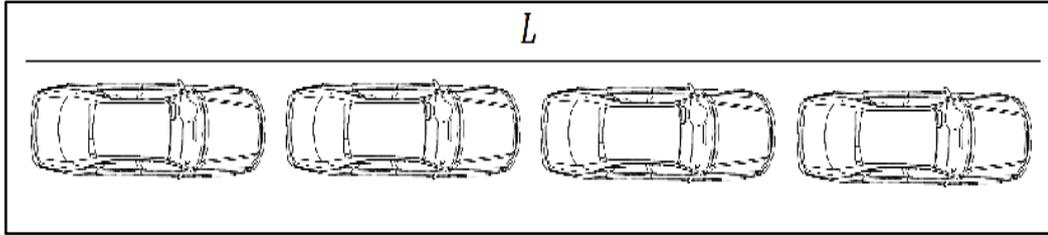
Fonte:(ADOLF D. MAY,1990)

É válido ressaltar que as características fundamentais de fluxo de tráfego apesar de poderem ser obtidas através dos parâmetros de cada abordagem, elas são provenientes da abordagem macroscópica que foi a primeira a ser desenvolvida, como modelos de tráfego em equilíbrio. A mesma abordagem se baseia nos modelos hidrodinâmicos, portanto é notório uma certa semelhança com as relações da hidrodinâmica.

2.2.1 Velocidade, densidade e fluxo

Analogamente como é definido na hidrodinâmica o fluxo de um determinado fluido, a mesma associação é usada na teoria de fluxo de tráfego para determinação dos parâmetros fundamentais de tráfego através da relação, $\phi = \rho v$. A densidade ou concentração de veículos ρ é determinada pelo número de veículos presentes num dado comprimento L da via como representado na figura 2.1.

Figura 1: Esquema de veículos num determinado espaço L .



Fonte: Autor.

Considerando então n como um número de veículos presentes no intervalo de comprimento L , determinamos então a densidade pela seguinte relação

$$\rho = \frac{n}{L}, \quad (2.1)$$

o fluxo de tráfego ou volume de tráfego ϕ possui dependência temporal e de posição, portanto considerando v, ρ e ϕ constantes num intervalo de tempo Δt o as relações de tempo mostram que

$$\phi = \frac{n}{\Delta t} \quad v = \frac{x}{\Delta t} \quad \text{e} \quad L = \frac{v}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Através das equações (2.1) e (2.2) e relacionando as variáveis em comum é possível determinar que o fluxo de veículos é,

$$\phi(x, t) = \rho(x, t)v(x, t). \quad (2.3)$$

A velocidade é outra grandeza extremamente importante e que poderá ser determinada de acordo com o regime que objetiva obter resultados. Num regime permanente onde não ocorre variação de fluxo e densidade. É possível determinar através da relação

$$v = \frac{\phi}{\rho} \quad (2.4)$$

Na maioria dos casos esses valores serão variáveis e a velocidade poderá ser obtida através da média temporal ou espacial,

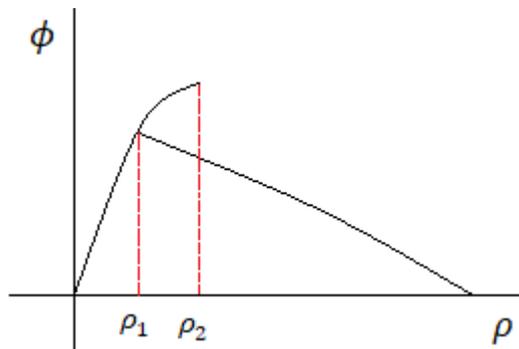
$$\bar{v}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad \text{e} \quad \bar{v}_s = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}} \quad (2.5)$$

2.2.2 A curva do fluxo de tráfego e a Histerese

O estudo do fluxo de tráfego tem como propósito entender os fenômenos de tráfego objetivando no desenvolvimento de melhores condições de transporte e infraestrutura de

tráfego mais eficientes que minimizem problemas e condições de congestionamento. Por volta de 1920 foi produzido o primeiro modelo matemático de análise de tráfego em equilíbrio por Frank Knight. O trabalho realizado por Knight serviu de base para a formulação do primeiro e segundo princípio de equilíbrio de Wardrop que estabelece uma relação das condições de tráfego e o fluxo de tráfego. O diagrama fundamental de fluxo de tráfego representa a relação entre o fluxo de tráfego e a densidade de tráfego. Este diagrama permite conhecer e prever a capacidade de uma via, o comportamento do fluxo e os limites de velocidade. Existem algumas formas que o diagrama fundamental pode se apresentar de acordo com cada caso e variáveis relacionadas. A curva do fluxo de tráfego em três diferentes estados que podem ser compreendidos pela figura abaixo:

Figura 2: Diagrama fundamental

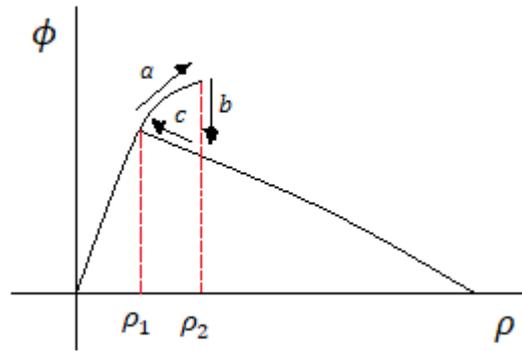


Fonte: Autor.

- i. A região de densidade mais baixa conhecido como região de fluxo livre, é o estado onde os motoristas podem trafegar com velocidades desejáveis próximas a velocidade máxima permitida na via.
- ii. Neste ponto de densidade intermediária o fluxo passa a não depender somente da densidade, mas também pela configuração dos veículos. Este estado pode tanto ter uma configuração de fluxo livre quanto de congestionamento. Também chamada de região de meta-estabelecida.
- iii. A região de alta densidade, neste estado o fluxo diminui consideravelmente e a configuração dos veículos geram engarrafamento.

O efeito de histerese é uma característica específica da segunda região onde pode existir uma alta variabilidade de comportamentos. Se a densidade ρ se mantém no ponto de densidade média entre ρ_1 e ρ_2 os veículos são capazes de manter suas velocidades. Por outro lado, quando a densidade é maior ou igual a ρ_2 qualquer desaceleração gera engarrafamento instantaneamente. Porém se o fluxo se recupera de um estado de engarrafamento para fluxo livre (indicado por c), o fluxo aumenta consideravelmente até se tornar um fluxo livre (indicado por a).

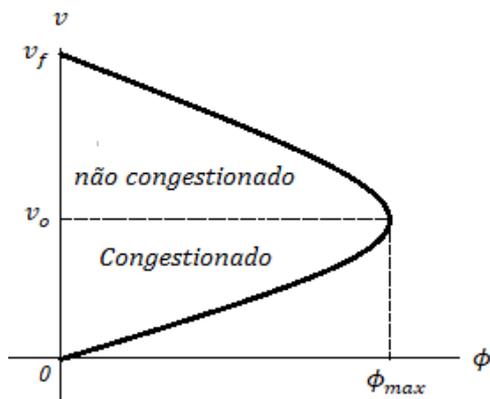
Figura 3: Efeito de histerese



Fonte: Autor.

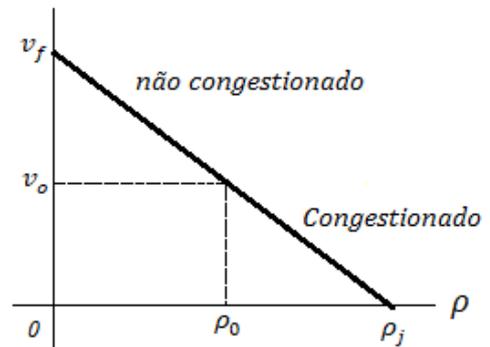
Outros diagramas importantes são os diagramas de Fluxo-Velocidade e Densidade-velocidade que relaciona as demais variáveis da equação fundamental de tráfego. Os diagramas permitem compreender a comportamento do tráfego quanto ao valor de suas respectivas variáveis.

Figura 4: Diagrama fluxo-velocidade



Fonte: Autor.

Figura 5: Diagrama fluxo-densidade



Fonte: Autor.

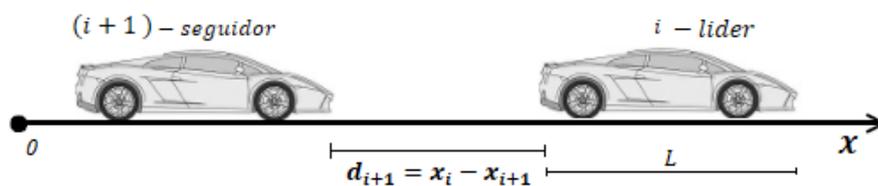
3. A TEORIA MICROSCÓPICA DO FLUXO DE TRÁFEGO

A teoria microscópica consiste na análise do comportamento de tráfego através das respectivas interações entre os veículos. Diferente da abordagem macroscópica, aqui cada veículo é tratado como uma partícula sem massa e é levado em consideração as interações que cada veículo tem com os demais. Como já mencionado na sessão 2.1 essa abordagem foi inicialmente proposta por Pipes (1953) e posteriormente aperfeiçoado pela General Motors. As primícias dessa abordagem se baseiam num modelo de perseguição de um veículo denominado líder, onde os demais veículos seguidores respondem as acelerações e desacelerações como estímulos. Esse modelo de perseguição usualmente é denominado como modelo car-following.

3.1 O modelo car-following

O modelo car-following ou modelo de perseguição assim como os modelos macroscópicos hidrodinâmicos, o modelo microscópico tem suas características e parâmetros específicos. As principais características da abordagem microscópica são definidas através do espaçamento ou *distance-headway* que é a distância relativa entre o veículo líder e o perseguidor e o tempo de *headway*.

Figura 6: Modelo de perseguição Car-Following



Fonte: Autor.

