

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA



O MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN

HUGO LEONARDO RAMOS DE ALENCAR

GOIÂNIA

2020

HUGO LEONARDO RAMOS DE ALENCAR

O MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Física.

Orientador: Dr. André Luiz Cardoso da Silva

Coorientador: Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues

GOIÂNIA

2020

HUGO LEONARDO RAMOS DE ALENCAR

O MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção do título de licenciado em Física, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em ___/___/_____.

Prof. Ma. Ludmila Reis Pinheiro do Santos
Coordenadora de Trabalho de Conclusão de Curso

Banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Cardoso da Silva

Prof. Prof. Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues

Prof. Dr. Anderson Silva

GOIÂNIA

2020

A minha família que é a razão de todo meu esforço em especial minha mãe Lourdes Ferreira Ramos e meu pai José Hugo Freitas de Alencar (in memorian), minha esposa Adriana Lopes e meu filho Leonardo Lopes.

AGRADECIMENTOS

A minha família, em especial a minha esposa Adriana Lopes e meu filho Leonardo Lopes pela paciência e a compreensão na ausência em virtude deste trabalho.

Aos meus professores do departamento de física e matemática da Pontifícia Universidade Católica de Goiás pela formação científica.

Aos meus professores da escola de formação de professores da Pontifícia Universidade Católica de Goiás pela formação humanística.

Ao meu professor e orientador Doutor André Luiz Cardoso da Silva, pela paciência, dedicação, compreensão, e pelo incentivo oferecido neste trabalho proporcionando uma visão ampliada no universo da física.

“N3o tentes ser bem sucedido, tenta antes ser um
homem de valor.”

Albert Einstein (1879-1955)

RESUMO

A maioria dos livros introdutórios sobre Teoria Cinética (ou Física Estatística), inicia falando sobre o movimento browniano ou a difusão, e assim o faz porque é um dos mecanismos básicos sobre transporte de matéria e está presente na maioria dos fenômenos ligados a sistemas físicos, químicos e biológicos. Entretanto, quase um século após os trabalhos de Einstein, Smoluchowski, Langevin, Fokker e Planck, algumas questões ainda estão pendentes, particularmente aquelas relacionadas à difusão anômala estuda atualmente. A ideia central desse TCC é chamar a atenção para o fenômeno do movimento browniano de Einstein, através de um contexto histórico, demonstração do seu estudo e sua importância em diversas aplicações. Em seguida, usamos um programa implementado em MatLab para ilustrar o movimento browniano de uma partícula imersa em água em três dimensões usando um gerador de números aleatórios de distribuição normal.

Palavra-chave: Movimento browniano, Einstein, Teoria cinética.

ABSTRACT

Most of the introductory books on Kinetic Theory (or Statistical Physics), start talking about Brownian motion or diffusion, and he does so because it is one of the basic mechanisms about matter transport and is present in most systems-related phenomena physical, chemical and biological. However, almost a century after the works of Einstein, Smoluchowski, Langevin, Fokker and Planck, some questions are still pending, particularly those related to anomalous diffusion being studied today. The central idea of this CBT is to call attention to the phenomenon of Einstein's Brownian movement, through a historical context, demonstration of his study and its importance in several applications. Next, we used a program implemented in MatLab to illustrate the Brownian motion of a particle immersed in water in three dimensions using a random number generator of normal distribution.

Keyword: Brownian movement, Einstein, Kinetic theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Retrato oficial de Einstein em 1921 depois de ter recebido o Prêmio Nobel de Física.....	17
Figura 2 - Albert Einstein e Robert Millikan em 26 de Fevereiro de 1931, quando Einstein visitava o Institute of Technology na California, foi Millikan, de uma forma bela, confirmou uma consequência do artigo de Março de Einstein.....	19
Figura 3 - Albert Einstein em 1929, ano em que recebeu a Medalha Planck.....	22
Figura 4 - Albert Einstein em 1932, o ano em que foi nomeado professor no Institute for Advanced Study em Princeton, Nova Jérсия.....	24
Figura 1 - A figura abaixo mostra a trajetória de uma partícula executando o movimento browniano.....	28
Figura 6 - Albert Einstein em 1921, no auge da sua fama mundial. Einstein tornou uma celebridade quando sua teoria geral da relatividade foi confirmada em 1919.....	29
Figura 7 - Albert Einstein em 2 de Janeiro de 1931, quando demonstrou no seu artigo de Setembro que a energia e a massa eram equivalentes, deve ter-se sentido um tanto como parece neste retrato... um pouco endiabrado?	32
Figura 8 - Robert Brow (1773-1858).....	33
Figura 9 – James Prescott Joule (1818-1889).....	38

Figura 10 – Partículas em vermelho: moléculas no estado gasoso.....	39
Figura 11 – Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro (1776-1856).....	40
Figura 12 – Movimento de uma molécula em gás, uma sequência de trajetórias retilíneas interrompidas por colisões com outras moléculas.....	43
Figura 13 – Um gás sob pressão de um êmbolo externo.....	46
Figura 14 – Jean Baptiste Perrin (1870-1942).....	53
Figura 15 – Eugen Kappler (1905-1977).....	55
Figura 16 – Paul Langevin (1872-1946).....	57
Figura 17 – Louis Bachelier (1870-1946).....	58
Figura 18 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas.....	64
Figura 19 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados (100 números aleatórios e 1 trajetórias).....	65
Figura 20 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein). (100 números aleatórios e 1 trajetórias).....	66

Figura 21 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (100 números aleatórios e 1 trajetórias).....67

Figura 22 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados. (100 números aleatórios e 1 trajetórias).....68

Figura 23 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein). (100 números aleatórios e 10 trajetórias)68

Figura 24 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (100 números aleatórios e 10 trajetórias).....69

Figura 25 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados. (1000 números aleatórios e 10 trajetórias).....70

Figura 26 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein). (1000 números aleatórios e 10 trajetórias)71

Figura 27 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (1000 números aleatórios e 10 trajetórias).....72

Figura 28 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados. (1000 números aleatórios e 10 trajetórias: $a = 0,01$, $b = 0,05$ e $c = 0,02$).....73

Figura 29 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein). (1000 números aleatórios e 10 trajetórias: $a = 0,01$, $b = 0,05$ e $c = 0,02$).....74

Figura 30 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (1000 números aleatórios e 10 trajetórias: $a = 0,01$, $b = 0,05$ e $c = 0,02$).....75

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
2 ALBERT EINSTEIN E O ANO MILAGROSO.....	19
2.1 O Ano Miraculoso de Einstein.....	19
2.1.1 O artigo revolucionário do quantum.....	21
2.1.2 Dimensões moleculares.....	24
2.1.3 Idealizando átomos.....	26
2.1.4 A fusão do espaço tempo.....	31
2.1.5 O artigo que relaciona massa e energia.....	33
2.2 Um pouco de história sobre o movimento browniano.....	35
3 A TERMODINÂMICA E O MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN.....	39
3.1 Alcance e objetivos da Termodinâmica.....	39
3.2 A termodinâmica de fluídos.....	41
3.2.1 Número de Avogadro.....	41
3.2.2 Gases ideais.....	43
3.2.3 Livre caminho médio.....	44
3.2.4 Equação da difusão.....	46
3.3 O artigo de Einstein sobre o movimento browniano.....	48
3.4 Experimentos do movimento browniano.....	54
3.4.1 O experimento de Perrin.....	54
3.4.2 O experimento de Eugen Kappler.....	56
3.4 Aplicações atuais do movimento browniano.....	55
3.4.1 Na física e matemática: dinâmica de processos estocástico.....	56
3.4.2 Nas ciências econômicas: ações e o mercado.....	57
3.5 Algumas aplicações do movimento browniano atuais.....	58
3.5.1 Na Física e Matemática: A dinâmica de processos estocástico.....	58
3.5.3 Nas ciências biológicas: nano-motores e motores brownianos.....	61

4	SIMULAÇÃO DO MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN NO MATLAB.....	63
4.1	Introdução.....	63
4.2	O Programa: Implementação da Simulação em Matlab.....	63
4.2.1	A ideia Básica Programa.....	63
4.2.2	Simulação de Partículas brownianas.....	66
4.2.3	Conclusão da Simulações.....	79
5	CONCLUSÕES.....	80
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	81
	APÊNDICE A – OS PROGRAMAS DE SIMULAÇÃO.....	83
	APÊNDICE B – BIOGRAFIA DE ALGUNS FÍSICOS.....	86
	APÊNDICE C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE PUBLICAÇÃO DE PRODUÇÃO ACADÊMICA.....	94

1 INTRODUÇÃO

O “movimento browniano” é assim chamado por causa do botânico inglês Robert Brown; este descobriu, em 1827, que os grãos de pólen suspensos em água se movimentam continuamente de modo “caótico”, quando observados ao microscópio. Inicialmente esse movimento foi considerado como forma de vida, mas logo verificou-se que pequenas partículas inorgânicas apresentavam o mesmo comportamento. Não houve explicação quantitativa desse fenômeno até o desenvolvimento da Teoria Cinética. Apenas em 1905, é que Albert Einstein desenvolveu a teoria cinética do movimento browniano que foi publicada na mesma edição no “Annalen der Physik” que continha o artigo famoso sobre a teoria da relatividade e também o seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico que lhe valeu o prêmio Nobel em 1921. Desde então, a análise do movimento browniano tem chamado a atenção da comunidade acadêmica por sua multidisciplinaridade que abrange as áreas de Física, Engenharia, Biologia, Matemática e Ciências Econômicas (PETER, PERES, 2008).

O interesse crescente pelo estudo do movimento browniano é grande parte pela sua aplicabilidade e simplicidade. Atualmente ele permanece na fronteira da pesquisa com um exemplo importante de processo estocástico, e constitui uma ferramenta fundamental para o estudo de sistemas físicos de não equilíbrio. Tais sistemas são encontrados em diferentes áreas da física, desde o nível microscópico, como verificado na difusão de partículas num solvente, até escalas da ordem astronômica, tal como observado em sistemas estelares. Um exemplo de interesse desse último tipo é representado por um buraco negro no centro de um sistema estelar denso. Teoricamente, quando sua massa é muito grande, o buraco negro pode adquirir movimento semelhante ao de uma partícula em suspensão num líquido ou num gás (ARTIGO, 13). Em cosmologia, movimentos brownianos com barreiras fixas ou móveis são também bastante empregados para estudar os processos de formação da estrutura de larga escala, tais como galáxias, aglomerados de galáxias e vazios (ARTIGO, 14). Mais recentemente, outros tipos de contribuições formais obtidas na

investigação de sistemas de memória, objetivando estabelecer relações entre os regimes de difusão anômala e normal (ARTIGO, 14).

Na matemática o movimento browniano é um dos mais simples de tempo contínuo, e se caracteriza por ser um processo que limita a simplicidade (o passeio aleatório) e a complexidade dos processos estocásticos (o Teorema de Donsker) e a sua universalidade está relacionada como a universalidade da distribuição normal (CALEFFI et al., 2016). Na economia, podemos citar o estudo das flutuações do mercado de ações frequentemente citados, Benoit Mandelbrot tenha rejeitado sua aplicabilidade ao movimento de preços de ações, em parte, por ser descolamentos contínuos (CALEFFI et al., 2016). Na biofísica, o problema da “saída estreita”, onde a partícula browniana (íon, molécula ou proteína), está confinada num domínio fechado (ou dentro de uma célula) por uma membrana refletiva (membrana plasmática), exceto por uma pequena janela pela qual pode sair. O problema resume-se em calcular o tempo médio de escape. Sendo que este tempo é influenciado pelo tamanho da janela e velocidade das partículas (CALEFFI et al., 2016). No estudo hidrodinâmico de sistemas gasosos na Engenharia, ocorre a presença de movimento browniano de partículas de um fluido puro. Quando se adiciona qualquer impureza esta pode apresentar movimento browniano com suas partículas e com as do fluido, representando assim um complexo estudo probabilístico (CALEFFI et al., 2016).

Há várias abordagens para descrever o movimento browniano. Do ponto vista teórico são quatro abordagens básicas de partículas brownianas: *o tratamento difusivo de Einstein, o procedimento estocástico ou de força flutuante proposto por Paul Langevin, a abordagem via equação de Fokker-Planck, e finalmente, as caminhadas aleatórias de Mark Kac*. Na abordagem da difusão proposto por Einstein, o comportamento irregular das partículas em suspensão surge devido aos movimentos moleculares térmicos, onde cada partícula executa esse movimento independentemente. Essa hipótese é válida somente se os intervalos de tempo considerados não são demasiadamente pequenos, mas pequeno se comparado com o tempo de observação macroscópica, porém suficientemente longo, para que os movimentos executados por diferentes partículas neste intervalo de tempo possam ser considerados eventos independentes. Essa teoria é construída a partir de uma

hidrodinâmica de fluidos com conceitos probabilísticos permitem obter a flutuação quadrática associada com um processo dissipativo (descrito pelo coeficiente de viscosidade). Essas flutuações permitiram que Jean Perrin obter experimentalmente o número de Avogadro com grande precisão. Tais resultados também contribuíram significativamente para que a hipótese atômico-molecular tivesse aceitação geral como uma descrição realista da matéria.