De acordo com a ilustração da figura 6, i é denominado o veículo líder e o perseguidor como sendo o $(i + 1)$ -ésimo veículo e L o comprimento do veículo i . O espaçamento entre os sucessivos veículos como ilustrado na figura acima pode ser representado pela equação da relação fundamental:

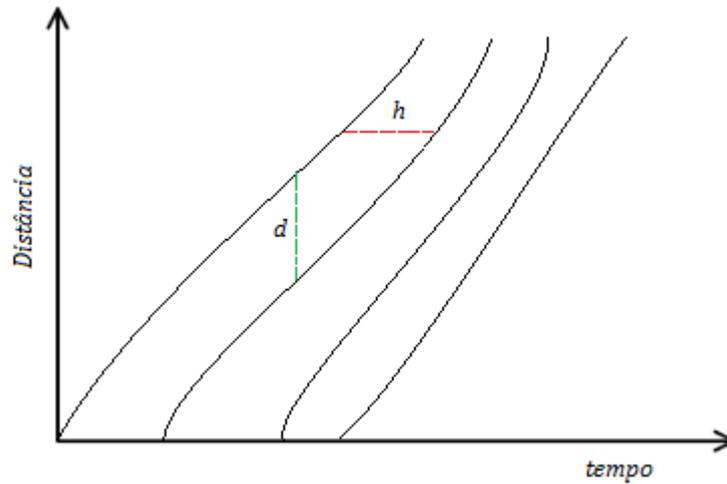
$$d_{i+1} = h_{i+1} \dot{x}_i \quad (3.1)$$

onde,

h_{i+1} é o *headway* do veículo $(i + 1)$ num determinado espaço (s)
 \dot{x}_i é a velocidade do veículo num dado tempo t ($m.s^{-1}$)

O *headway* ou *time-headway* como é definido literalmente, é dado pela diferença do tempo entre os sucessivos veículos num determinado ponto da via. O mesmo pode ser observado na seguinte figura meramente ilustrativa:

Figura 7: Headway espacial e temporal.



Fonte: Autoria própria

Assim como na abordagem macroscópica onde temos uma relação fundamental na qual a velocidade pode ser obtida através de outras duas variáveis, o mesmo acontece aqui na abordagem microscópica, e é possível estabelecer uma equivalência através da média do espaçamento e do *headway*

Tabela 2: Relação das variáveis de tráfego

Microscópico	Macroscópico
d	$\rho = \langle d \rangle^{-1}$
h	$\phi = \langle h \rangle^{-1}$
$d = hv$	$\phi = \rho v$

Fonte: Autor.

O espaçamento e o *headway* são variáveis de grande importância nos modelos de perseguição desenvolvidos pela General Motors uma vez que estes modelos usam um método de estímulo e resposta no qual seu comportamento é estabelecido pela seguinte relação:

$$\mathbf{RESPOSTA} = \mathbf{FUNÇÃO}[\mathbf{sensibilidade, estímulo}]$$

Como uma função da sensibilidade e estímulo a resposta pode ser sempre representada por uma aceleração ou desaceleração, uma vez que o estímulo está relacionado com a velocidade relativa entre os veículos. Enquanto a sensibilidade é uma variável que

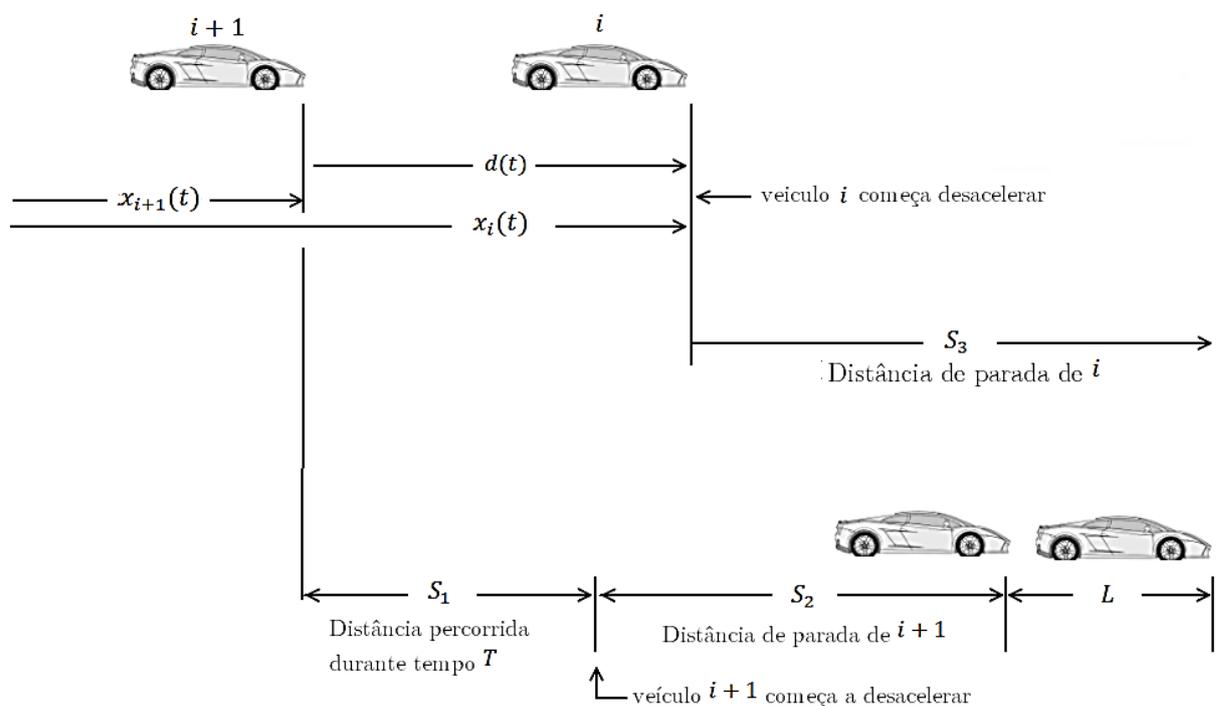
relaciona a proporcionalidade entre o estímulo e resposta, portanto é plausível dizer que a mesma apresenta uma relação temporal.

A base para toda formulação desse modelo de perseguição é proveniente da mecânica newtoniana. O estudo realizado para determinar os estímulos e respostas é claramente baseado no estudo dos movimentos e das suas causas, que comumente conhecemos como dinâmica newtoniana. Apesar de algumas manipulações no fator de sensibilidade como será mostrado posteriormente no desenvolvimento do modelo General Motors (GM) para uma melhor aproximação de resultados mais realistas e os modelos de velocidade óptima presentes no capítulo 4 que sofrem algumas alterações, todos são formulados em cima da dinâmica newtoniana.

3.1.1 Modelo General Motors ou Modelo Linear

O modelo inicial General Motors (GM) proposto por Chandler et al. (1958) foi a base de todos os modelos os quais foram desenvolvidos pela General Motors, que se basearam no modelo de Louis A. Pipes (1953), onde a equação da dinâmica de seu modelo é obtida através das equações da mecânica newtoniana. Para determinar as equações do movimento do modelo de perseguição consideremos uma dada a posição relativa entre dois veículos que percorrem um espaço e depois desaceleram até que parem.

Figura 3.3 - Modelo cinemático car-following



Fonte: Autor.

onde,

$d(t)$ = Espaçamento entre os veículos;

$x_i(t)$ = Posição do veículo i no tempo t ;

S_1 = Distância percorrida pelo veículo $(i + 1)$ durante o tempo de reação T ;

S_2 = Distância percorrida por $(i + 1)$ durante a desaceleração;

S_3 = Distância percorrida por (i) durante a desaceleração;

L = Espaçamento final após os veículos pararem.

Através da figura (3.3) podemos estabelecer que o espaçamento entre os veículos no tempo t na qual não há colisão pode ser escrito como:

$$d(t) = x_i(t) - x_{i+1}(t) = S_1 + S_2 - S_3 + L \quad (3.2)$$

Dado a relação acima podemos reescreve-las em termos das velocidades e acelerações através das equações da cinemática. Para obter uma resposta que ocorra num determinado tempo $t + T$ como função de um estímulo no tempo t . Podemos escrever o primeiro termo S_1 como um múltiplo do termo T e as demais através da equação de Torricelli. Assim temos que,

$$x_i(t) - x_{i+1}(t) = T v_{i+1}(t) + \frac{v_{t+T}^2}{2a_{i+1}} - \frac{v_i^2}{2a_i} + L \quad (3.3)$$

Se durante o momento final onde os dois veículos têm velocidades nulas considerarmos na mesma posição, é possível estabelecer que $S_2 = S_3$, então o espaçamento se torna

$$x_i(t) - x_{i+1}(t) = T v_{i+1}(t + T) + L \quad (3.4)$$

e desta forma estabelecemos que o espaçamento pode associado ao tempo de reação T e do espaçamento entre os dois veículos depois da parada. Como a resposta desejado pelo estímulo é uma aceleração, derivando a equação (3.4) em respeito a t temos que

$$\frac{d}{dt} [x_i(t) - x_{i+1}(t)] = \frac{d}{dt} [T v_{i+1}(t + T) + L] \quad (3.5)$$

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = T a_{i+1}(t + T) \quad (3.6)$$

Por fim isolando $a_{i+1}(t + T)$ temos

$$a_{i+1}(t + T) = \frac{1}{T} [v_i(t) - v_{i+1}(t)] \quad (3.7)$$

Partindo desse modelo temos a relação de que a aceleração é uma função do estímulo(velocidade) e da sensibilidade T^{-1} , pode-se assumir de que a sensibilidade é um

fator de proporcionalidade entre a resposta e o estímulo. Partindo dessa primícia o primeiro modelo GM assumiu que a sensibilidade T^{-1} deveria ser uma constante, e que a aceleração deveria ser dar no tempo $t + T$, sendo T o tempo de atraso da resposta. Portanto o modelo assumiria a seguinte formulação:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + T) = \lambda[\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)] \quad (3.8)$$

Então através da equação o estímulo ou a velocidade relativa entre o veículo seguidor e o veículo líder poderia admitir três valores, e uma resposta para cada valor diferente. Portanto a resposta ou aceleração se daria pelas seguintes relações

$$\text{Se } \dot{x}_i(t) > \dot{x}_{i+1}(t), \text{ então } \ddot{x}_{i+1}(t + T) \text{ é } \textit{positivo} \quad (3.9)$$

$$\text{Se } \dot{x}_i(t) < \dot{x}_{i+1}(t), \text{ então } \ddot{x}_{i+1}(t + T) \text{ é } \textit{negativo} \quad (3.10)$$

$$\text{Se } \dot{x}_i(t) = \dot{x}_{i+1}(t), \text{ então } \ddot{x}_{i+1}(t + T) \text{ é } \textit{nulo} \quad (3.11)$$

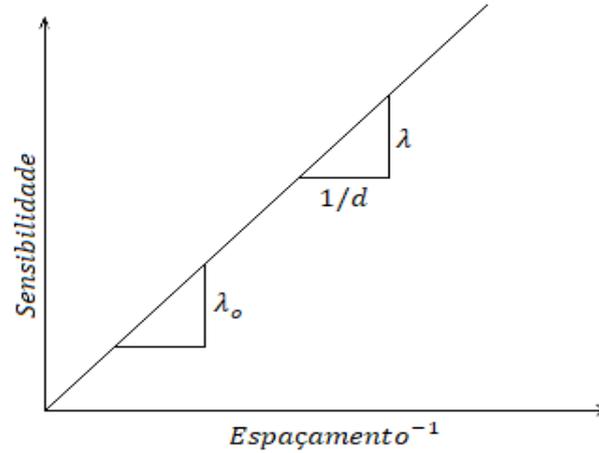
E através da relação (3.11) é possível observar que quando as velocidades são iguais o primeiro modelo apresenta uma grande limitação. Uma vez que quando as velocidades forem iguais o modelo não permite aceleração para o veículo seguidor independente se os veículos estão perto ou distantes um do outro, levando a resultados irrealistas.