Na abordagem estocástica, a dinâmicas das partículas brownianas é construída a partir de equações diferenciais do tipo Langevin, proposto por Paul Langevin e posteriormente seguido por Fütter, Ornstein e outros mais, que iniciaram estudos sobre a generalização dos resultados. Suas equações se baseiam da mecânica newtoniana, na ausência de forças conservativas, incluindo efeitos estocásticos nas colisões entre partículas ou forças flutuantes. A determinação da posição, velocidade e outras propriedades são determinadas de médias estatísticas sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. No regime de tempos longos a abordagem de Langevin é equivalente à descrição de Einstein. Neste limite também pode ser mostrado que a distribuição de probabilidade relativa à variável velocidade obedece a uma distribuição de velocidades de Maxwell. No caso de uma distribuição qualquer generalizada que evolui com o tempo é necessário uma abordagem mais completa do movimento das partículas. Tal abordagem é conhecida como equação de Fokker-Planck, um tipo de equação mestra, frequentemente usado como uma boa aproximação para descrever processos markovianos mais gerais.

Uma outra abordagem bastante universal, que permite descrever a difusão de partículas brownianas em um fluido é a *caminhada aleatória*. A solução para o problema da caminhada aleatória, na sua forma mais geral, é facilmente entendida considerando-se a versão mais simples do problema em uma dimensão, tal como foi originalmente investigado por M. Kac. Suponha que um caminhante aleatório partindo da origem e se deslocando em linha reta, realiza n_1 passos de comprimento fixo l para a direita com probabilidade p e n_2 passos para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$, de modo que $p + q = 1$. Além do mais, estamos considerando que os passos são eventos mutuamente independentes. O problema é determinar qual a probabilidade $P_N(m)$ de encontrar o caminhante na posição $x = ml$, onde $-N \leq m \leq N$,

depois de ter dado N passos. Nesta abordagem é possível obter a distribuição de probabilidade, que escrita na forma de equação diferencial envolvendo variáveis contínuas é possível obter uma conexão com o fenômeno de difusão representando um exemplo típico de um processo markoviano. Estações estocástica dessa natureza, nas quais os detalhes da dinâmica de um sistema físico são substituídos por leis probabilísticas, desempenham um papel extremamente importante no estudo de sistemas fora do equilíbrio.

Quando se estuda o movimento browniano em geral, todas as abordagens apresentam suas vantagens e desvantagens. E dependendo de determinadas condições fornecem os mesmos resultados. Neste sentido, é que preferimos usar abordagem do caminho aleatório em sua simplicidade neste TCC.

No capítulo 2, falaremos um pouco sobre o ano miraculoso de Einstein e discutiremos a sua contribuição para o estudo do movimento browniano. Além disso falaremos um pouco sobre as contribuições de Einstein neste ano. No capítulo 3, faremos uma revisão bibliográfica sobre o estudo sobre o movimento browniano e suas aplicações. Discutiremos as diferentes abordagens atuais e suas limitações no contexto das pesquisas atuais e a realização de experimentos de baixo custo.

No Capítulo 4, implementamos o modelo do caminho aleatório no software MaTLab para visualização e determinação do coeficiente de difusão de uma partícula em água em três dimensões (3D) usando geradores de números aleatórios.

No Capítulo 5, faremos a conclusões finais.

2 ALBERT EINSTEIN E O ANO MILAGROSO

2.1 O ano miraculoso de Einstein

Figura 2 - Retrato oficial de Einstein em 1921 depois de ter recebido o Prêmio Nobel de Física.



Fonte: foto retirada da internet¹

O ano de 1905, foi um ano marcante para Einstein, em seis meses ele escreveu cinco artigos que influenciaram e mudaram profundamente o curso da ciência do século XX. Esses artigos, sem dúvida, tornam os seis meses que vão de 17 de Março a 27 de Setembro nos mais produtivos que algum cientista já teve. Einstein tinha uma intuição física muito poderosa e precisa, por esse motivo ele conseguia observar coisas do cotidiano dando uma importância e significado que outros não podiam visualizar. Desde imagens de características próprias, como um objeto em queda livre para a terra ou uma matéria cósmica correndo ao lado de um feixe de luz, no caso do último exemplo era impensável por uma pessoa comum.

¹Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein> . Acessado em: 13 de set. 2020

Einstein exercia uma pré-ciência que desafiava a descrição, como exemplo, ele conseguiu prever a energia nuclear 34 anos antes da descoberta que tornou possível. Ele antecipou o desvio gravitacional para o vermelho pelo menos 44 anos antes de este ser confirmado, imaginou a emissão estimulada 37 anos antes da luz ser amplificado por meio da emissão estimulada no laser, previu o condensado de Bose-Einstein 70 anos antes da descoberta. Descreveu estados quânticos 30 anos antes de estes se tornarem objeto de estudo de vários físicos. Einstein estava sempre a frente à sua década, embora suas ideias fossem de vagarosa aceitação.

No século xx presenciamos duas grandes revoluções na física que mudou a forma de interpretar os fenômenos físicos, a primeira delas foi a concepção de espaço e de tempo, um espaço-tempo que se mostra curvo com um grau de sutileza. A segunda dessas revoluções é a natureza da matéria e da radiação, mostrando uma nova realidade onde as partículas comportam-se como ondas e partículas um conceito estava sendo criado sobre a dualidade da luz. Novos termos entrariam e uso como relatividade para definir a primeira revolução e teoria quântica para explicar a segunda revolução.

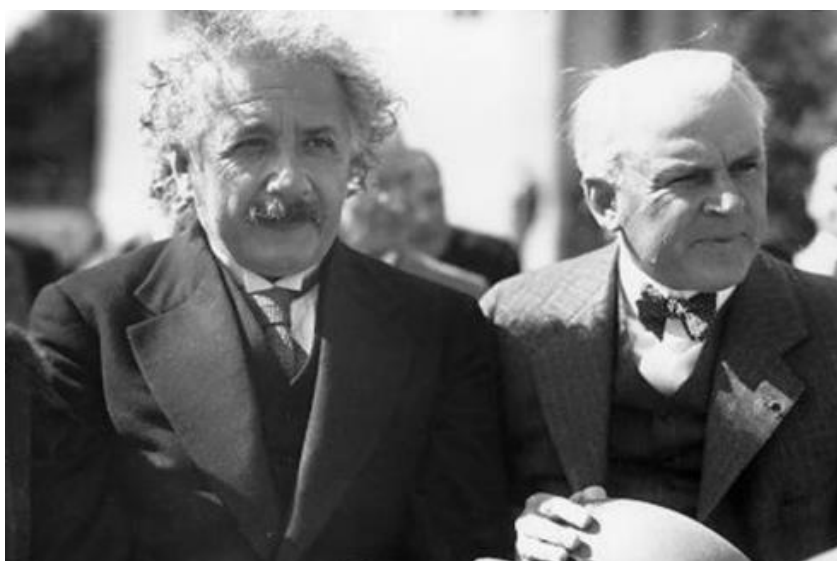
Um número grande de cérebros de primeira categoria fazia parte população de cientistas do século xx, que contribuiu para o crescimento exponencial das ciências. Muitos desse cientistas ocupam um lugar honroso na história científica. Porém, nenhuma dessas brilhantes mentes conseguiram chegar perto da quantidade e principalmente da qualidade do trabalho que Einstein produziu em Março, Abril, Maio, Junho e Setembro de 1905. Einstein escreveu nesse ano 21 sínteses e cinco artigos, mas ele não teve nenhum outro ano tão produtivo como esse.

É de grande importância destacar, entre os vários artigos escrito no presente ano miraculoso, o estudo que originou sua dissertação de doutoramento sobre a determinação das dimensões moleculares e com análise da natureza do movimento browniano. “De fato, seu trabalho sobre o movimento browniano estabeleceu as bases de uma parte importante do conhecimento estatístico, que teve implicações enormes em muitas outras áreas.” (STACHEL; JOHN, 2001, pag. 8).

Nas próximas seções serão relatados o conteúdo de cada artigo, que fizeram desse ano, o ano milagroso de Einstein, em poucos meses ele produziu trabalhos notáveis que expressarão a determinação das dimensões moleculares, o texto sobre o movimento de pequenas partículas em suspensão dentro de líquidos em repouso, o artigo sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, a composição sobre a inércia de um corpo deixando a pergunta da dependência de seu conteúdo de energia, e a última obra sobre um ponto de vista heurístico a respeito da produção e transformação da luz. Em poucos meses Einstein conseguiu produzir artigos que mudaram a face da física, será detalhado a seguir esses meses brilhantes.

2.1.1 O artigo revolucionário do quantum

Figura 3 - Albert Einstein e Robert Millikan em 26 de Fevereiro de 1931, quando Einstein visitava o Institute of Technology na California, foi Millikan, de uma forma bela, confirmou uma consequência do artigo de Março de Einstein.



Fonte: imagem retirada da internet²

No artigo de Março de 1905 foi conhecido como a obra revolucionária do quantum, Einstein desafiou os conservadores da física. Todos os físicos nessa época

²Disponível em: <<https://calisphere.org/item/54af34b02fce7a97f88c7b257ca63cb0/>> . Acessado em 13 de set. 2020

tinham um conceito formado sobre a natureza da luz, era chamada onda eletromagnética ou radiação eletromagnética. Em 1905, a natureza ondulatória da luz era um fato estabelecido e incontestável.

De acordo com esse conceito aceito pelos físicos da época, Einstein sugeriu que a luz não era uma onda contínua, mas compreendia em partículas posicionadas. Escrevendo assim na introdução do seu artigo de Março:

Segundo a hipótese aqui contemplada, quando um raio de luz se está a espalhar a partir de um ponto, a energia não é distribuída continuamente por espaços cada vez maiores, mas consiste num número finito de quanta de energia que estão localizados em pontos no espaço, movem-se sem se dividir e só podem ser gerados ou absorvidos como um todo. (RIGDEN; John S, 2007, pag. 33).

Muitos chamaram de a frase mais revolucionária escrita por um físico no século xx. Antes deste artigo aparecer impresso no mês de maio, Einstein já falava ao seu amigo Conrad Habicht que haveria outro artigo muito revolucionário que falava sobre as propriedades da luz.

O artigo de Março de 1905 demonstra a maneira como o cérebro de Einstein trabalhava. Ele deu início ao artigo mantendo a sua característica, com a seguinte frase: “existe uma profunda diferença formal entre os conceitos teóricos que os físicos formaram sobre os gases e outros corpos ponderáveis, e a teoria de Maxwell dos processos eletromagnéticos no chamado espaço vazio”. (RIGDEN; John S, 2007, pag. 39).

Neste artigo Einstein só apresentava um método de encontrar soluções, não havia provas de que a luz era composta de partículas ou quanta, Einstein explicava a sua ideia de partícula como uma forma provisória de pensar a luz, Einstein tinha um grande poder de intuição. Para chegar à questão, ele imaginou um recipiente com uma cavidade interior rodeada por paredes refletoras. Na cavidade apresentam moléculas de gás e elétrons, colidindo uns com os outros, com as paredes da cavidade, e com

os elétrons oscilantes. No mesmo momento, a luz está a ser emitida e absorvida pelos elétrons oscilantes ressaltando a cavidade e todo o seu conteúdo estão à temperatura T . Supondo que todo esse sistema, radiação e os elétrons oscilantes, estão em equilíbrio dinâmico de maneira que, os átomos gasoso, a radiação, e os elétrons oscilantes possui a mesma energia média.

Para Einstein, estavam em conflito a continuidade da luz, e a descontinuidade dos elétrons e átomos. A sua abordagem neste artigo permitia alternar entre definição de átomos e radiação. Com a radiação Einstein começou com objetivo de investigar como a entropia, explicada na segunda lei da termodinâmica, de uma amostra de radiação depende do seu volume. Einstein “descobriu que que para ambas as amostras, de radiação contínua e de gás discreto, a dependência da entropia em relação ao volume era formalmente idêntica.” (RIGDEN; John S, 2007, pag. 42).

O resultado revolucionário de Einstein teve a assinatura das ideias probabilísticas provenientes do trabalho do físico austríaco Ludwig Boltzmann. A noção de ordem-desordem associada à entropia.

Einstein era um grande admirador do trabalho de Boltzmann, que acreditava nos átomos muito antes de vários dos seus contemporâneos, enunciou a entropia explicitamente em termos de ordem-desordem, ou seja, em termos de probabilidades. O princípio de Boltzmann era novo, mas era conhecível e estava acessível a Einstein, e daqui em diante Einstein foi conduzido pela sua própria intuição.