Para corrigir a limitação do primeiro modelo, a General Motors desenvolveu um novo modelo, sugerindo que fosse implementado dois estados para o termo de sensibilidade. Quando os dois veículos estivessem próximos um valor λ_1 deveria ser usado, e se os dois veículos estivessem longe, um segundo valor λ_2 deveria ser utilizado. Dessa forma a equação do segundo modelo adquire a seguinte forma:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ou \\ \lambda_2 \end{pmatrix} [\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)] \quad (3.12)$$

Contudo devido as dificuldades de determinar valores de sensibilidade apropriados para cada situação a General Motors conduziu experimentos e através da análise dos resultados chegaram à formulação de um novo fator de sensibilidade. Através dos estudos realizados notou-se que ao associar os valores apropriados de sensibilidade com a distância entre nos veículos notou-se que valor de sensibilidade aumento linearmente e proporcional ao inverso do espaçamento.

Figura 9: Relação sensibilidade-espacamento.



Fonte: Autor.

Assim é possível relacionar matematicamente um fator de sensibilidade relacionado ao espaçamento entre os veículos e que seja apropriado para todos os instantes. Portanto pode-se escrever o fator λ como sendo,

$$\lambda_0 = \lambda \frac{1}{d} = \lambda d \quad (3.13)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{[x_i(t) - x_{i+1}(t)]} \quad (3.14)$$

Então depois do aperfeiçoamento do fator de sensibilidade o terceiro modelo da General Motors poder ser escrito através da equação:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + T) = \frac{\lambda_0}{[x_i(t) - x_{i+1}(t)]} [\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)] \quad (3.15)$$

Apesar da equação acima oferecer valores relativamente satisfatórios, notou-se que deveria ser introduzido no fator de sensibilidade a velocidade do veículo perseguidor. Isso se justifica pelo fato de que uma vez que o fluxo de tráfego aumentasse o veículo perseguidor seria mais sensível as velocidades relativas. Assim o quinto modelo GM foi aperfeiçoado para a seguinte equação:

$$\ddot{x}_{i+1}(t + T) = \frac{\lambda' [\dot{x}_{i+1}(t + T)]}{[x_i(t) - x_{i+1}(t)]} [\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)]. \quad (3.16)$$

3.1.2 O Modelo não-linear

Após o desenvolvimento do quarto modelo a General Motors com intuito de aperfeiçoar e generalizar o fator de sensibilidade. Então fora implementado dois fatores exponenciais m e l , tornando a equação em

$$\ddot{x}_{i+1}(t+T) = \frac{\lambda_{l,m} [\dot{x}_{i+1}(t+T)]^m}{[x_i(t) - x_{i+1}(t)]^l} [\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)] \quad (3.17)$$

Esta equação é considerada o modelo final car-following desenvolvido pela General Motors e todos os modelos anteriores podem ser representados como casos especiais do quinto modelo ou modelo não-linear. É possível assumir o primeiro e segundo modelo quando $(m = l = 0)$, e o terceiro e o quarto quando $(m = 0, l = 1)$ e $(m = 1, l = 1)$ respectivamente. O modelo final generalizado pode também assumir a forma dos modelos macroscópicos de regime único conhecidos como modelos de tráfego em equilíbrio (*Traffic Stream Models*) que será discutido na próxima seção.

3.2 Modelos de Velocidades do Tráfego de Veículos em Equilíbrio

Os modelos de tráfego em equilíbrio são modelos que relacionam as variáveis fundamentais fluxo, velocidade e densidade. Através desses modelos é possível estabelecer um diagrama fundamental para cada modelo específico relacionando as variáveis entre si. Esse tipo de modelo é muito útil para analisar condições de congestionamento e comportamentos das demais variáveis em relação a suas respectivas variações.

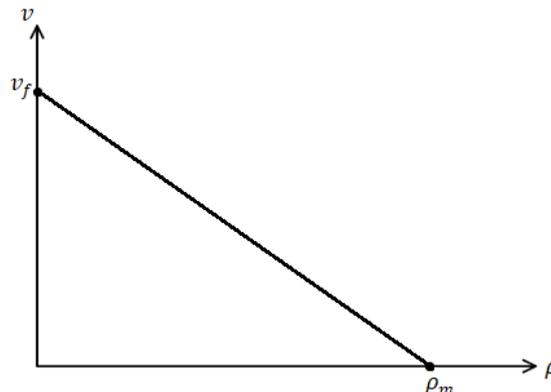
3.2.1 Modelo de Greenshields

O primeiro modelo de tráfego em equilíbrio foi desenvolvido por Greenshields (1934), que foi baseado em dados empíricos obtidos através de registros fotográficos. Greenshields propôs uma relação linear entre a velocidade e a densidade, dada pela relação:

$$v = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) \quad (3.18)$$

onde v_f é a velocidade de fluxo livre e ρ_m a densidade máxima

Figura 10: Diagrama Greenshields: densidade-velocidade



Fonte: Autor.

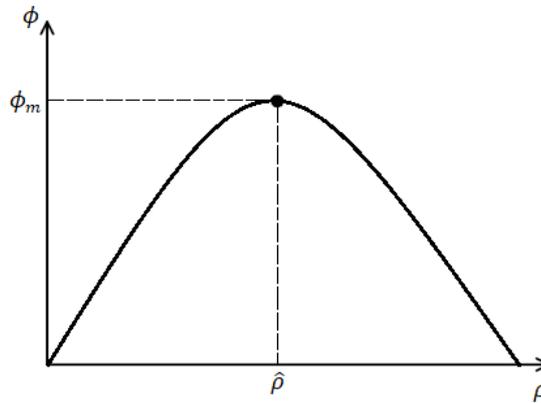
Da mesma forma podemos estabelecer uma relação com fluxo e densidade pela equação fundamental

$$\phi = \rho v \rightarrow \rho v = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_j}\right) \rho \quad (3.19)$$

$$\phi = v_f \rho - \frac{\rho^2}{\rho_m} v_f. \quad (3.20)$$

Através do máximo da função observa-se que $\hat{\rho}$ que corresponde a densidade no ponto de máximo é igual a $\rho_m/2$. A curva de fluxo-densidade portanto é representada por um modelo parabólico.

Figura 11: Diagrama de Greenshields: fluxo-densidade



Fonte: Autoria própria

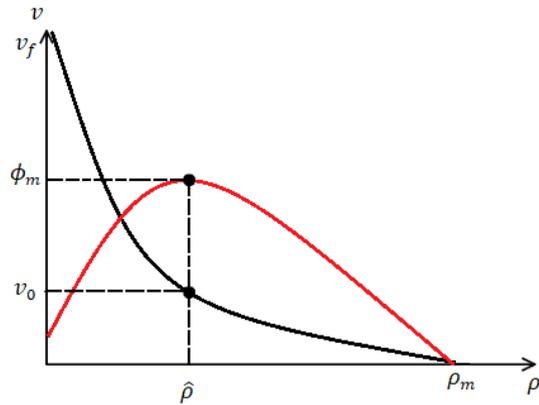
3.2.2 Modelo de Greenberg

O modelo proposto por Greenshields apesar de simples possuía algumas limitações de que só apresentava resultados satisfatórios nas faixas intermediárias de v e ρ , e a curva de densidade-fluxo não era exatamente simétrica. Portanto Greenberg (1959) propôs um modelo logarítmico dado pela relação

$$v = v_f \ln \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \quad (3.21)$$

Assim como anteriormente, podemos representar o mesmo através de uma diagrama densidade-velocidade e densidade-fluxo. O modelo proposto por Greenberg apresenta resultados satisfatórios para altas densidades, porém apresenta resultados irrealistas para baixas densidades.

Figura 12: Curva densidade-velocidade e densidade-fluxo Greenberg



Fonte: Autor.

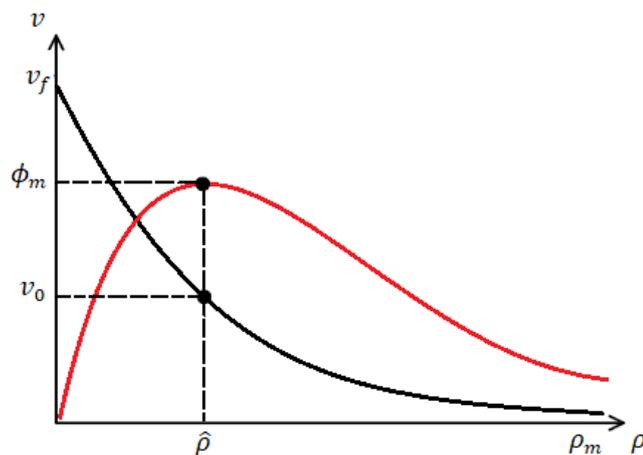
3.2.3 Modelo de Underwood

Em 1961 Underwood propôs um modelo exponencial o qual apresentava resultados satisfatórios contrários ao modelo de Greenberg. Para baixas densidades apresentava resultados satisfatórios, porém irrealistas para altas densidades. O modelo proposto por Underwood é dado pela seguinte expressão:

$$v = v_f \exp\left(-\frac{\rho}{\hat{\rho}}\right) \quad (3.22)$$

O diagrama densidade-velocidade e densidade-fluxo do modelo de Underwood pode ser observado na figura abaixo:

Figura 13: Curva densidade-velocidade e densidade-fluxo Underwood



Fonte: Autor.

4. O MODELO DA DIFERENÇA DE VELOCIDADE TOTAL E AS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo abordaremos os modelos de velocidade Óptima e as simulações numéricas através do método de Runge-kutta de quarta ordem para resolução das equações diferenciais ordinárias. A simulação numérica é uma importante ferramenta no estudo do fluxo de tráfego, uma vez que se pode obter informações dos resultados numéricos que não podem ser estudados de forma tão aprofundada através da experimentação simples. Por fim, faremos a simulação de fluxo de tráfego em uma via usando o modelo conhecido como “modelo diferença de velocidade total” proposto por Jiang et al. (2001).

4.1 Modelos velocidade óptima

O modelo velocidade óptima é um modelo tipo car-following proposto por Bando et al. (1995). O modelo foi desenvolvido pensando na evolução da dinâmica de congestionamento, na qual é adicionado uma pequena perturbação sem nenhuma origem específica tais como acidentes ou sinais de tráfego. Diferente dos modelos propostos pela General Motors onde os veículos devem manter uma distância segura entre os veículos procedentes, que depende da velocidade relativa entre os veículos, no modelo velocidade óptima cada veículo possui uma velocidade legal que dependerá do *headway* espacial dos veículos procedentes. Essa velocidade legal é chamada de velocidade óptima e sua dinâmica é descrita pela equação

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = \lambda[V(\Delta x_{i+1}) - \dot{x}_{i+1}], \quad (4.1)$$

onde,

$\Delta x_{i+1}(t) = x_i(t) - x_{i+1}(t)$ é o *headway* espacial entre os veículos,

e para cada veículo $i = 1, 2, \dots, N$, na qual N é o numero total de veículo na via. E λ é uma constante de sensibilidade e $V(\Delta x)$ é a velocidade óptima. A velocidade óptima determinada ao condutor é dada em relação ao espaçamento entre os veículos. Quando a distância entre os veículos se torna curta a velocidade deve ser reduzida. Por outro lado, se o espaçamento for muito grande o veículo poderá se mover com uma velocidade maior desde que não exceda a velocidade máxima V_{max} permitida na via. Aqui desconsideramos o tempo do atraso de resposta pois os estudos realizados por Bando et al. (1998) sugerem que deixam de ser significativos uma vez que seus valores são muito pequenos.

4.1.1 Estabilidade linear do modelo e discussão do estado de equilíbrio

A análise da estabilidade do modelo OV realizada por Bando et al. (1995) propõem que ao considerar um número muito grande de veículos N e idênticos entre si, ao serem inseridos num circuito de comprimento L , as condições de contorno da velocidade óptima não são essenciais para investigação analítica e numérica. O sistema de equações diferenciais obtidos admite solução estacionaria dos N veículos na pista que estão igualmente espaçados entre si por uma distância $b = N/L$ a uma mesma velocidade óptima $V(b)$. A solução estacionária de (4.1) é dada pela equação

$$x_n^{(0)}(t) = bn + ct \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2)$$

onde b é o espaçamento constante entre dois veículos sucessivos e $c = V(b)$ é a velocidade constante do regime estacionário.

Para estudar a estabilidade linear do estado da solução será introduzido um fator de perturbação $y_n(t)$

$$x_n = x_n^{(0)} + y_n, \quad |y_n| \ll 1. \quad (4.3)$$

Dessa forma obtermos através de (4.3) que

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = (x_{n+1}^{(0)} + y_{n+1}) - (x_n^{(0)} + y_n) = \Delta y_n + b \quad (4.4)$$

Portanto podemos escrever a equação da perturbação como

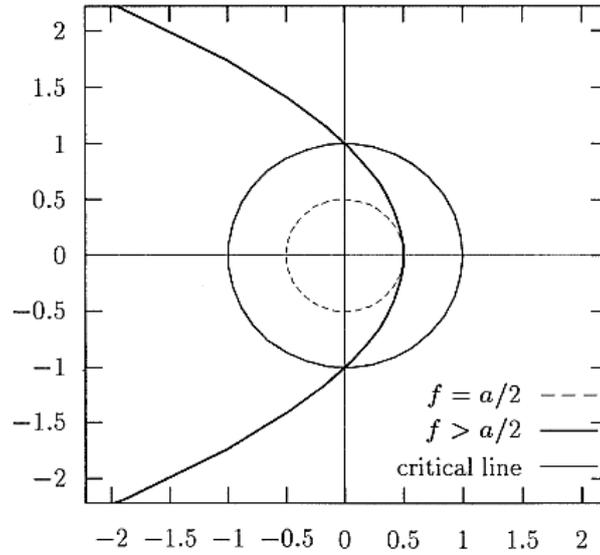
$$\ddot{y}_n(t) = \lambda[V(\Delta y_n + b) - \dot{y}_n - k] \quad (4.5)$$

Após expandir $V(\Delta y_n + b)$ em serie de Taylor e desprezar os termos não lineares obtemos que:

$$\ddot{y}_n(t) = \lambda[f(\Delta y_n) - \dot{y}_n] \quad f = V'(b) \quad , \quad (4.6)$$

A solução da equação (4.6) é obtida através de uma série de Fourier de tipo $e^{-i\gamma_k n + zt}$, onde $z = u + iv$ (u e v reais) é um número complexo e fator $\gamma_n = \frac{2\pi}{N}j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$). Portanto a solução da equação é instável, se a amplitude aumentar indefinidamente com o tempo, que ocorre quando $u > 0$. Caso $u < 0$ então a solução estacional será estável. Porventura se $u = 0$ a fronteira entre as duas regiões de instabilidade e estabilidade, determina uma região crítica dada no plano polar $f = \frac{\lambda}{2 \cos^2 \lambda/2}$. A estabilidade permite que o condutor se desloque com velocidade e distância segura. Se $f < \lambda/2$ o estado é instável porque $u < 0$ para qualquer γ_k ; se $f > \lambda/2$ o estado é instável porque existe pelo menos um γ_k tal que $u > 0$; se $f = \lambda/2$ o estado mantém-se na região crítica (Bando et al., 1998).

Figura 14: Região de estabilidade



Fonte: Bando et al. (1995)

4.1.2 A função velocidade Ótima

Para a determinação da função velocidade ótima $V(d)$, algumas condições devem ser satisfeitas que são:

- A função precisar ser contínua e definida num intervalo $d \geq 0$;
- A função deve ser precisamente crescente ($f(d) \geq 0, \forall d \geq 0$). Nesta situação os condutores se deslocam mais rápido à medida que o *headway* espacial aumenta.
- A função deve possuir um limite inferior. Dado um $d_0 \geq 0$ de forma que $V(d) = 0$ no intervalo entre 0 e d_0 . A constante d_0 é denominada *jam headway* e funciona como um limiar onde o condutor tende a parar quando $d \leq d_0$.
- A função deve ter um limite superior $\lim_{d \rightarrow \infty} V(d) = v_{max}$. Na qual v_{max} é a velocidade máxima permitida na via.

Uma função $V(d)$ proposta que satisfaz as condições (a) e (b) foi proposta por Orosz et al. (2004),

$$V(d) = \begin{cases} 0 & 0 \leq d \leq 1 \\ \frac{v_{max}(d-1)^3}{1+(d-1)^3} & d < 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Na qual a constante $d_0 = 1$. Apesar desta função satisfazer (a) e (b) a mesma possui um ponto de inflexão $V''(d_c) = 0$. Podemos interpretar o ponto de inflexão como distância de inflexão ou distância de segurança que se espera uma ocorrência de um fluxo

estável. E esta inflexão é extremamente importante para se obter a onda de densidade do tráfego congestionado. Obviamente se o *headway* espacial for inferior a distância de segurança é de se esperar que o condutor para não bater no veículo à sua frente. Seguindo este sentido, Bando et al. (1995) propôs que a melhor escolha para função velocidade ótima seria:

$$V_1(d) = \tanh(d - 2) + \tanh(2). \quad (4.8)$$

A função proposta satisfaz todas as condições requisitadas à função velocidade ótima. Algumas modificações foram feitas na função através de dados obtidos ao estudar o tráfego nas autoestradas no Japão, resultando na equação:

$$V_2(d) = 16.8[\tanh 0.086(d - 25) + 0.913] \quad (4.9)$$

Na qual considerou-se que $d_0 \approx 7.0319m$, $v_{max} = 32.1384m/s$ e $d_c = 25m$. É notável que a função apresenta uma deficiência crítica pois não satisfaz a condição (c), na qual $V(d) < 0$ se $d > d_0$. Uma possível solução foi dada por:

$$V_3(d) = \max\{0, V_2\}. \quad (4.10)$$

Outra variação de da função (4.7) foi proposta por Li et al. (2012) a qual limita a velocidade máxima,

$$V(d) = \frac{1}{2}v_{max} \tanh(d - d_c) + \tanh(d_c) \quad (4.11)$$

onde d_c é a distância de segurança entre os veículos.

O modelo OV mesmo obtendo sucesso ainda apresentava algumas limitações. E tais limitações motivaram o desenvolvimento de vários outros modelos que tinham como base o modelo original acrescentado de novos estímulos. Dentre algumas das extensões do modelo OV se destacam o modelo *Generalized Force* (GF) proposto por Helbing e Tilch (1998), o modelo *Generalized Optimal Velocity* (GOV) por Li e Sun (2012), *Multiple Headway and Velocity Difference* (MHVD) por Xie et al. (2008) e o modelo *Full Velocity Difference* (FVD) por Jiang et al. (2001) o qual será o tema da próxima sessão do trabalho.