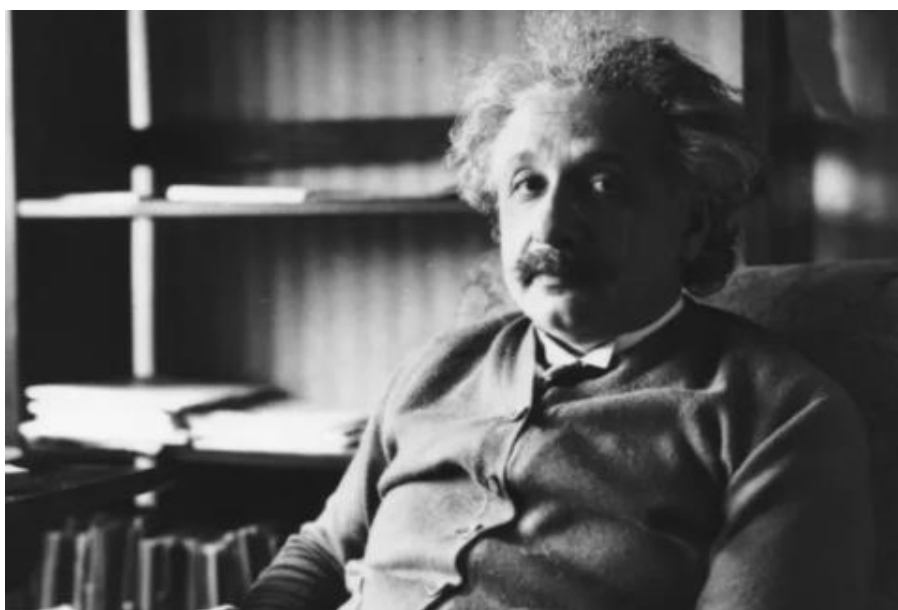
Em primeiro lugar Einstein pressupôs aplicar a uma amostra de radiação a mesma abordagem que utilizara para o gás. Em segundo, ele pressupôs que as entropias, também dependeriam dos volumes conforme determinado pela abordagem probabilísticas de Boltzmann. Das aplicações que Einstein faz sobre a sua teoria corpuscular da luz, o efeito fotoelétrico é o que mais identifica com o artigo de Março. “A teoria corpuscular da luz de Einstein aplicada ao efeito fotoelétrico foi

magnificamente bem sucedida e invulgarmente simples.” (RIGDEN; John S, 2007, pag.45).

Quando Einstein terminou a parte formal do seu artigo concluindo que a luz se comporta como se compreendesse de quanta, ele não conseguiu alcançar o seu objetivo, porém, a sua visão corpuscular da luz ao efeito fotoelétrico ganhou uma vantagem como um fato novo na ciência.

2.1.2 Dimensões moleculares

Figura 4 - Albert Einstein em 1929, ano em que recebeu a Medalha Planck.



Fonte: imagem retirada da internet.³

O artigo do mês de Abril tratava sobre dimensões moleculares, foi a sua tese de doutoramento, esse célebre trabalho é sempre incluído no rol dos grandes artigos que escreveu no ano prodigioso. Einstein concluiu a sua tese a 30 de Abril, mas somente três meses depois a submeteu à Universidade de Zurique. Essa demora

³Disponível em: <<https://epocanegocios.globo.com/Mundo/noticia/2017/08/cartas-de-einstein-sobre-nazismo-e-grande-depressao-serao-leiloadas-nos-eua.html>> acessado em 13/09/2020

ocorreu porque ele considerava o seu trabalho como um outro artigo qualquer, querendo desistir do seu título de doutor como já havia feito anos antes.

Nessa época alguns números de cientistas não aceitavam o conceito de átomo, havia poucas provas que os céticos encarassem como substitutos aceitáveis para a observação direta dos átomos. A posição dos antiatomistas era a de que a ciência devia basear-se somente em fatos, e falavam que as hipóteses corrompiam as ciências. Por outro lado, Einstein não podia ver os átomos, mas acreditava neles. Por muito tempo Einstein pensara sobre átomos, e em como comprovar a sua existência de maneira convincente.

“O assunto da tese de doutoramento de Einstein confirmava a sua crença na teoria atômica.” (RIDGEN; John S, 2007, pag.59). Quando Einstein falou no seu artigo de Março sobre a natureza corpuscular da luz já causou um certo isolamento por parte do meio científico não foi diferente quando começou a falar de átomos no seu artigo de Abril.

O artigo de Abril de 1905, Einstein falou sobre a determinação dos tamanhos reais das moléculas que foram possíveis pela teoria cinética dos gases, as palavras-chave para o estudo de Einstein eram viscosidade e difusão. Primeiramente Einstein considerou a viscosidade, ele imaginava que moléculas de açúcar não deslizavam livremente na água isso porque sua viscosidade dificultava o seu movimento, ao seguir a viscosidade Einstein considerou a difusão. E através de uma condição de equilíbrio, quando uma concentração de açúcar interage com o líquido, Einstein conseguiu determinar o coeficiente de difusão para moléculas de açúcar na água. A expressão de Einstein para o coeficiente de difusão apresentava novamente duas incógnitas: o número de Avogadro e o raio das moléculas de açúcar dissolvidas.

Em 1905 o número de Avogadro não era preciso, mas todas as metodologias utilizadas para determiná-lo giravam em torno de 10^{23} , por esse motivo o valor teórico de Einstein já estava bastante razoável, bem como a sua solução para o tamanho de moléculas de açúcar, no dia 30 de Abril de 1905, Einstein tinha todas as razões para

estar confiante nos seus resultados obtidos. A tese de Einstein foi aceita no Verão de 1905, mudando seu status de senhor para doutor Einstein.

Em 1909, Jean Perrin, um físico francês, trabalhava nas implicações do artigo de Maio sobre o movimento browniano e encontrou juntamente com um estudante por nome de Jacques Bancelin depois de um experimento, uma discrepância nos resultados de Einstein. Perrin comunicou a Einstein que revisou seus cálculos e no final, a teoria apresentada na tese e os melhores dados experimentais disponíveis estavam em concordância Harmoniosa, e com isso finalmente a tese era um caso arranjado.

A tese de Einstein ajudou a determinar as dimensões moleculares num líquido, trazendo provas adicionais, desta vez provas de líquido, colaborando com a teoria atômica. “O artigo de Maio sobre o movimento browniano descende diretamente da sua tese e, como veremos, quando se consideram os artigos de Abril e Maio em conjunto, a defesa do átomo torna-se convincente.” (RIGDEN, John S, 2007, pag.64).

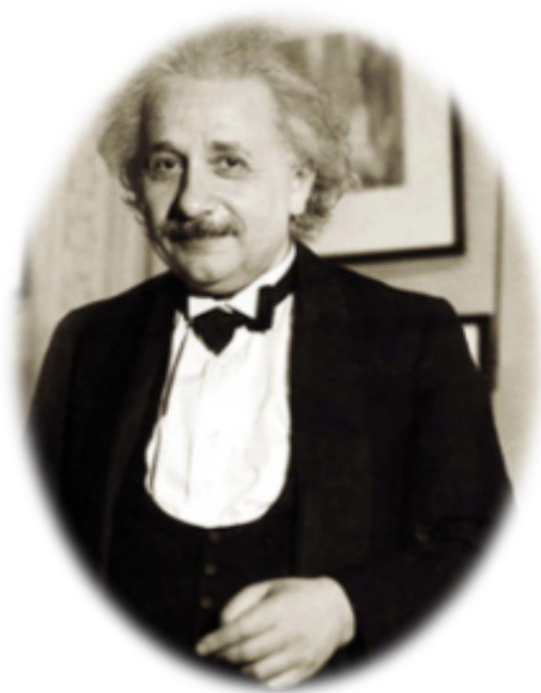
2.1.3 Idealizando átomos

O artigo do mês de Maio é o trabalho de Einstein de grande importância para o nosso trabalho. Ele começa o seu artigo citando a importância da teoria cinético-molecular do calor, como base teórica deste artigo. Einstein tinha a grande capacidade de mentalizar suas teorias como fossem experimentos concretos.

“Via um caldeirão borbulhando de moléculas a moverem-se rapidamente em todas as direções, chocando umas com as outras e colidindo com as paredes do recipiente. Mais importante ainda, as partículas de pólen, observáveis ao microscópio, estavam suspensas no líquido, e as moléculas líquidas invisíveis bombardeavam impiedosamente as partículas intrusas de pólen pondo-as em movimento

por caminhos aleatórios e ziguezagueantes chamados movimento browniano. Era uma imagem empolgante.” (RIGDEN, John S, 2007, pag.69).

Figura 5 - Albert Einstein em 1932, o ano em que foi nomeado professor no Institute for Advanced Study em Princeton, Nova Jérсия.



Fonte: imagem retirada da internet⁴

No segundo parágrafo desse artigo Einstein questionou a termodinâmica clássica para espaço observáveis ao microscópio. No artigo de Março Einstein tinha abordado a continuidade, no artigo de Maio são os átomos e a termodinâmica. Se o movimento browniano for observado como Einstein passou a escrever no mês de Maio então a validade da termodinâmica estava limitada. As três leis da termodinâmica estavam solidamente apoiadas pela experimentação, limitar a validade absoluta da

⁴Disponível em: <<https://acervo.estadao.com.br/noticias/acervo,albert-einstein-uma-voz-contra-o-nazismo,11513,0.htm>> acessado em: 13/09/2020

teoria termodinâmica uma vez estabelecida tinha grandes implicações. De outro modo se o movimento browniano não fosse observado, então a existência dos átomos ficaria em interrogação. Dessa maneira as consequências desse artigo de Maio eram de uma enorme importância para a física.

O artigo de Maio, Einstein demonstra o seu isolamento da comunidade científica em atividade. Neste trabalho Einstein cita apenas uma referência, ele dizia conhecer a existência do movimento browniano, mas confessou ter pouca informação sobre ele. Este artigo era sobre o movimento de pequenas partículas suspensas em líquidos imóveis, que afirmava Einstein, poderia ser o movimento browniano, só mais tarde esse artigo viria a ser chamado o artigo do movimento browniano.

Como foi falado por Robert Brow no seu primeiro trabalho em seu trabalho sobre o movimento browniano, se o movimento não era de origem biológica, como ele já havia comprovado, então as causas eram claramente físicas e era preciso encontrar uma explicação física. Desta forma Einstein viu neste movimento peculiar das partículas minúsculas uma forma de convencer os cientistas que ainda rejeitavam a ideia da existência atômica. Mas a sua abordagem deste fenômeno era também uma extensão lógica, tanto do seu artigo de Abril como do seu trabalho prévio sobre flutuações estatísticas.

De acordo a teoria atômica, os átomos num gás ou líquido apresentam movimentos aleatórios contínuo (nos sólidos, os átomos localizam-se em propriedades particulares e os seus movimentos estão limitados à região imediatamente envolvente dessas zonas particulares). Essas propriedades observadas de um gás ou de um líquido resultam no produto da aleatoriedade invisível no comportamento médio dos seus átomos constituintes. Num sistema aleatório podem ocorrer flutuações durante as quais os elementos aleatórios podem ocorrer flutuações durante as quais os elementos aleatórios podem ocorrer flutuações durante as quais os elementos aleatórios que constituem o sistema mais amplo se afastam do seu comportamento médio. Como por exemplo, a atmosfera tem um comportamento médio, observam-se padrões meteorológicos médios. Quando ocorre um longo período de condições

climatéricas pouco habituais, uma série de dias com temperaturas muito acima ou abaixo da média, isto deve-se a uma flutuação.

Einstein então relacionou aleatoriedade com a teoria atômica da matéria, as flutuações como uma parte intrínseca do atomismo. As propriedades macroscópicas básicas de um gás são a temperatura, a pressão e o volume, são propriedades que definem o comportamento de um gás. Uma propriedade que define a essência de um gás é sua temperatura que é determinada pela velocidade média das moléculas que constituem o gás. Outra propriedade importante que define um gás é sua pressão, que determina as colisões das moléculas contra as paredes do recipiente. Se ocorrer flutuações fazendo com que os átomos desviem do seu comportamento normal, e sendo as flutuações grandes, então isso levanta indagações relativas à estabilidade das propriedades medidas, levantando dúvidas sobre a termodinâmica clássica. “As leis da termodinâmica são geralmente verdadeiras ou, como argumentou Ludwig Boltzmann, são verdadeiras apenas em sentido estatístico? Era esta questão que Einstein se referia no início do artigo”. (RIGDEN, John S, 2007, pag.73).