4.2 O Modelo da Diferença de Velocidade Total e suas aplicações

Apesar do modelo OV poder descrever algumas propriedades do fluxo de tráfego real como instabilidade de fluxo, evolução de congestionamento e formação de ondas de para-arranca, o modelo OV apresentava problemas de altas acelerações e desacelerações irrealistas. Para resolver os problemas, Helbing e Tilch propuseram o modelo *Generalized Force Model* (GF) (Jiang et al 2001). O modelo GF consiste no modelo OV com um acréscimo à função resposta,

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = \kappa[V(d) - v_{i+1}(t)] + \lambda\Theta(-\Delta v)\Delta v \quad (4.12)$$

onde λ é um coeficiente de sensibilidade e Θ é uma função degrau *Heaviside*. A função Θ assume valor 1 se a velocidade do veículo seguidor for maior que do veículo líder. Porém o modelo ainda apresentava alguns problemas quando a velocidade do veículo seguidor é maior que do veículo líder. Treiber et al (1999) também pontua que se os veículos procedentes estiverem muito rápido, os veículos não irão frear mesmo que o *headway* espacial seja menor que a distância segura, e este caso não pode ser explicado pelo modelo OV nem GF. (Jiang et al 2001).

Para solucionar o problema relacionado aos modelos GF e OV Jiang et al (2001) sugeriu um modelo que levasse em conta o fator Δv positivo. Uma vez que o modelo tem velocidade positiva e negativa em consideração, chamamos isso de modelo *Full Velocity Difference* (FVD) (Jiang et al 2001). Assim podemos escrever o modelo GF como,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{i+1}(t) = & \kappa[v_{max} - v_{i+1}(t)] + \kappa[V(d) - v_{max}] \\ & + \lambda\Theta(-\Delta v)\Delta v + \lambda\Theta(\Delta v)\Delta v. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Considerando que $\lambda\Theta(\Delta v)\Delta v$ é sempre positivo então o modelo FVD pode ser escrito como,

$$\ddot{x}_{i+1}(t) = \kappa[V(d) - v_{i+1}(t)] + \lambda\Delta v. \quad (4.14)$$

Comparado as modelos anteriores o modelo FVD é teoricamente mais realístico, porém possui uma limitação por modelar a diferença de velocidades simetricamente. O modelo FVD será nosso modelo usado nas simulações numéricas implementado ao software MATLAB usando o Método de aproximação de Runge-Kutta de 4^a Ordem.

4.3 Simulações Numéricas em MATLAB

MATLAB (*MaTrix LABoratory*) é um software de alta performance com ênfase em cálculo numérico que trata informações como matrizes que não requerem dimensionamento. Se apresenta bastante amigável e possui um ambiente fácil de usar, representando as expressões matemáticas em ambiente computacional como eles realmente são escritas matematicamente. Seus recursos de programação permitem resolver problemas numéricos semelhante a linguagens como Fortran, Basic e C. Outra função útil do MATLAB é a construção de gráficos interativos e diversificados. Apesar de sua simplicidade apresenta um tempo maior de compilação de código comparado a outras linguagens como Fortran 95, porém a nível de problemas numéricos simples o tempo de compilação se torna bastante curto, tais como a simulação tratada neste trabalho.

4.3.1 O Modelo e suas Definições

Para resolução as equações diferenciais do tipo problema do valor inicial (PVI) numericamente usaremos uma classe de métodos conhecido como métodos de Runge-kutta. Tratando-se de um método simples e mais preciso que os métodos de aproximação de Euler. A fórmula de Runge-Kutta envolve uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Através da expansão de uma função incremento em série de Taylor (Barroso et al., 1987) podemos escrever as equações da dinâmica de modelos microscópicos através do método de Runge-kutta da seguinte forma:

Dado o problema do valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (4.16)$$

onde, $\Delta t = 10^{-4}$

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(y_n) \\ k_2 &= \Delta t f\left(y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta t f\left(y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta t f(y_n + k_3) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para a simulação do Modelo *Full Velocity Difference* (FVD) o sistema se reduz de um sistema de EDO de segunda ordem para um sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = \kappa[V(d) - v_i(t)] + \lambda \Delta v. \end{cases} \quad (4.18)$$

Levando em conta as seguintes condições iniciais,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^{(0)} + \chi \\ x_i(0) &= x_i^{(0)}, n \neq 1 \\ x_i(0) &= 0 \end{aligned}$$

temos que as funções definidas em χ retorna valores distribuídos num intervalo entre 0 e 1. O sistema de equações (4.16) Deve ser resolvido para todos os veículos na via, onde $n = 1, 2, \dots, N$ na qual N é número total de veículos e $x_i^{(0)} = bn$. A função velocidade ótima usada nas simulações é a função proposta por Helbing et al. (1998). As simulações ocorrem em vias simples e consideraremos o comprimento dos carros igual a 5m por motivos práticos, e $\kappa = 0.41$ o qual é o ideal para intervalos de tempo $\Delta t = 10^{-4}$. A ideia

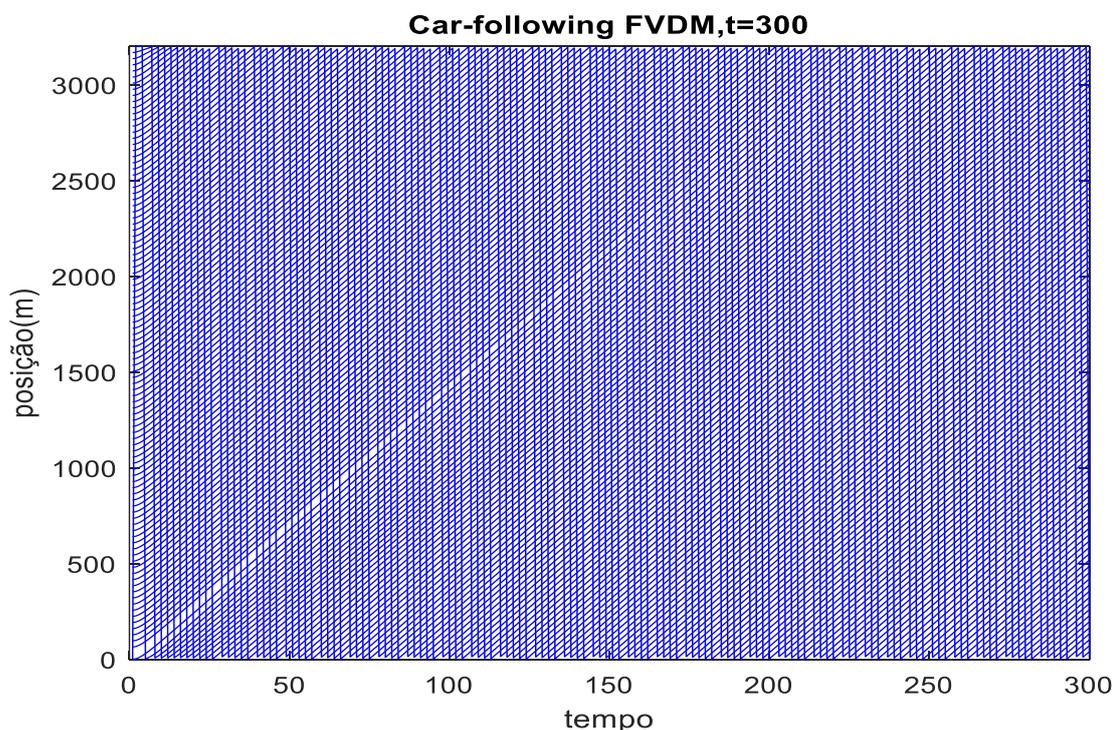
é estudar a estabilidade do fluxo de tráfego e o desenvolvimento de congestionamento sem considerar ultrapassagens. A análise será feita sob dois casos. O caso estável $V'(b) < \frac{\kappa}{2} + \lambda$ e instável $V'(b) > \frac{\kappa}{2} + \lambda$, o qual pode ser alterado através da razão $b = L/N$.

4.3.2 Resultados de Simulações Numéricas

Nesta sessão iremos discutir sobre os resultados obtidos através da simulação computacional realizada usando o modelo *Full Velocity Difference* (FVD) em regime estável e instável. Nas simulações realizadas utilizaremos o número total de veículos $N = 100$ numa via simples em regimes de alta e baixa densidade afim de observar os fenômenos de tráfego em estado estável e instável. A variação da densidade pode ser determinada através da alteração do tamanho da via uma vez que $\frac{L}{N} = \langle \rho \rangle^{-1}$. A função velocidade óptima utilizada para a simulação é a função de Helbing e Tilch (1998), consideraremos também $\lambda = 0.5$.

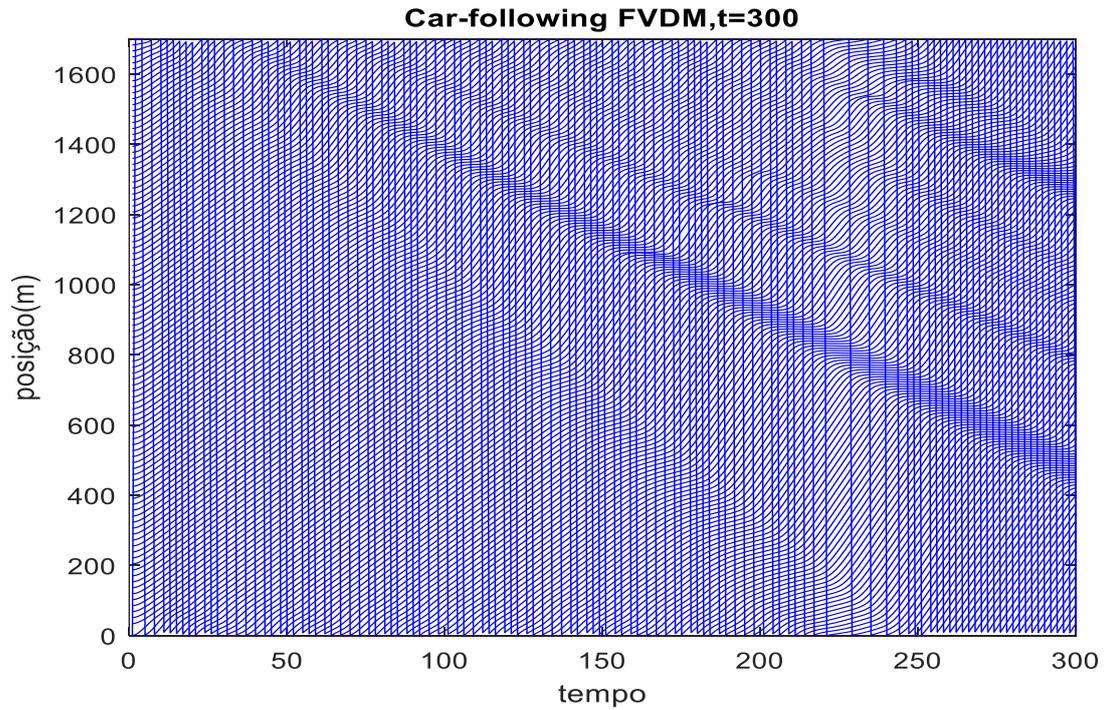
A figura 15 ilustra o resultado da simulação durante 300 segundos para um caso estável onde $L = 3200$. Quando $L = 1700$ na figura 4.3 nota-se através dos resultados que o sistema mostra instabilidade é possível observar graficamente que a distância varia muito pouco ao decorrer do tempo. É possível observar que os veículos tendem a manter uma distância de segurança aos líderes. Apesar da evidência de congestionamento não há colisões.

Figura 15: Posição dos veículos em t=300 estável



Fonte: Autor.

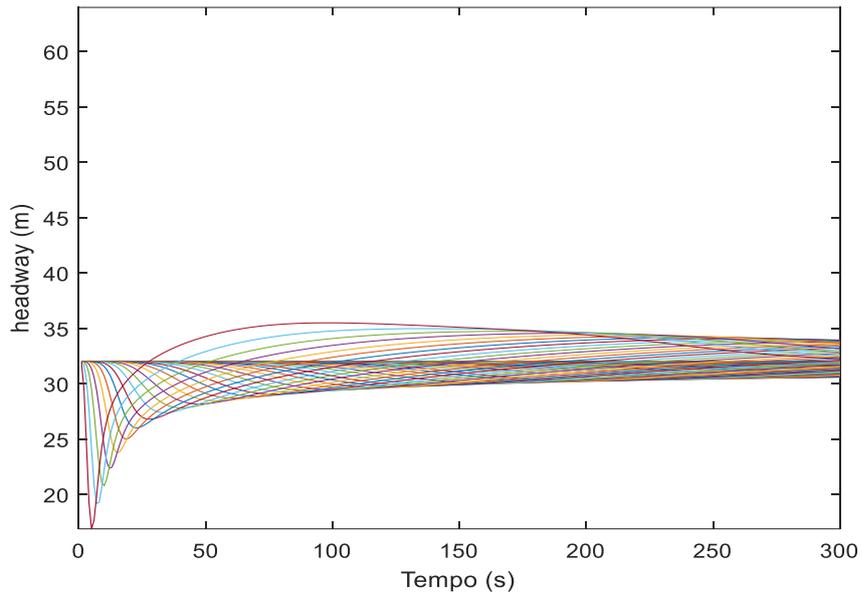
Figura 16: Posição dos veículos em t=300 instável



Fonte: Autoria própria.

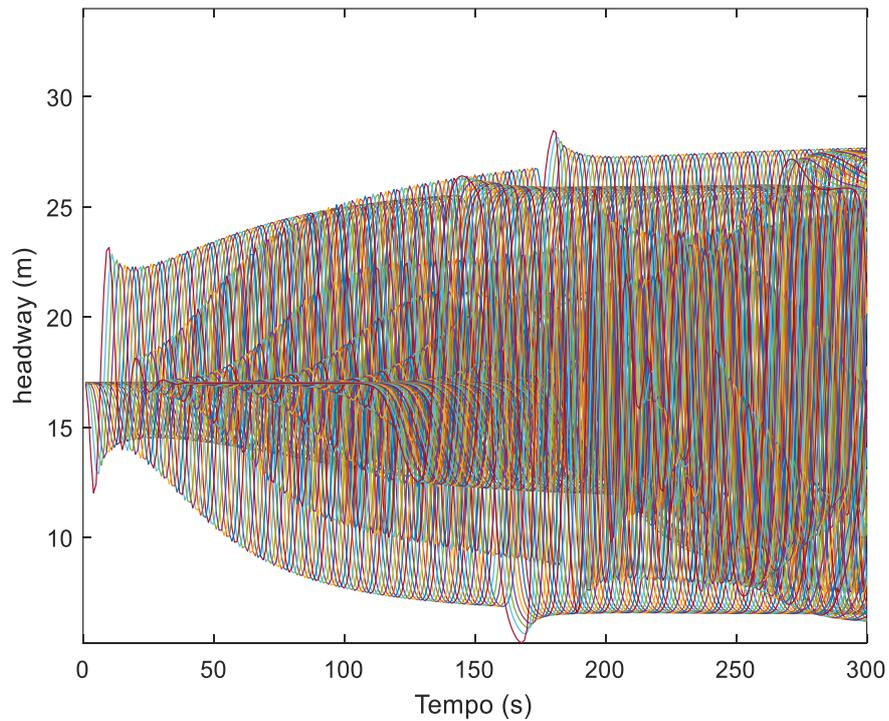
Na figura 17 é possível observar os valores do *headway* espacial ao decorrer do tempo durante os regimes de estabilidade e instabilidade. Quando em regime de estabilidade é possível observar que os valores de *headway* espacial se mantêm constante devido à baixa frenagem, onde os veículos tendem a trafegar em uma velocidade constante. Na figura 17 vemos que assim como acontece na prática os valores de espaçamento tendem a variar e aumentar constantemente devido os efeitos de pararranca.

Figura 17: Evolução do Headway espacial: Caso Estável.



Fonte: Autor.

Figura 18: Evolução do *Headway* espacial: Caso Instável.

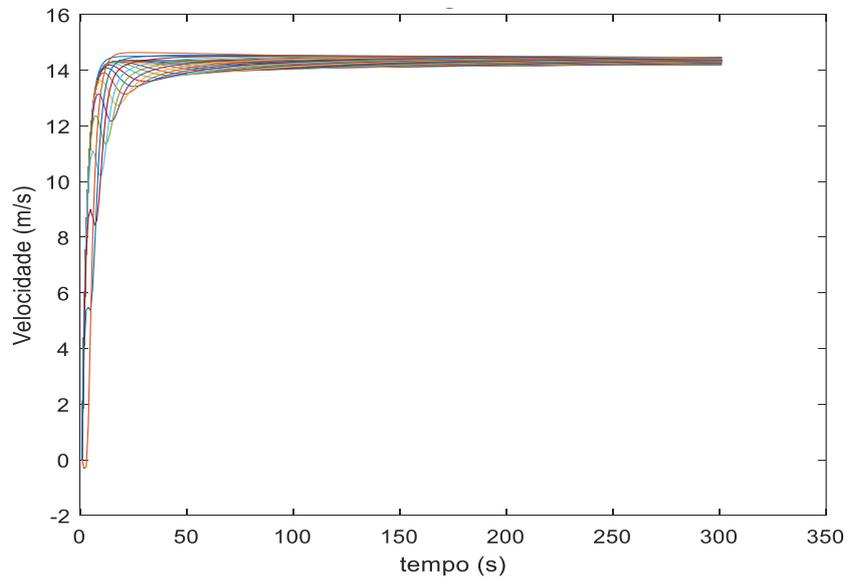


Fonte: Autoria própria

Nas figuras 19 e 21 observa-se a evolução de velocidade dos veículos ao decorrer do tempo em regimes de estabilidade e instabilidade. É evidente que na figura 19 a estabilidade na via, na qual as velocidades tendem a convergir representando um fluxo

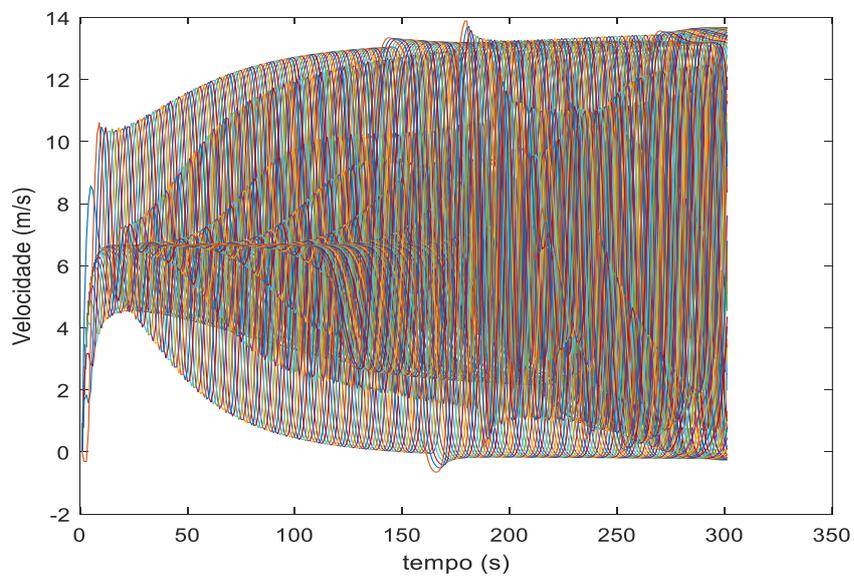
constante. A grande variação de velocidades representados na figura 20 evidencia regime de instabilidade onde os veículos se encontram em tendências de frear e acelerar constantemente. As flutuações dos valores de velocidade podem ser observadas na figura 21.