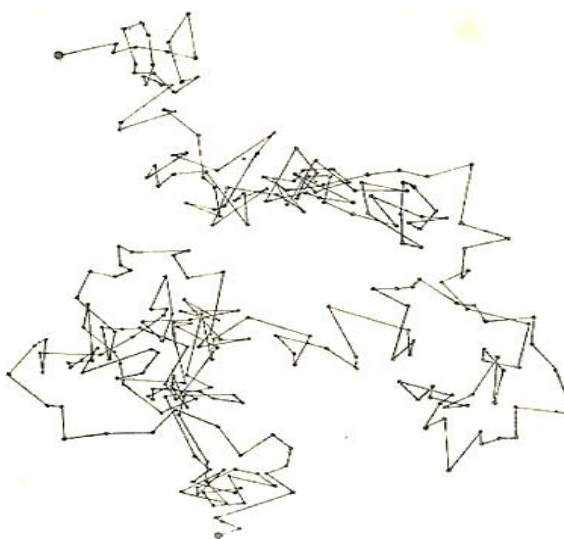
Ludwig Boltzmann e J. Willard Gibbs, principais autoridades em estatística física, examinaram em seus trabalhos que as flutuações estatísticas não poderiam ser observadas. Einstein não aceitou esta conclusão e buscou as ferramentas físicas para demonstrar e observar as flutuações estatísticas, ele acreditava que o movimento aleatório das minúsculas partículas suspensas num líquido era o resultado das flutuações estatísticas nos movimentos das moléculas do líquido.

“ O <<movimento browniano>> era o meio físico que Einstein procurava; mais ainda, era um meio para responder não a uma, mas a três questões básicas da física. Átomos, sim ou não? Flutuações estatísticas, sim ou não? As leis da termodinâmica: são absolutas ou estatísticas? As respostas a estas três questões eram condicionadas pelos quatro <<ses>>: se Einstein pudesse desenvolver com sucesso uma teoria para descrever o movimento das partículas suspensas num líquido, se essa teoria se baseasse nas flutuações estatísticas do movimentos aleatórios

das moléculas líquidas, se a teoria fosse verificável experimentalmente, e, finalmente, se os resultados experimentais estivessem de acordo com a teoria de Einstein, então as três respostas seriam: Átomos? Sim. Flutuações estatísticas? Sim. E as leis da termodinâmica? Estatísticas.” (RIGDEN, John S, 2007, pag.74).

No artigo de Maio um dos elementos mais provocadores no contexto era a teoria cinética do calor, átomos, flutuações estatísticas, e a termodinâmica clássica estavam na balança. Einstein pôde usufruir do artigo de Abril para adicionar no de Maio, entre a data em que terminou o primeiro e aquela em que submeteu o segundo para publicação decorreram uns meros 10 dias. Neste artigo do mês de Maio Einstein teve um grande desafio, estabelecer a realidade atômica e fazê-lo ser aceito pelos grandes cientistas da época. A imagem de um líquido borbulhando com o movimento das moléculas pedia para ser examinada como ocorrência possível do movimento browniano.

Figura 6 - A figura abaixo mostra a trajetória de uma partícula executando o movimento browniano.

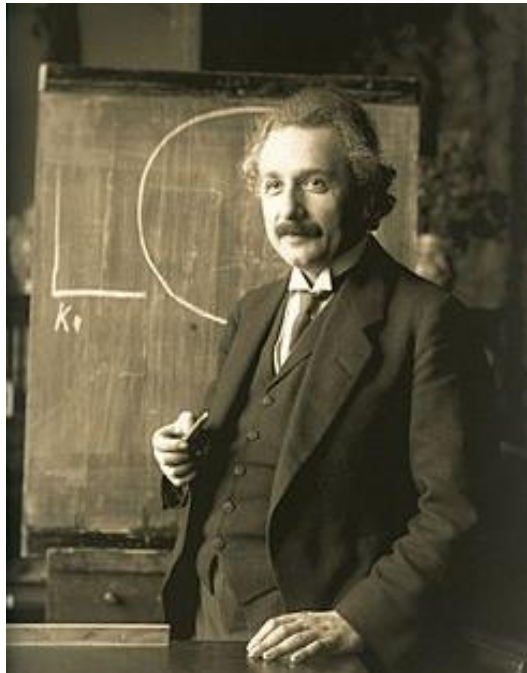


Fonte: imagem retirada da internet⁵

⁵ Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v29n1/a07v29n1.pdf>> acessado em: 29/09/2020

2.1.4 A fusão do espaço e tempo

Figura 7 - Albert Einstein em 1921, no auge da sua fama mundial. Einstein tornou uma celebridade quando sua teoria geral da relatividade foi confirmada em 1919.



Fonte: imagem retirada da internet⁶

O artigo do mês de Junho traz uma fusão do espaço tempo. Einstein de início deste trabalho ele escreveu sobre dois critérios que uma teoria física deve ter, o primeiro refere-se à confirmação externa da teoria e o segundo diz respeito à perfeição interna da teoria. O acordo entre a teoria e os fatos experimentais é extremamente essencial em todas as ciências, algumas vezes os fatos precedem explicação teórica, como por exemplo com o movimento browniano, as partículas suspensas no líquido já tinham sido observadas por décadas antes do artigo de Maio de Einstein. Em outros casos a teoria precede o fato experimental como no caso do efeito fotoelétrico no seu

⁶ Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein> acessado em 13/09/20

artigo de Março, no qual a sua teoria apresentou algumas propriedades físicas antes de os experimentadores a terem definido como verdade.

O artigo de Junho de Einstein sobre a teoria especial da relatividade estava no topo da plenitude, ela emitia perfeição. Em 1905 eram utilizadas três grandes teorias físicas para explicar a variabilidade da natureza, eram elas: mecânica, termodinâmica e o eletromagnetismo. Estas três teorias da física tinham-se tornado muito refinadas, e no final do século XIX já se pensavam que estavam na sua forma final ou muito perto. Anteriormente ao ano de 1905, foi bastante agitado para profissão de físico. Descoberta do raio X (1895), a radioatividade (1896), o quantum (1900), estas conquistas já mostravam que a mecânica de Newton e o eletromagnetismo de Maxwell não eram capítulos finais.

Em 1887, uma experiência realizada em Cleveland, não conseguiu detectar a existência do éter. Alguns cientistas pensavam que sabiam que a luz se propagava do Sol para a Terra como uma onda. Mas para que isso acontecesse deveria ter um meio para que essa onda se propagasse, e como todos outros fenômenos ondulatórios, acreditava-se com absoluta confiança que as ondas luminosas necessitavam de um meio. Esse meio seria o éter. O éter, como meio para a luz, deu sentido à velocidade da luz.

Durante anos Einstein teve na cabeça ideias provocadoras relacionadas com o seu artigo de Junho, ele tinha dúvidas quanto ao éter ter algum significado físico. Ele imaginou a correr ao lado de uma onda de luz identificando vários problemas nessa imagem. Esses devaneios erram peças do que por fim se transformaria num todo coerente.

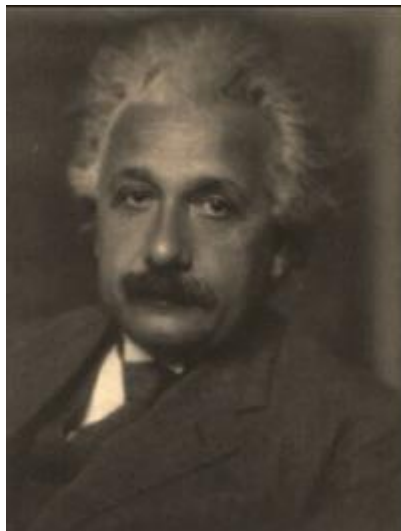
Einstein em seu artigo de Junho expõe o princípio da relatividade que as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais e o princípio da velocidade da luz em que é a mesma em todos os sistemas de referência inerciais, independentemente das velocidades quer da origem da luz ou do observador da luz. Entre a maioria dos físicos, particularmente entre os principais físicos, a teoria da relatividade era largamente aceite em 1911. Max Laue, o aluno favorito de Max Planck,

publicou o primeiro livro sobre a relatividade. Arnold Sommerfeld, um físico de Munique, descreveu a teoria da relatividade de Einstein como uma das riquezas seguras da física.

Desde 1905, a teoria especial da relatividade tem sido testada experimentalmente. A teoria enfrentou vários desafios. Os princípios da relatividade especial são verificados experimentalmente todos os dias, em laboratórios onde as partículas são aceleradas a velocidades próximas das da luz, e a teoria mantém-se firme, até hoje. Atualmente a teoria especial da relatividade ganhou seu lugar como super teoria. Qualquer teoria física deve integrar a teoria da relatividade de Einstein. Essa super teoria estimulou e continua influenciando discurso filosófico, o idealismo, o realismo e o materialismo são debatidos hoje de forma diferente do que faziam em 1905. A teoria da relatividade está cheia de profundas e fascinantes ideias, e como resultado tornou-se parte da nossa cultura.

2.1.5 O artigo que relaciona massa e energia

Figura 8 - Albert Einstein em 2 de Janeiro de 1931, quando demonstrou no seu artigo de Setembro que a energia e a massa eram equivalentes, deve ter-se sentido um tanto como parece neste retrato... um pouco endiabrado?



Fonte: imagem retirada da internet⁷

⁷ Disponível em: <<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/270713>> acessado em 13/09/20

O artigo de Setembro trazia a famosa equação. Galileu, um dos fundadores da ciência moderna, disse que a linguagem da Natureza é a matemática. A física tenta identificar as leis invisíveis que determinam as configurações do mundo visível. O poder de aplicar as leis básicas da física resulta das suas expressões matemáticas. Reúnem-se mais ou menos uma dúzia de leis, com as suas numerosas aplicações, e as equações matemáticas multiplicam-se.

Existem várias equações que representam uma teoria física importante. Mas só uma destas equações é conhecida por gente de todas as profissões, em todas as ocupações e estratos sociais pelo mundo inteiro. Essa equação é a simples $E = mc^2$ de Einstein. Nem todos podem compreender as minúcias da sua teoria, mas sabem que equação de Einstein significa algo de muito importante. Seja qual for o nível de compreensão com que a encarem as pessoas, a equação de Einstein, apresentada pela primeira vez no seu artigo de Setembro de 1905, tornou-se parte da cultura mundial.

Esse artigo é qualitativamente diferente dos seus outros artigos de 1905. Einstein entregou o seu artigo sobre a teoria especial da relatividade nos últimos dias de Junho e no final de Setembro entregou o artigo que relacionava massa e energia. O artigo de Setembro tinha como base o artigo de Junho, é o mais curto dos artigos de 1905, tem apenas três páginas. Podia ter sido o capítulo final do artigo de Junho no qual teria sido uma conclusão espetacular.

“O artigo de Junho uniu o espaço e tempo. O de Setembro uniu a energia e a massa. O espaço e o tempo parecem totalmente diferentes, e, contudo, Einstein mostrou que para descrever a natureza com precisão, deve juntar-se os dois. A massa e a energia também parecem duas coisas completamente não relacionadas. Não são semelhantes, agem similarmente, mas no fundo a natureza diz-nos que são a mesma”(RIGDEN, John S, 2007. pág.128).

E desta maneira Einstein concluiu o artigo de Setembro de 1905.

2.2 Um pouco de história sobre o movimento browniano

Figura 9 - Robert Brow (1773-1858)



Fonte: imagem retirada da internet⁸

Em 1827, o botânico Robert Brow (1773-1858) demonstrou pela primeira vez que a matéria era composta de partículas minúsculas. Enquanto observava pequenos grão de pólen na água com o microscópio, Brow verificou que esses grânulos se moviam constantemente como se alguma coisa oculta estivesse chocando neles. Várias observações destacaram a hipótese desses movimentos tivessem a sua origem nas correntes de convecção no líquido, ou da sua gradativa evaporação. Brow imaginava que essa mobilidade nascia da própria partícula, porém esta suspeita foi rejeitada quando “ele descobriu que o mesmo movimento ocorria quando usava grãos de pólen que haviam sido guardados durante 100 anos, demonstrando que o movimento não era iniciado pelos grãos vivos.” (ROONEY; ANNE, 2013, p. 42).

Nas décadas seguintes incontáveis tentativas foram feitas para descobrir a natureza do movimento browniano. Experimentos laboratoriais demonstraram que o movimento aumenta sua intensidade quando reduzem a viscosidade do meio ou o tamanho das partículas brownianas, e quando elevava a temperatura da solução.

⁸ Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Robert_Brown_\(young_-_larousse\).jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Robert_Brown_(young_-_larousse).jpg)> acessado em 13/09/2020

Muitas causas possíveis foram aos poucos eliminadas, tais como: atrações ou repulsões entre as partículas suspensas, ações capilares ou higrométricas, bolhas temporárias de ar, correntes de convecção no interior da solução, gradientes de temperatura ou algum tipo de perturbação mecânica, além de outros tipos de instabilidade no fluido. (SILVA; J.M. , LIMA; J.A.S; 2007, v.29, n.1, p.25)

A partir de 1860 começava a ganhar corpo a teoria que o movimento errático browniano poderia ocorrer devido às colisões com moléculas do fluido, e que o movimento aleatório aparentemente nunca cessava. Em 1877, J. Desaulx retomou o tema sugerindo: “em minha forma de pensar, o fenômeno é um resultado de movimento molecular térmico no ambiente líquido (das partículas).” (ROONEY; ANNE, 2013). Outro investigador do movimento que concordou com Desaulx foi o físico francês Louis Georges Gouy (1854-1926) que em 1889 descobriu que quanto menor a partícula, mais rápido ela se move.