Figura 19: Velocidade vs. tempo: Caso Estável



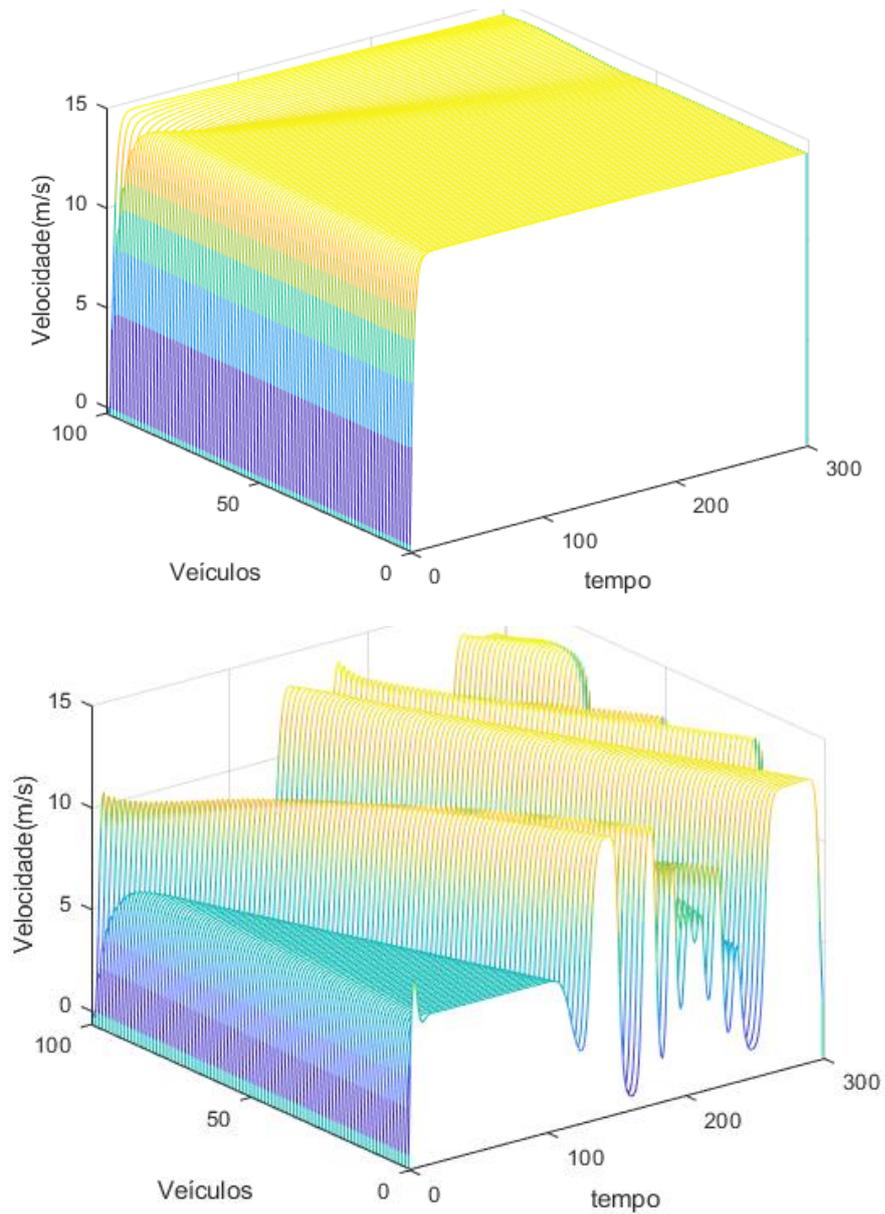
Fonte: Autoria própria

Figura 20: Velocidade vs. tempo: Caso instável.



Fonte: Autor

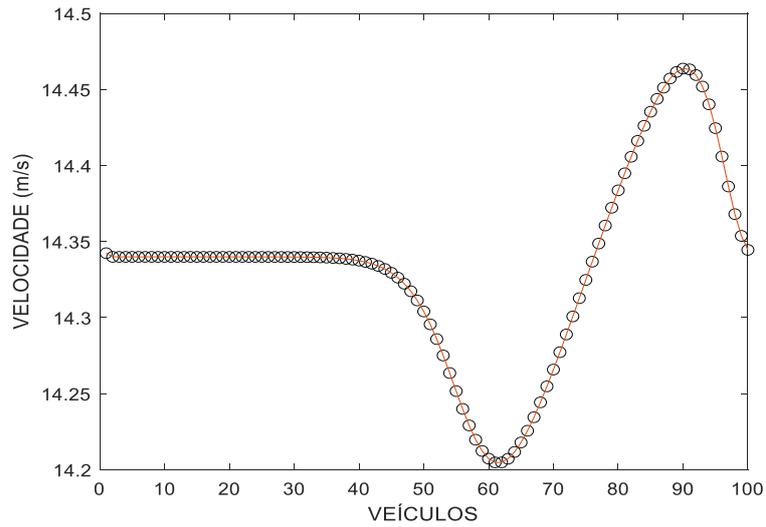
Figura 21: Flutuação das velocidades: Caso estável e Instável.



Fonte: Autor.

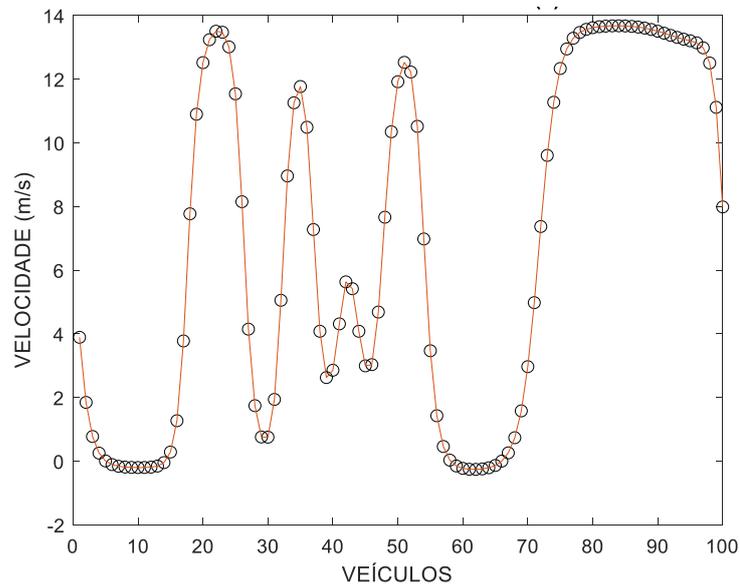
Nas figuras 22 e 23 é ilustrado os perfis de velocidade que mostra a formação de *clusters*, os quais são perturbações causadas por surgimento de instabilidades.

Figura 22: Perfil de velocidade vs. veículo: Caso estável.



Fonte: Autoria própria

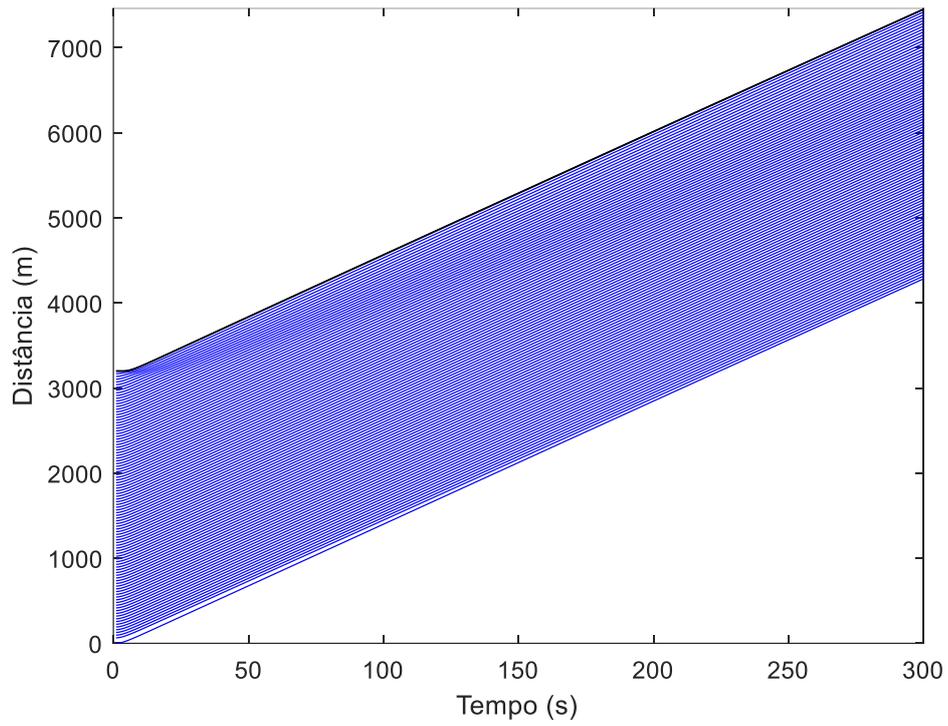
Figura 23: Perfil de velocidade instável vs. veículos: Caso Instável.



Fonte: Autoria própria

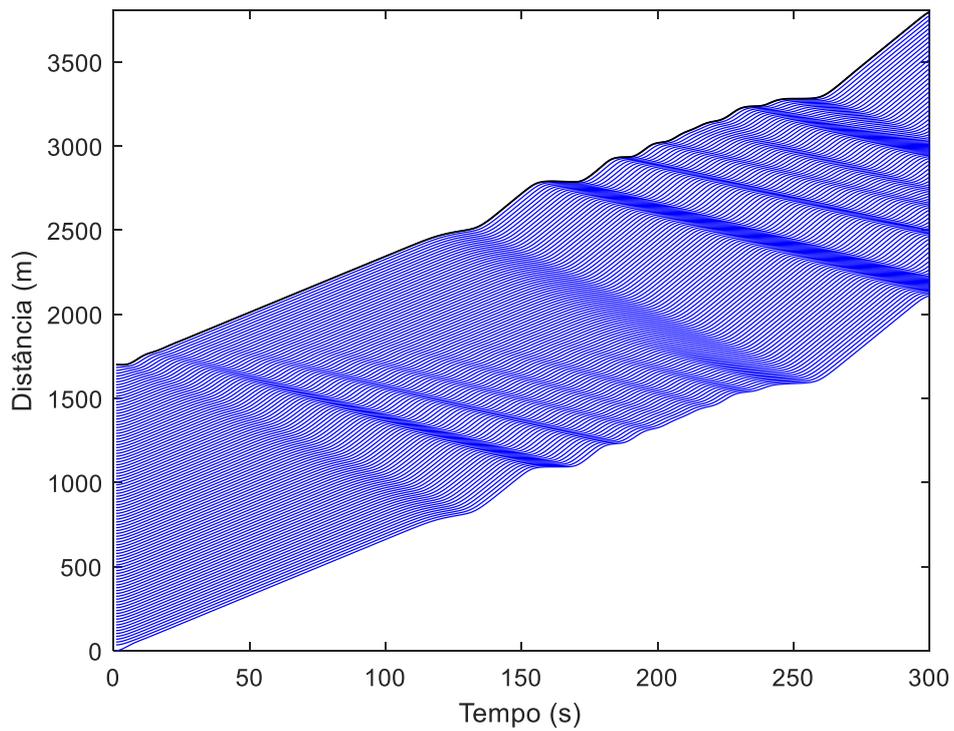
A trajetória linear dos veículos é ilustrada nas figuras 24 e 25, onde é mostrado a distância percorrida linearmente em regime de estabilidade e instabilidade respectivamente.

Figura 24: Gráfico da distância vs. tempo: Caso estável



Fonte: Autoria própria

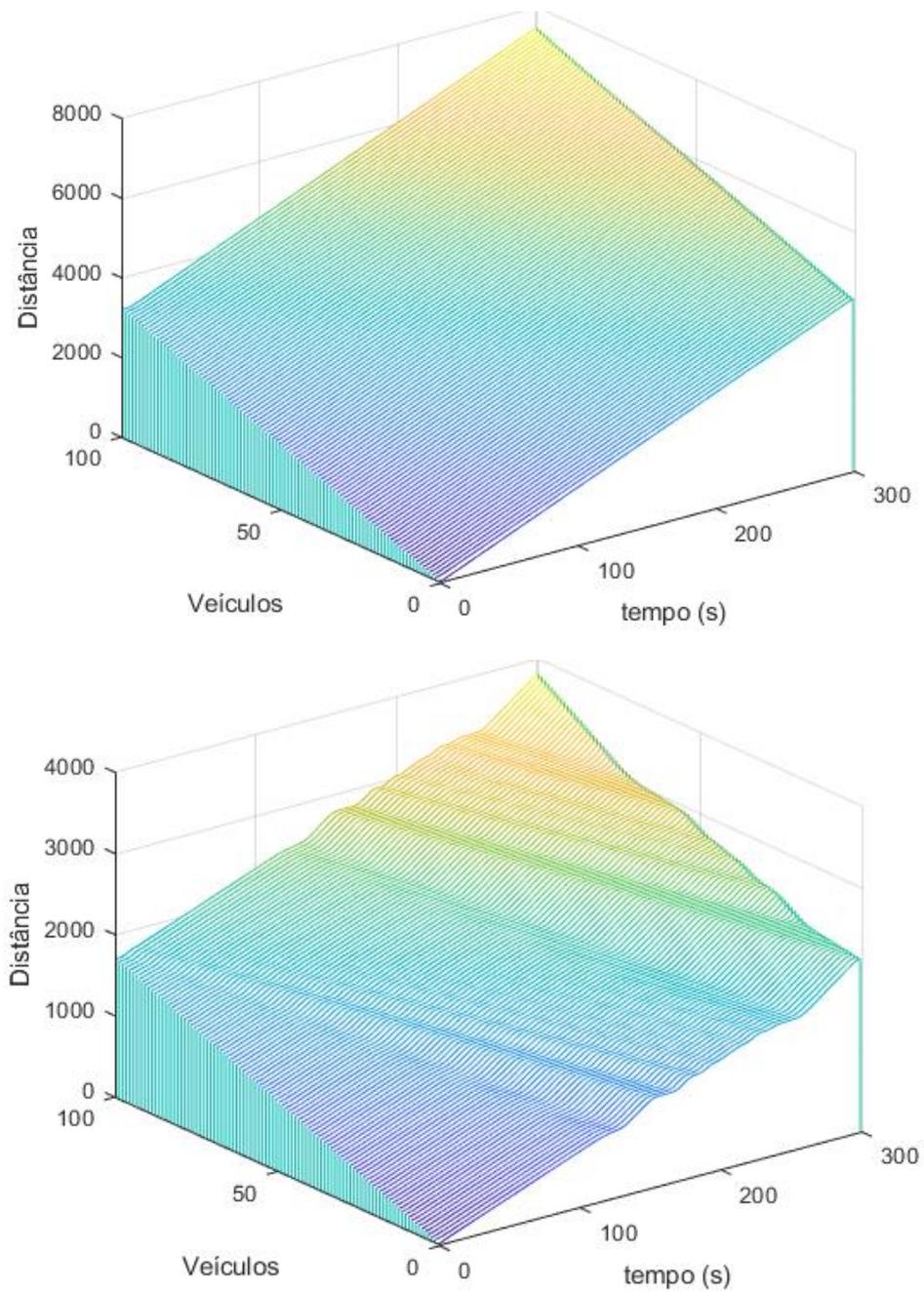
Figura 25: Gráfico da distância vs. tempo: Caso instável.



Fonte: Autoria própria

É possível observar na figura 26 que apesar de que os resultados da simulação não terem gerado *clusters* significativos, é evidente que o espaço percorrido em 25 é inferior à 24, o qual representa um estado de estabilidade. Suas respectivas flutuações podem ser observados na figura 26.

Figura 4.13 - Flutuação do espaço percorrido



Fonte: Autor.

5. CONCLUSÕES FINAIS

Ao decorrer do trabalho o estudo de fluxo de tráfego se mostrou consideravelmente relevante uma vez que os resultados obtidos das simulações apesar das imperfeições, apresentam um comportamento coerente com os resultados práticos. Os resultados coletados utilizando o modelo FVD apresentou resultados consideráveis apesar de alguns comportamentos um pouco irregulares talvez por limitações decorrentes dos valores de seus parâmetros. Apesar dos defeitos inerentes em todos os modelos, é fato que a possibilidade da análise individual de cada veículo torna os modelos microscópicos extremamente efetivos nos regimes reais de fluxo de veículos quando se objetiva estudar fenômenos específicos decorrente do comportamento dos condutores. Determinar a dinâmica do surgimento de engarrafamentos e condições de estabilidade são estudos que são frequentemente realizados com abordagens mais profundas e rigorosas e são essenciais para melhorar a qualidade de tráfego e condições de transporte humano.

Os resultados obtidos deixam claramente evidente a existência de inúmeros desafios e questões a se aprofundar. Contudo estes são assuntos de peso e vão além do objetivo do trabalho que consiste na apresentação e estudo da base fundamental dos estudos de tráfego que eventualmente são assuntos vinculados a pós-graduação voltados à engenharia de transporte.

Esse trabalho servirá como base inicial para pessoas que se interessarem por estudo de sobre a dinâmica do fluxo de tráfego de veículos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- B.D. Greenshields, Proc. Highw. Res. Board 14, 448 (1935).
- BANDO, Masako et al. Analysis of optimal velocity model with explicit delay. Physical Review E, v. 58, n. 5, p. 5429, 1998.
- BANDO, Masako et al. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. Physical review E, v. 51, n. 2, p. 1035, 1995.
- BANDO, Masako et al. Phenomenological study of dynamical model of traffic flow. Journal de Physique I, v. 5, n. 11, p. 1389-1399, 1995.
- BRACKSTONE, Mark; MCDONALD, Mike. Car-following: a historical review. Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour, v. 2, n. 4, p. 181-196, 1999.
- CHAPMAN, Stephen J. Programação em MATLAB para engenheiros. Pioneira Thomson Learning, 2003.
- FURTADO, Crispiniano de Jesus Gomes. Dinâmica de Tráfego de Veículos. 2013.
- GARTNER, Nathan H.; MESSER, Carrol JI; RATHI, Ajay. Traffic flow theory-A state-of-the-art report: revised monograph on traffic flow theory. 2002.
- GAZIS, Denos C. The origins of traffic theory. Operations Research, v. 50, n. 1, p. 69-77, 2002.
- GERLOUGH, David L.; HUBER, Matthew J. Traffic flow theory. 1976.
- HELBING, Dirk; TILCH, Benno. Generalized force model of traffic dynamics. Physical review E, v. 58, n. 1, p. 133, 1998.
- HOEL, Lester A.; GARBER, Nicholas J.; SADEK, Adel W. Engenharia de Infraestrutura de Transportes: uma integração multimodal. São Paulo: Cengage Learning, p. 35-41, 2011.
- JIANG, Rui; WU, Qingsong; ZHU, Zuojin. Full velocity difference model for a car-following theory. Physical Review E, v. 64, n. 1, p. 017101, 2001.
- JIN, Yanfei; HU, Haiyan. Stabilization of traffic flow in optimal velocity model via delayed-feedback control. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 18, n. 4, p. 1027-1034, 2013.

- KNOOP, V. L. Introduction to Traffic Flow Theory: An introduction with exercises. 2017.
- KUTZ, Myer. Handbook of transportation engineering. New York, NY, USA:: McGraw-Hill, 2004.
- LIEBERMAN, Edward B. Brief history of traffic simulation. Traffic and Transportation Simulation, v. 17, 2014.
- LIMA, Edgar Barbosa. Modelos microscópicos para simulação do tráfego baseados em autômatos celulares. 2007. Tese de Doutorado. Master's thesis, Universidade Federal Fluminense.
- MANNERING, Fred L.; WASHBURN, Scott S. Principles of highway engineering and traffic analysis. John Wiley & Sons, 2020.
- MAY, Adolf Darlington. Traffic flow fundamentals. 1990.
- PIPES, Louis A. An operational analysis of traffic dynamics. Journal of applied physics, v. 24, n. 3, p. 274-281, 1953.
- ROTHERY, Richard W. Car following models. Trac Flow Theory, 1992.
- SAWADA, Shiro. Generalized optimal velocity model for traffic flow. International Journal of Modern Physics C, v. 13, n. 01, p. 1-12, 2002.
- SUGIYAMA, Yūki. Optimal velocity model for traffic flow. Computer Physics Communications, v. 121, p. 399-401, 1999.
- TREIBER, Martin; KESTING, Arne. Traffic flow dynamics. Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

APÊNDICE A

Termo de Autorização de Publicação de Produção Acadêmica

O estudante GUILHERME ROCHA DA SILVA do curso de Licenciatura em Física, matrícula **2017.2.0018.0026-7**, telefone: (62) **99900-3761** e-mail **guilhermerochoa207@gmail.com**, na qualidade de titular dos direitos autorais, em concordância com a Lei nº 9.610/98 (Decreto dos Direitos do Autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o trabalho de Conclusão de Curso intitulado A DINÂMICA DE NEWTON NO ESTUDO DO FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS USANDO O MODELO DE DIFERENÇA DE VELOCIDADE TOTAL, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF), imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão na internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 16 de junho de 2021.

Assinatura do autor: Guilherme Rocha da Silva

Nome Completo do Autor: GUILHERME ROCHA DA SILVA

Assinatura do Professor-orientador: 

Nome completo do professor-orientador: ANDRÉ LUIZ CARDOSO DA SILVA