O geofísico austríaco Felix Maria Exner (1876-1930) fez um experimento em 1900, conseguindo medir o movimento e relacionou essa cinesia ao tamanho e à temperatura da partícula. “ Exner calculou a velocidade das moléculas com base em observações que, segundo ele interpretou, forneciam as velocidades médias das partículas em suspensão.” (STACHEL; JOHN, 2001, p.92).

Durante a vida acadêmica, Einstein apoderou-se de conhecimentos divergentes a respeito da teoria molecular do calor quando leu os trabalhos de Mach, Ostwald e Boltzmann. Em 1900, Einstein concluiu a leitura de uma obra de Boltzmann a Gastheorie, assim chamada a teoria do gás. Ludwig Boltzmann (1844-1906) era um físico austríaco fragilizado emocionalmente e mentalmente. “A desilusão com a maioria dos físicos que rejeitaram o atomismo acabou contribuindo para o suicídio de Boltzmann, que se enforcou em 1906.” (ROONEY; ANNE, 2013, p.42).

Einstein criticava Boltzmann pela falta de ênfase na confrontação da sua teoria com a observação, porém ficou absolutamente convencido da sua retificação dos

princípios teóricos, em suas primeiras incursões de pesquisa independente que publicou, Einstein entendeu como correta a constituição atômica da matéria e da eletricidade, desenvolvendo uma teoria das forças moleculares estabelecendo muitas relações entre fenômenos observáveis. Em concordância com essa teoria, Einstein em seu trabalho dizia que “uma molécula dissolvida difere de um corpo em suspensão apenas no tamanho, e é difícil ver a razão pela qual corpos em suspensão não devam produzir a mesma pressão osmótica que um número igual de moléculas dissolvidas.” (STACHEL; JOHN, 2001, p.92).

De outra forma Einstein levantou questionamentos sobre a teoria clássica da termodinâmica usada para objetos macroscópico em partículas suspensas num fluido, não deveriam efetuar uma pressão osmótica sobre uma parede semipermeável, essa observação que ele fez era uma visualização deste problema de uma forma inédita, até então ninguém havia olhado dessa maneira, uma comparação com a teoria cinética. Einstein a partir deste momento promoveu uma mudança radical de perspectiva ao estudar relações entre teorias termodinâmicas e atômicas colocando em questão a legitimidade das explicações microscópicas da decorrência termodinâmica. O problema tinha começado a ter o seu núcleo sobre a aplicação do conceito termodinâmico, a pressão osmótica e as partículas em suspensão.

Em 1902, observações sobre o movimento browniano foram realizadas em uma recente invenção que foi o ultramicroscópio, tornando possível a resolução de muitas soluções coloidais e seus elementos. O ultramicroscópio demonstrou além da realidade física das partículas coloidais o seu movimento irregular como atributos notáveis. Embora esse equipamento experimental tenha trazido muito avanço na pesquisa desse evento, umas das suas propriedades fundamentais continuava inacessíveis, a questão de como medir as suas velocidades. Esse problema só foi discutido nos estudos teóricos do movimento browniano proposto por Einstein e Smoluchowski de modo independente nos seus trabalhos publicados em 1905 e 1907, respectivamente. “ Ambos introduziram o deslocamento quadrático médio das partículas em suspensão como quantidade observável primária no movimento browniano”. (STACHEL; JOHN, 2001, p.93). Einstein fundamentou que forças dissipativas relacionavam com a direção,

o sentido e a grandeza da velocidade de uma partícula suspensa num fluido, era de uma escala tão pequena que o fenômeno não poderia ser medido.

Assim em 1905, em um ano milagroso, Albert Einstein criava um modelo matemático que explicava o movimento browniano, ele estava convencido de que as moléculas eram responsáveis pelo movimento chegando às primeiras estimativas para obtenção das dimensões moleculares.

O francês Jean Perrin (1870-1942), foi importante para cancelar a teoria de Einstein sobre o movimento browniano. Em 1908, mediu o tamanho de uma molécula de água usando o modelo browniano de Einstein. “ Esta foi a primeira evidência experimental para a existência de moléculas, pela qual Perrin recebeu o Prêmio Nobel da Física em 1926”. (ROONEY; ANNE, 2013). Finalmente, nenhum cientista contrário a teoria atômica poderia negar a existência de átomos e moléculas.

3 A TERMODINÂMICA E O MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN

3.1 Alcance e Objetivos da Termodinâmica

A Termodinâmica é uma ciência experimental originada no século XIX, baseada em um pequeno número de princípios, que são generalizações feitas a partir da experiência. Ela diz respeito somente à propriedades macroscópicas ou de grande escala da matéria, e não faz hipóteses sobre a estrutura de pequena escala ou microscópica da matéria. Dos princípios da termodinâmica podem-se derivar relações gerais entre grandezas como coeficientes de expansão, de compressão, capacidades térmicas específicas (ou calores específicos), calores de transformação, e coeficientes magnéticos e dielétricos, e especialmente como estão são afetados pela temperatura. Os princípios da termodinâmica também nos dizem quais as poucas relações dentre estas devem ser experimentalmente determinadas para que todas as propriedades do sistema sejam completamente especificadas.

Os valores adquiridos por grandezas como as referidas só podem ser calculados com base em um modelo molecular. A “Teoria Cinética” da matéria aplica as leis da mecânica às moléculas individuais de um sistema, e possibilita, por exemplo, o cálculo do valor numérico da capacidade térmica específica de um gás e compressão das propriedades dos gases em termos da lei da força entre moléculas individuais, Fig. 4.1. Ela foi desenvolvida por Robert Boyle (1627-1691), Daniel Bernoulli (1700-1782), James Joule (1818-1889), A. Kronig (1822-1879), Rudolph Clausius (1822-1888), J. Clerk Maxwell (1813-1879) e outros.

A abordagem da “Termodinâmica Estatística” ou simplesmente “Física Estatística”, construída por J. Willard Gibbs (1839-1903) e Ludwig Boltzmann (1844-1906), ignora a consideração detalhada de moléculas como indivíduos e implica considerações estatísticas para encontrar a distribuição, nos estados de energia do sistema, do grande número de moléculas que constituem uma porção macroscópica da matéria. Para os sistemas, cujos estados de energia podem ser calculados pelos métodos da mecânica quântica ou da física clássica, tanto os valores das grandezas

acima mencionadas como as relações entre elas podem ser determinadas por meios perfeitamente gerais. Os métodos da estatística também dão maior discernimento dos conceitos de entropia e do princípio do aumento da entropia.

Figura 10 – James Prescott Joule (1818-1889)



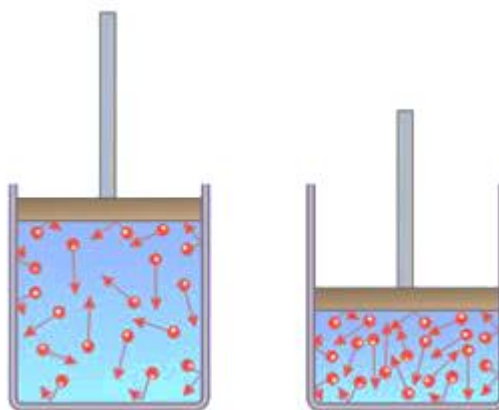
Fonte: Wikipédia – A enciclopédia livre.

A termodinâmica é complementar da teoria cinética e da termodinâmica estatística. A termodinâmica fornece relações entre propriedades físicas de qualquer sistema, desde que certas medidas sejam realizadas. A teoria cinética e a termodinâmica estatística permitem calcular as magnitudes dessas propriedades para os sistemas cujos estados de energia podem ser determinados.

Ao estudar o movimento browniano, Einstein buscou o conhecimento da teoria da termodinâmica bem como a teoria cinética do calor, sua dedução das leis que governam o movimento browniano, e sua subsequente verificação experimental feito por Perrin e outros, teve um grande significado para o reconhecimento da realidade física dos átomos. No seu artigo de maio sobre o movimento browniano, Einstein dividiu o seu trabalho em tópicos que falavam sobre a pressão osmótica, difusão, entropia, número de Avogadro, viscosidade, livre caminho médio. São itens

indispensáveis para o entendimento da teoria cinética dos gases, discutiremos a seguir alguns desses conceitos.

Figura 10 – Partículas em vermelho: moléculas no estado gasoso.



Fonte: imagem retirada da internet⁹

Nesse capítulo usaremos a “Teoria Cinética” para estudar uma partícula browniana em suspensão em um fluido do ponto de vista clássico e nos moldes da teoria de Einstein.

3.2 A Teoria Cinética dos Fluidos

3.2.1 Número de Avogadro

No final do século XVIII e início do século XIX, Lavoisier, Proust, Dalton e outros cientistas realizavam estudos com a finalidade de determinar a natureza fundamental da matéria, ou seja, descobrir como e do que a matéria era formada. Eles explicavam a matéria como sendo constituída de partículas indivisíveis e que se conservavam em quantidade e massa. Suas teorias fundamentavam-se nos resultados obtidos através de experimentos realizados pela combinação de gases, porém, verificou-se uma dificuldade na distinção entre átomos e moléculas ao observar que os volumes de alguns dos gases dessas reações não estavam de acordo com o previsto nas

⁹ Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/quimica/teoria-cinetica-dos-gases.htm>> acessado em 13/10/2020.

transformações gasosas já conhecidas. A dificuldade foi superada por um físico italiano chamado Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro (1776-1856). Avogadro afirmou que, estando nas mesmas condições físicas, volumes iguais de diferentes gases têm o mesmo número de partículas. Todavia, dizer que um gás tem o mesmo número de partículas que outro não implica que ambos possuam o mesmo número de átomos.

Figura 11 - Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro (1776-1856).



Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

A hipótese de Avogadro de que “volumes iguais de gases diferentes, nas mesmas condições de pressão e temperatura, contêm o mesmo número de partículas” e as ideias sobre massas atômicas e moleculares de outro cientista chamado, o químico Stanislao Canizarro (1826-1910) levaram à determinação da constante de Avogadro. A constante estabelecida por Avogadro e posteriormente verificada experimentalmente por vários cientistas é conhecida atualmente como o Número de Avogadro e representa o número de partículas ou moléculas contidas em um mol, $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ partículas/mol. O mol representa a grandeza da quantidade de matéria e a massa contida em 1 mol é chamada de massa molar (M). Para calcular

o número de mols contidos em uma determinada massa m de um gás, usa-se a seguinte relação:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}. \quad (3.1)$$

3.2.2 Gases Ideais

Consideremos uma massa nM de um gás, confinada em um recipiente de volume V . A massa específica ρ do gás, nM/V , poderá ser reduzida ou pela remoção do gás do recipiente (redução de n) ou pela transferência do gás para um recipiente de maior volume (aumentado V). A experiência mostra que, se a massa específica for suficientemente baixa, todos os gases, qualquer que seja sua composição química, tendem a apresentar uma certa relação simples entre a pressão p , volume V e a temperatura T . Isto sugere o conceito de “gás ideal”, aquele que teria o mesmo comportamento em qualquer condição.

Para valores suficientemente baixos da densidade a experiência mostra que: (a) Para uma dada massa de gás, mantida a temperatura constante, a pressão varia inversamente com o volume (Lei de Boyle), e (b) para uma dada massa de gás, mantida a pressão constante, o volume varia diretamente com a temperatura (Lei de Charles e Gay-Lussac). Estes dois experimentos podem ser resumidos na equação:

$$\frac{pV}{T} = \text{cte (para uma massa fixa de gás)}. \quad (3.2)$$

A constante na equação (3.2) foi determinada experimentalmente com nR , onde n é o número de moles, equação (3.1), R é uma constante a ser determinada para cada gás. No caso de baixas densidades, R tem o mesmo valor para todos os gases, ou seja, $R = 8,314 \text{ joule/mol K}$ e é chamada de constante universal dos gases.

A razão R/N_A

$$k_B = \frac{8,314 \text{ joule/mol K}}{6,023 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}} = 1,380 \times 10^{-23} \text{ joule/moléculas K} \quad (3.3)$$

é uma constante, conhecida como “constante de Boltzmann”. Escrevendo de (3.3), $R = k_B N_A = k_B (N/n)$, e substituindo em (3.2), obtém-se:

$$\frac{pV}{T} = Nk_B \quad (3.4)$$

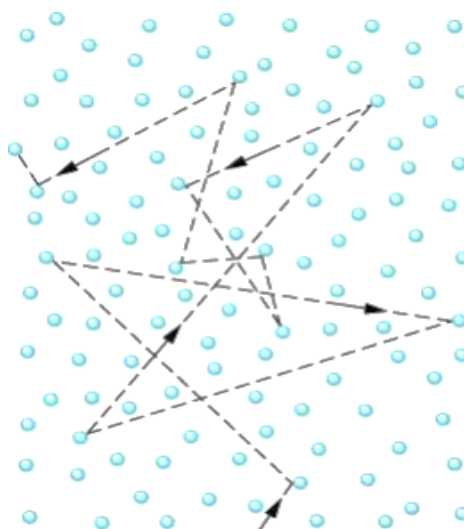
a equação de estado térmico de um gás ideal. Portanto um gás ideal é aquele que obedece a esta relação sob quaisquer condições. Tal gás na realidade não existe, mas é um conceito útil devido ao fato de que o comportamento de todos os gases reais se aproxima do comportamento de um gás ideal, a densidades suficientemente baixas. Do ponto de vista microscópico e clássico, os gases ideais si fundamentam nas seguintes suposições: “Um gás é constituído de partículas chamadas moléculas”, “as moléculas são dotadas de movimento desordenado e obedecem às leis de Newton”, “o número total de moléculas do gás é muito grande”, “o volume das moléculas é uma fração desprezível do volume ocupado pelo gás”, “as forças que atuam sobre as moléculas são desprezíveis, exceto durante uma colisão” e as “colisões são elásticas e de duração desprezível”.

3.1.3 Livre caminho médio

O estudo sobre o movimento das moléculas de um gás ideal, mostra como é o movimento de uma molécula de um gás, que ao longo do seu percurso sofre mudanças súbitas tanto do módulo como da direção da velocidade ao colidir elasticamente com outras moléculas. Entre colisões sucessivas, o movimento de uma molécula de um gás é retilíneo e uniforme. A distância média que uma molécula percorre entre duas colisões sucessivas é chamada “livre percurso médio” ou “livre caminho médio”. Se as moléculas fossem pontos, elas não colidiriam e o livre caminho médio seria então infinito. Entretanto, as moléculas não são pontos, por isso ocorrem choque entre elas. Se elas fossem tão numerosas que enchessem completamente o

espaço disponível, não deixariam lugar para o movimento translacional, o livre caminho médio seria, neste caso, nulo.

Figura 12 – Movimento de uma molécula em gás, uma sequência de trajetórias retilíneas interrompidas por colisões com outras moléculas.



Fonte: imagem retirada da internet¹⁰

O livre caminho médio λ é a distância média percorrida entre duas colisões sucessivas. Logo λ será a distância total $v\Delta t$ percorrida no intervalo de tempo Δt , dividida pelo número de colisões que ocorrem neste intervalo de tempo,

$$\lambda = \frac{v\Delta t}{n\pi d^2(v\Delta t)} = \frac{1}{n\pi d^2} \quad (3.4)$$

Essa equação se fundamenta no modelo acima descrito, isto é, uma molécula que se choca com alvos estacionários. Na realidade a molécula choca-se com alvos que se encontram em movimento. A frequência das colisões neste caso é aumentada, resultando em uma redução do livre caminho médio, é mostrado abaixo,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} \quad (3.4)$$

¹⁰ Disponível em: <file:///C:/Users/Hugo/Downloads/CAP_19_TEORIA_CINETICA_DOS_GASES.pdf> acessado em 21/10/2020.

o termo $\sqrt{2}$ é obtido de uma distribuição real de velocidades das moléculas conduzindo o resultado $\bar{v}_{\text{rel}} = \bar{v}\sqrt{2}$ (velocidade relativa média).

Para explicarmos esta equação vamos analisar uma única molécula supondo que ela está se movendo com velocidade constante v e as demais moléculas estão em repouso.

“O livre caminho médio das moléculas de ar ao nível do mar é cerca de 0,1 μ m. A uma altitude de 100 Km, o ar é tão rarefeito que o livre caminho médio chega a 16 cm. A 300 Km, o livre caminho médio é da ordem de 20 Km. Um problema enfrentado pelos cientistas que estudam a física e a química da atmosfera superior em laboratório é a falta de recipientes suficientemente grandes para conter amostras dos gases de interesse, como freon, dióxido de carbono, e ozônio, nas condições a que estão submetidos na atmosfera superior”. (Halliday & Resnick, 2016, pag.233).

3.2.4 Equação da Difusão

Quando é aberto um frasco de perfume numa sala fechada, é possível sentir o seu cheiro rapidamente em todo ambiente. Isso acontece porque as moléculas do líquido depois de evaporar difundem-se pelo ar, propagando por todo aquele ambiente. Da mesma forma acontece se colocarmos um pouco de açúcar em uma xícara com café, as moléculas de sacarose difundem por todo o café. Esses exemplos demonstram que, para acontecer o fenômeno da difusão, a distribuição espacial das moléculas, não poderá ser homogênea, deverá existir uma diferença ou um gradiente de concentração entre dois pontos do meio.

O movimento browniano é um exemplo da ocorrência do processo difusivo, e a lei mais utilizada e citada no processo de difusão usual é a Lei de Fick. Esta lei afirma

que a densidade de corrente de partículas é proporcional ao gradiente de concentração dada por:

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho \quad (3.4)$$

onde D é o coeficiente de difusão dependente das propriedades do meio, e indica a rapidez com que a grandeza medida por ρ difunde-se de regiões de alta concentração para regiões de baixa concentração. “O sinal negativo combinado com o gradiente na “Lei de Fick”, significa que a difusão ocorre da região de alta densidade para região de baixa densidade.” (MACEDO, ANTÔNIO, 2008, pág.14). A quantidade ρ é definida como a quantidade de substância e pode ser função do tempo e da posição, $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

A equação de continuidade é dada por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (3.5)$$

Essa expressão nos diz uma alteração na densidade em um sistema (o gás, por exemplo) é devido a um fluxo de entrada ou de saída de partículas do sistema. Ou seja, não pode haver criação nem destruição de partículas.

Substituindo (3.4) em(3.5),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D\nabla\rho) = D\nabla^2\rho \quad (3.6)$$

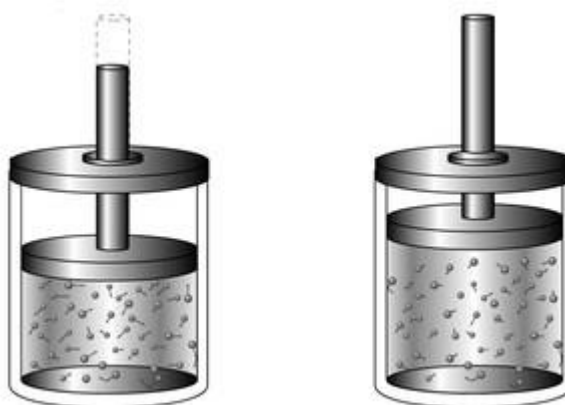
ou como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é chamada “equação de difusão” no caso em que D é constante e ∇^2 é o operador de Laplace ou laplaciano. Nos casos de difusão anisotrópica de partículas D é uma matriz simétrica definida positiva. Se o coeficiente de difusão depende da densidade, então a equação não é linear, de outra maneira seria linear. Além disso,

esta equação, possuem inúmeras aplicações importantes na Física atual, dentre elas podemos citar: Difusão de calor em diferentes meios, difusão de massa, difusão de carga elétrica em meios condutores. Quando se diminui a pressão em um gás as partículas se difundem através do gás, Figura 12, e a equação permite também estudar esse comportamento.

Figura 13 – Um gás sob pressão de um êmbolo externo.



Fonte: Wikipédia – Enciclopédia livre.

3.3 O artigo de Einstein sobre o movimento browniano

Na introdução do artigo de Einstein de 1905, Einstein escreveu que “corpos de tamanho visível ao microscópico, e que estão em suspensão em um líquido, devem executar, como consequência dos movimentos térmicos moleculares, movimentos de tal magnitude que podem ser facilmente observáveis com a utilização de um microscópio. É possível que os movimentos a serem aqui descritos sejam idênticos ao assim chamado “movimento molecular”; entretanto, os dados que tenho disponíveis sobre este último são tão imprecisos que eu não poderia formar uma opinião a respeito”. Nas seções iniciais desse artigo (isto é, da teoria cinético-molecular do calor) para mostrar que, em situações de grande diluição, pressão osmótica tem o mesmo tipo de comportamento ideal das moléculas de uma solução diluída (como já tinha sido bem caracterizados pelos químicos da época). Não há surpresa nesses cálculos de

termodinâmica estatística, ainda embrionários, para um sistema de partículas não interagentes. Em seguida, Einstein deduz novamente a relação entre a difusão e a viscosidade. Vamos rever essa dedução, seguindo os argumentos da tese de Doutorado.

A ideia engenhosa consiste em considerar uma força F (na direção do eixo x) atuando sobre as partículas grandes da solução (ou suspensão), contidas num volume elementar de comprimento Δx e seção transversal ΔS . Para esferas rígidas de raio a e velocidade v , mergulhada em um fluido com viscosidade η , essa força deve ser dada pela lei de Stokes,

$$F = (6\pi\eta a)v. \quad (3.8)$$

Nesse ponto Einstein reporta-se ao texto de mecânica de Kirchhoff, única referencia citada no primeiro trabalho sobre o movimento browniano, que foi certamente estudado durante seus anos de formação em Zurique. Mas as partículas se difundem pelo fluido devido ao gradiente de pressão. Então nesse volume elementar, estariam sujeitas a uma força por unidade de volume ao longo do eixo, dado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x}. \quad (3.9)$$

Podemos agora escrever uma equação de balanço entre essas duas forças,

$$F = -\frac{M}{\rho N_A} \frac{\partial p}{\partial x} = 6\pi\eta a v. \quad (3.10)$$

onde ρ é a densidade de massa e M é a massa molar do soluto. Obtemos assim uma expressão para a velocidade v das partículas, que nos remete ao fluxo ao longo do eixo x (quantidade de massa das partículas atravessando a seção de área ΔS durante o intervalo de tempo $\Delta t > 0$),

$$J = \rho v = -\frac{M}{6\pi\eta a N_A} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Uma a relação (3.4) de um gás ideal sob pressão osmótica,

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{RT\rho}{M}. \quad (3.12)$$

temos,

$$J = -\frac{RT}{6\pi\eta a N_A} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3.13)$$

de onde vem a famosa expressão de Einstein para o coeficiente de difusão das partículas no fluido,

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A}. \quad (3.14)$$

Vamos agora lembrar que a equação de difusão, conhecida desde o início do século XIX, é usualmente obtida a partir da equação diferencial de conservação da massa (3.5), com a suposição adicional de uma dependência linear do fluxo com o gradiente de concentração, obtendo a equação de difusão (3.7). Na versão unidimensional, ao longo do eixo x , é dada por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (3.15)$$

Em seguida, no mesmo artigo, Einstein propõe uma nova dedução dessa equação de caráter probabilístico da Teoria Cinética, antecipando a relação de Chapman-Kolmogorov e as teorias modernas de cadeias markovianas. A idéia consiste em supor que as partículas executem movimentos independentes e que os movimentos da mesma partícula em diferentes intervalos de tempo também sejam processos mutuamente independentes (em intervalos de tempo pequenos, mas suficientemente grandes para dar margem a observações). Seja $p(\Delta)d\Delta$ de uma partícula em suspensão sofrer um deslocamento entre Δ e $\Delta + d\Delta$ num intervalo de tempo τ . Essa densidade de probabilidade deve ser simétrica, $p(\Delta) = p(-\Delta)$ e normalizada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\Delta) d\Delta = 1. \quad (3.16)$$

Então, se $n = n(x, t)$ for o número de partículas por unidade de volume no instante de tempo $t > 0$, temos a relação probabilística,

$$n(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x + \Delta, t) p(\Delta) d\Delta. \quad (3.17)$$

Como τ e Δ devem ser macroscopicamente pequenos, podemos escrever as expansões de Taylor nessas variáveis,

$$n(x, t + \tau) = n(x, t) + \frac{\partial n}{\partial t} \tau + \dots, \quad (3.18)$$

$$n(x + \Delta, t) = n(x, t) + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \Delta^2 + \dots. \quad (3.19)$$

Inserindo as expressões (3.18) e (3.19) na equação (3.17), levando em conta as propriedades de $p(\Delta)$ e retendo apenas os termos de ordem dominante, obtemos a expressão,

$$\begin{aligned} n(x, t) + \frac{\partial n}{\partial t} \tau + \dots &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ n(x, t) + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \Delta^2 + \dots \right\} p(\Delta) d\Delta \\ &= n(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} p(\Delta) d\Delta + \frac{\partial n}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta p(\Delta) d\Delta + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Na expressão (3.20), a primeira integral é igual a 1 porque a distribuição é normalizada, a segunda integral é nula porque a distribuição é par restando a seguinte expressão na aproximação considerada,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta \right\} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (3.21)$$

ou na forma,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

e comparando (3.22) com (3.15), observamos D é o coeficiente de difusão das partículas em suspensão,

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta. \quad (3.23)$$

Portanto, o desvio quadrático médio dos deslocamentos das partículas em suspensão é definido por,

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta = 2D\tau, \quad (3.24)$$

é proporcional ao coeficiente de difusão, comportando-se linearmente com o tempo. Essa equação representa uma primeira forma das conhecidas “relações de flutuação-dissipação”. Neste ponto, Einstein argumenta que os movimentos das diversas partículas são independentes e que, portanto, a origem das coordenadas não deve ter nenhum significado. Portanto, a função $n(x,t)$, devidamente normalizada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t) dx = N_0 \quad (3.25)$$

Representa a densidade de partículas cujas posições sofreram um acréscimo x entre o instante inicial e o tempo t . Einstein aponta a solução da equação da equação de difusão (3.22), com condições iniciais apropriadas, é da forma gaussiana

$$n(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]. \quad (3.26)$$

Então, com essa interpretação de $n(x,t)$, temos o deslocamento quadrático médio expresso na forma,

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= 2Dt = \frac{RT}{3\pi a\eta N_A} t \\ &= \frac{k_B T}{3\pi a\eta} t\end{aligned}\quad (3.27)$$

que é uma das celebres expressões de Einstein, fornecendo a indicação precisa sobre as grandezas a serem medidas experimentais.

O deslocamento característico cresce com \sqrt{t} ,

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\langle x^2 \rangle} \\ &= \sqrt{2Dt} = \sqrt{\frac{RT}{3\pi a\eta N_A}} \sqrt{t}\end{aligned}\quad (3.28)$$

afastando-se das formas balísticas usuais, pois os deslocamentos usuais são aleatórios, podendo ocorrer tanto para a direita quanto para a esquerda. Para partículas de um micron de diâmetro, em suspensão na água a temperatura ambiente, Einstein estimou um deslocamento característico da ordem de 6 microns em um minuto (ou seja, valor perfeitamente passíveis de observação). A dependência com o tempo, $\sqrt{\langle x^2 \rangle} \sim \sqrt{t}$, explica as dificuldades das medidas ingênuas de velocidade. Nesse raciocínio probabilístico de Einstein percebe-se a conexão com o problema do passeio aleatório em uma dimensão, que costuma ser explorado nos textos de “Termodinâmica Estatística” que recupera a expressão (3.24). Nos textos introdutórios, também mostra que no limite de tempos grandes ($N \rightarrow \infty$), de acordo com o “teorema central do limite”, a distribuição de percursos do caminhante aleatório tende a uma função gaussiana, como foi encontrado por Einstein.

No texto acima procuramos seguir os passos de Einstein, e seus argumentos originais dos trabalhos de 1905, como a proposta pioneira de uma teoria microscópica para o movimento de partículas suspensas ou o movimento browniano. Einstein na época, percebeu que o movimento browniano é um excelente laboratório para observar e medir os efeitos das flutuações microscópicas de um sistema físico. A teoria de Einstein, resumida na famosa dependência linear com o tempo de observação do

desvio quadrático médio das posições das partículas brownianas, indicou as grandezas que deveriam ser medidas e abriu caminho para uma série de experiências e Jean Perrin e colaboradores.

Usando a equação (3.27), podemos estimar o valor de λ com valores atuais das constantes físicas para partículas em água:

$$N_A = 6,023 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}$$

$$R = 8,314 \text{ joule/mol K}$$

$$t = 1,0 \text{ segundo (s)}$$

$$a = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\eta = 1,35 \times 10^{-2} \text{ Pa.s}$$

$$T = 290,15 \text{ K (} t = 17^0 \text{C)}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{(8,314 \text{ J/mol K})(290,15 \text{ K})\sqrt{(1\text{s})}}{3\pi(1,0 \times 10^{-6} \text{ m})(1,35 \times 10^{-2} \text{ Pa.s})(6,023 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol})} \\ &= 2,9668 \times 10^{-13} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

obtendo,

$$\lambda = 5,45 \times 10^{-5} \text{ cm} \tag{3.29}$$

Esse valor corresponde a 31% menor que o valor apresentado no artigo de Einstein em 1905, que foi $\lambda = 8 \times 10^{-5} \text{ cm}$. Mesmo assim, foi um avanço excepcional o resultado de Einstein, pela sua ordem de grandeza.

3.4 Alguns Experimentos do Movimento Browniano

Após os trabalhos de Einstein, em 1905 sobre a teoria do movimento browniano sugeriram vários experimentos foram feitos na tentativa de verificar os resultados.

3.4.1 O Experimento de Perrin

A medida do número de Avogadro consiste em contar, direta ou indiretamente, o número de constituintes num mol. Os átomos (ou moléculas) são extremamente

pequenos para serem contados diretamente. Jean Baptiste Perrin (1870-1942) em 1909 procurou um sistema físico onde as partículas fossem pequenas o suficiente para se comportarem como um gás ideal, mas grandes o suficiente para serem contadas. Da sua vasta experiência, como o estudo do movimento Browniano apresentado por Einstein, Perrin notou que o movimento aleatório das partículas se assemelhava muito com o movimento de moléculas com tanto sucesso tratados pela teoria cinética dos gases. A ideia de Perrin foi considerar uma suspensão constituída de partículas pequenas o suficiente para se comportarem como moléculas de um gás (devido ao seu movimento aleatório), mas grandes o suficiente para terem sua massa individual medida, comportaram-se como um sistema gasoso.

Figura 14 – Jean Baptiste Perrin (1870-1942)



Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

Um gás ideal na presença de um campo gravitacional distribui-se obedecendo a conhecida fórmula barométrica, segundo o qual a densidade de moléculas decresce com a altitude segundo a lei experimental,

$$n(z,t) = n_0 \exp\left[-\frac{Mgz}{RT}\right]. \quad (3.30)$$

onde $n(z)$ é a densidade a uma posição z , n_0 a densidade na superfície, M a massa molar das partículas e g a aceleração da gravidade local. Se medirmos a distribuição da densidade de um gás no campo gravitacional podemos determinar o valor de sua massa molar. Se conhecermos a massa de cada partícula m do sistema, podemos deter o valor do número de Avogadro através de: $N_A = M/m$. Perrin, utilizou uma suspensão de finas partículas na presença do campo gravitacional. Medindo-se a densidade destas partículas como função da altura determina-se o valor de M e conhecendo-se m obtém-se N_A .

O trabalho pelo qual ele é melhor conhecido é o estudo de coloides e, em particular, o movimento Browniano. Seus resultados neste campo puderam confirmar os estudos teóricos de Einstein nos quais foi mostrado que partículas coloidais deveriam obedecer às leis dos gases e conseqüentemente usar estas propriedades para obter o número de Avogadro. O valor medido por ele concordou excelentemente com outros valores obtidos por métodos completamente diferentes (seu estudo se trata da sedimentação em equilíbrio de suspensões que contêm partículas microscópicas de tamanho uniforme). As medidas de Perrin foram fundamentais para a evolução da atomística e sua realização foi recompensada com o Prêmio Nobel em 1926.

3.4.2 O Experimento de Eugen Kappler

Entre as muitas experiências subsequentes, podemos citar a tese de doutorado do físico alemão Eugen Kappler (1905-1977) em 1931, que observou o movimento browniano de um objeto relativamente grande, isto é, um pequeno espelho (de área $0,7 \text{ mm}^2$) suspenso de uma fina fibra de torção de quartzo. Um feixe de luz refletido no espelho móvel era registrado por um filme fotográfico móvel. O espelho era montado em uma câmara de gás de baixa pressão (10^{-2} mm de Hg). A função $\theta(t)$ (deslocamento angular em função do tempo) era registrada no filme fotográfico móvel.

Figura 15 – Eugen Kappler (1905-1977)



Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

Verificou-se claramente um movimento rotacional browniano do espelho, consistindo de uma série de deslocamentos angulares, produzidos por choques desequilibrados das moléculas com o mesmo. Quando a pressão do gás era reduzida observa-se uma redução gradual do movimento. A partir do registro fotográfico podem ser determinados o deslocamento angular $\theta(t)$ e a velocidade angular $\omega(t)$. O princípio da equipartição da energia exige que

$$\frac{1}{2}I\overline{\omega^2} = \frac{1}{2}\kappa\overline{\theta^2} = \frac{1}{2}k_B T \quad (3.31)$$

porque $\frac{1}{2}I\overline{\omega^2}$ é a energia cinética média rotacional do sistema e $\frac{1}{2}\kappa\overline{\theta^2}$ sua energia potencial média; I é o momento de inércia do sistema e κ a constante de torção do fio. A partir de suas observações, Kappler calculou a constante de Boltzmann k_B e, pela

relação $N_A = R/k_B$, obteve-se o número de Avogadro. Os valores obtidos por Kappler foram $k_B = 1,36 \times 10^{-23}$ J/molécula K $\pm 3\%$ (o valor aceito atualmente é $k_B = 1,380 \times 10^{-23}$ J/K molécula, concordante com aquele dentro do limites de erro) e $N_0 = 6,1 \times 10^{23}$ partículas por mol.

3.5 Algumas aplicações do movimento browniano atuais

O estudo do movimento browniano de Einstein impactou em várias áreas interdisciplinares da ciência e tecnologia. Nesta seção, falaremos de forma resumida sobre algumas delas.

3.5.1 Na Física e Matemática: A dinâmica de processos estocásticos

Por meio do movimento browniano, Einstein possibilitou a observação de flutuações de partículas que anteriormente possuíam desvio quadrático médio muito pequeno. A base de sua teoria é tida como a semelhança do comportamento de soluções e do comportamento de suspensões diluídas, onde existe uma relação do coeficiente de difusão com a viscosidade, somado à uma dedução probabilística da equação de difusão. Com esses cálculos foi obtido uma relação entre o desvio quadrático médio, o coeficiente de difusão e tempo de observação. Alguns anos após as descobertas de Einstein, Marian Smoluchowski, em 1906, trouxeram a solução do problema para a atenção dos físicos, apresentando-a como um modo indireto de confirmar a existência de átomos e moléculas. Suas equações descrevendo um movimento Browniano foram subsequentemente verificadas pelo trabalho experimental de Perrin em 1908.

No mesmo ano, 1908, o físico francês Paul Langevin (1872-1946), assim como outros cientistas, buscou a generalização das fórmulas já criadas na dinâmica de processos estocásticos. Assim, Langevin definiu que o Movimento Browniano de uma partícula que esteja fora de campos de forças conservativas, pode ser escrito como uma equação diferencial, dando origem a dinâmica de processos estocástico como área da física matemática, que já tinha sido começada em 1880 por Thorvald N. Thiele

em um artigo sobre o “método dos mínimos quadrados” publicado em que abordava o movimento browniano e por Louis Bachelier publicou em 1900 sua tese de PhD “A teoria da especulação”, em que ele apresenta uma análise matemática dos processos estocásticos dos mercados de ações e de opções.

Figura 16 – Paul Langevin (1872-1946)



Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

3.5.2 Nas ciências econômicas: ações e variáveis de mercado

A formação de preços discutida por Marx e os economistas clássicos dentro da teoria econômica é um tema interdisciplinar e entendido como um processo complexo, já na visão dos economistas políticos clássicos, Smith e Ricardo dando ênfase Marx pensava que o desenvolvimento dos preços se dava por meio de leis de movimento inerentes no sistema econômico como um todo no entanto, os atuais economistas neoclássicos fazem uma abordagem bem diferente tendo um raciocínio de maneira estática com base em funções de oferta e de demanda que definem os equilíbrios de mercado. Um físico-economista que procurou explicar a

formação de preços foi Louis Bachelier (1870-1946) defendeu sua tese de doutorado orientada pelo matemático Henri Poincaré usando ideias da física aplicando métodos equivalentes ao movimento browniano para explicar a formação de preços em mercado de ações.

Figura 17 – Louis Bachelier (1870-1946)



Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

A teoria do movimento browniano é bastante utilizada para descrever imprevisíveis movimentos de curto e médio prazo dos ativos no mercado financeiro. O modelo de Bachelier não tem uma perfeição para descrever a dinâmica de preços de ativos financeiros pois a aleatoriedade é muito predominante em mercados, ou seja, “os preços a vezes ficam bêbados” ou imprevisíveis.

3.5.3 Nas ciências biológicas: nanomotores e motores brownianos.

Um “motor molecular” ou “nano-motor” é uma classe de máquina molecular que, tal como um motor macroscópico propriamente dito, é capaz de converter uma forma qualquer de energia aplicada sobre ele em energia mecânica para realizar um trabalho específico, como um movimento de rotação. Essas máquinas moleculares podem ocorrer naturalmente (como diversos motores biológicos) ou podem ser produzidos artificialmente. Diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o intuito de aperfeiçoar os nano-motores obtidos artificialmente até então, onde o grande objetivo dos químicos é construir um nano-motor que tenha a mesma eficiência de um motor biológico. Embora a expressão “motor molecular” esteja tradicionalmente ligada a motores biológicos, também pode ser usada para se referir a motores artificiais.

Entretanto, embora seja conveniente fazer analogias diretas entre nano-máquinas e nano-motores com suas contrapartes macroscópicas, é preciso ter cautela, pois estas analogias as vezes podem acabar confundindo ao invés de trazer respostas. Se para os motores macroscópicos, forças que governam o movimento destes (em especial, a gravidade) tem extrema relevância, essa mesma relevância é extremamente pequena para objetos como os nano-motores, que possuem dimensões extremamente diminutas. Neste mundo de nano-dimensões, há um efeito que possui extrema relevância e deve ser levado em consideração, um efeito inerente ao fluido onde os nano-motores se encontram: o chamado movimento browniano. Os motores moleculares são dependentes do movimento browniano, apesar de não serem originados por movimentos aleatórios (já que, de acordo com a 2ª lei da termodinâmica, o trabalho não pode ser derivado do movimento aleatório).

A exploração deste movimento possibilita aos motores (assim como as máquinas moleculares num todo) se moverem em um mundo tão turbulento. A natureza encontrou formas de explorar os efeitos da catraca browniana, algo que os pesquisadores vêm tentando imitar nas suas pesquisas de desenvolvimento de máquinas artificiais. Embora a direção do movimento nos nano-sistemas seja aleatória, estudos apontam que o principal problema para o funcionamento de uma nano-

máquina, o controle de seu movimento, pode ser contornado. A uni-direcionalidade que se busca neste movimento poderia ser obtida por meio da adição de assimetria a estrutura.

4 SIMULAÇÃO DO MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN NO MATLAB

4.1 Introdução

O MATLAB (abreviatura para MATrix LABoratory – Laboratório de Matrizes) é um programa de computador especializado e otimizado para cálculos científicos e de Engenharia. Inicialmente ele foi projetado para cálculo com matrizes; ao longo dos anos, transformou-se em um sistema computacional flexível, capaz de resolver essencialmente qualquer problema técnico. Ele implementa a linguagem de programação de mesmo nome, juntamente com uma vasta biblioteca de funções predefinidas que torna as tarefas de programação técnica mais fáceis e eficientes. Além disso, o MATLAB tem muitas vantagens, em comparação com linguagens computacionais convencionais (C++, Fortran e Python), entre elas podemos citar: Facilidade de uso, independência da plataforma, funções predefinidas diagramações independentes de dispositivos e interface gráfica de usuário.

Neste capítulo, usamos algumas funções do MATLAB para implementar um programa simples de simulação do movimento browniano se baseando nas ideias do artigo de Einstein sobre este assunto.

4.2 O Programa: Implementação da Simulação em MatLab

4.2.1 A Ideia Básica do Programa

O programa MATLAB (no Apêndice A) mostra como simular uma partícula browniana em três dimensões. O movimento browniano é composto por uma sequência de deslocamentos aleatórios normalmente distribuídos de acordo uma distribuição normal. Usamos a função “**randn(1,N)**” para retornar uma matriz de números aleatórios normalmente distribuídos com desvio padrão 1 (um). Os dois argumentos especificam o tamanho da matriz, que será $1 \times N$. O primeiro passo para simular o movimento é gerar um vetor de deslocamentos aleatórios “**displacement = randn(1,N)**”, onde N é o número de amostras a ser gerada. Para verificar o comportamento distribuição gerada usa-se o comando “**hist(displacement, 25)**” que

mostra um histograma dos valores gerados com 25 colunas verticais (define os 25 intervalos). Já os comandos “**figure()**” são usados para visualizar deslocamentos e o histograma.

```
N = 100;
particleCount = 100;
displacement = randn (1, N);
figure(1);
plot (displacement);
figure (2);
hist. (displacement, 25);
```

Para simular o movimento browniano a dinâmica das partículas brownianas devemos entrar com algumas condições iniciais: o diâmetro das partículas (d), a viscosidade (η), a constante de Boltzmann (k_B), a temperatura absoluta em Kelvin (T) e o intervalo de tempo (τ). Com esses dados é possível estimar o coeficiente de difusão obtido da Teoria Cinética de Einstein (3.15),

$$D = \frac{k_B T}{6\pi d \eta} \tau. \quad (4.1)$$

e em seguida usado para determinar parâmetro k . As constantes “ a ”, “ b ” e “ c ” são utilizadas para simular uma anisotropia nas trajetórias brownianas.

```
d = 1.0e-6;
eta = 1.0e-3;
kB = 1.28e-23;
T = 293;
D = kB*T/(6*pi*eta*d);
tau = 0.1;
time = tau*1:N;
dimensions = 3;
a = 0.00;
b = 0.00;
c = 0.00;
k = sqrt(2*D*tau);
```

A laço abaixo é usado para calcular as trajetórias das partículas. O comando “**particle{i}.dx = k * (a + randn(1,N))**” é usado para gerar os deslocamento na direção de x que é convertido para posição x usando a função “**cumsum(particle{i}.dx)**”. O mesmo é feito para y e z. Conhecida x, y e z de cada partícula e um instante t, calcula-se a posição a quadrado,

$$[r(t)]^2 = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2, \quad (4.4)$$

os deslocamentos ao quadrado,

$$[d(t)]^2 = [d_x(t)]^2 + [d_y(t)]^2 + [d_z(t)]^2. \quad (4.5)$$

e o coeficiente de difusão para cada trajetória é calculado (4.1). A posição da partícula em três dimensões é obtida de (4.4) em cada instante de tempo.

```

for i = 1:particleCount
    particle{i} = struct();
    particle{i}.dx = k * (a + randn(1,N));
    particle{i}.dy = k * (b + randn(1,N));
    particle{i}.dz = k * (c + randn(1,N));
    particle{i}.x = cumsum(particle{i}.dx);
    particle{i}.y = cumsum(particle{i}.dy);
    particle{i}.z = cumsum(particle{i}.dz);

    particle{i}.drsquared = particle{i}.dx.^2 + particle{i}.dy.^2 + particle{i}.dz.^2;
    particle{i}.rsquared = particle{i}.x.^2 + particle{i}.y.^2 + particle{i}.z.^2;

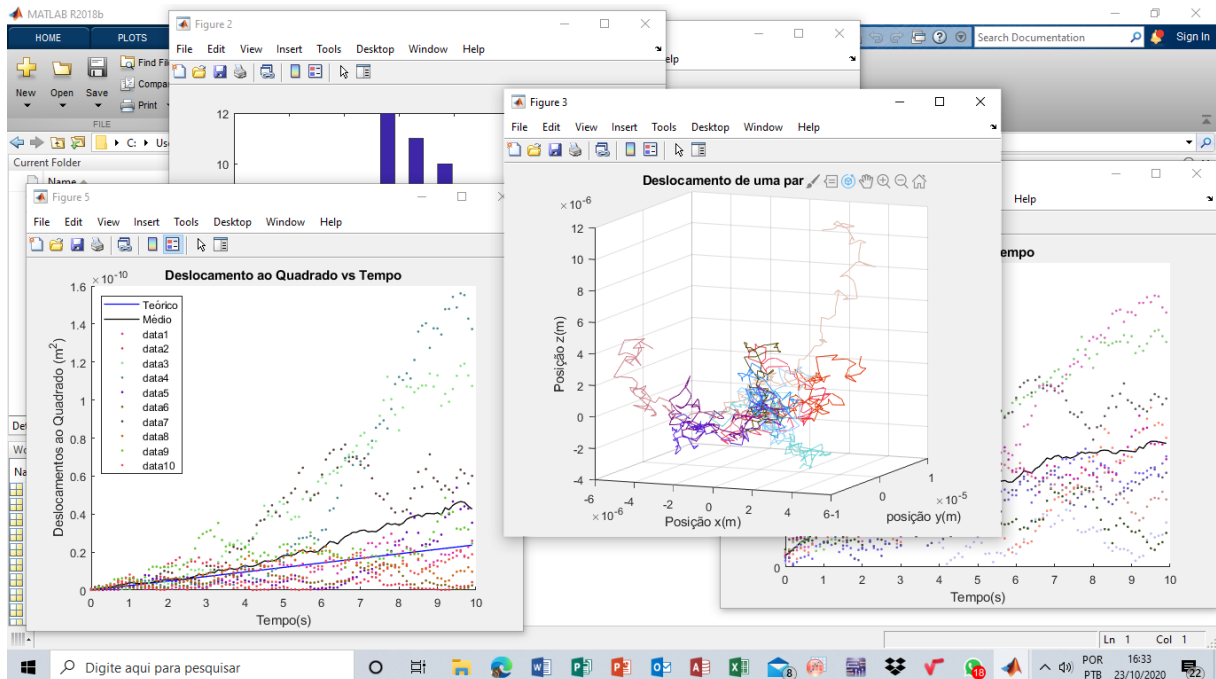
    particle{i}.position = sqrt(particle{i}.rsquared);
    particle{i}.D = mean( particle{i}.drsquared ) / ( 2 * dimensions * tau );
    particle{i}.standardError = std( particle{i}.drsquared ) / ( 2 * dimensions * tau *
sqrt(N) );
end

```

A figura 4.1, mostra a interface do MATLAB como resultados simulados usando as condições iniciais apresentadas acima. No apêndice A existem dois programas de simulação, uma versão para simular uma única trajetória e uma versão para simular múltiplas trajetórias de partículas brownianas na aproximação de Einstein. Os resultados são aproximados e muito bons para os limites impostos no programa. Com

esse trabalho observamos que o MATLAB é um excelente programa didático-pedagógico para o ensino de Física. Ele permite obter resultados “experimentais” de forma muito simples na plataforma.

Figura 18 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas.



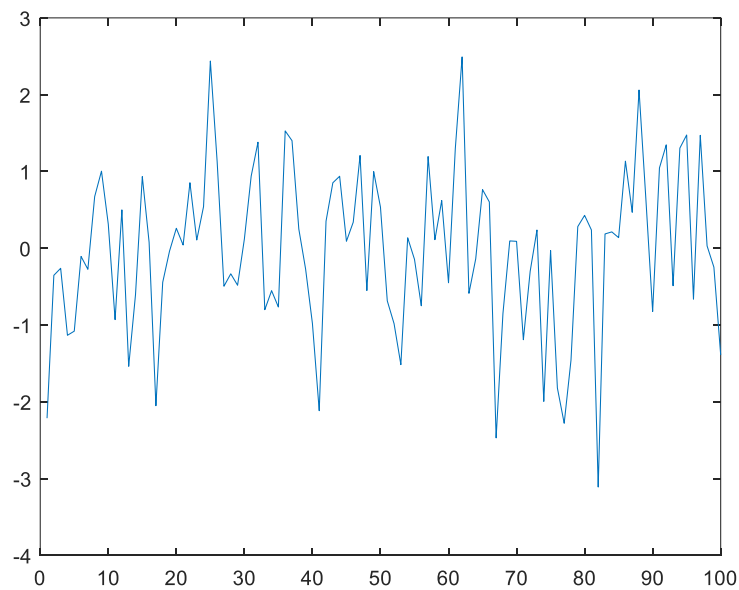
Fonte: Nossos resultados.

4.2.2 Simulação de Partículas brownianas

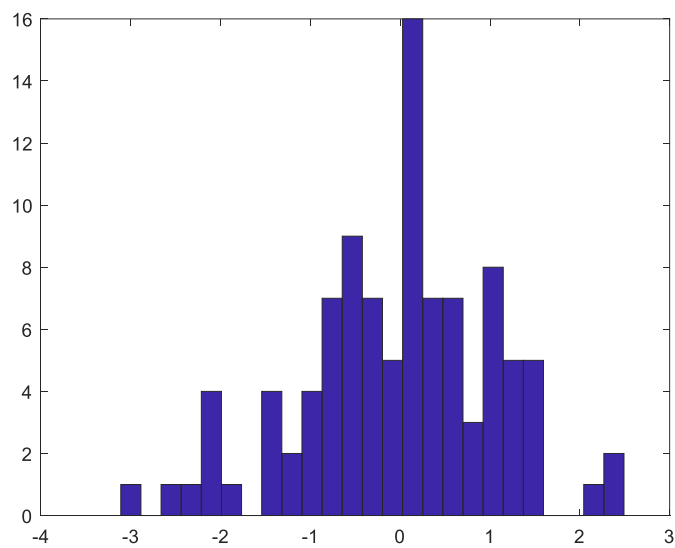
Neste trabalho simulamos uma partícula em movimento browniano usando o software MATLAB como ferramenta. As condições iniciais usadas são as apresentadas na seção 4.2. Na simulação partimos da aproximação de Einstein e comparamos os resultados simulados aos resultados obtidos pela Teoria Cinética (ou fenômenos de transporte). Fizemos 3 (três) simulações distintas: simulação: 100 números aleatórios e 1 trajetórias; 100 números aleatórios e 10 trajetórias; 1000 números aleatórios e 10 trajetórias. Em dada uma das simulações comparamos os dados simulados com o modelo de Einstein. No final fizemos as conclusões finais.

Simulação: 100 números aleatórios e 1 trajetórias.

Figura 19 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados (100 números aleatórios e 1 trajetórias).



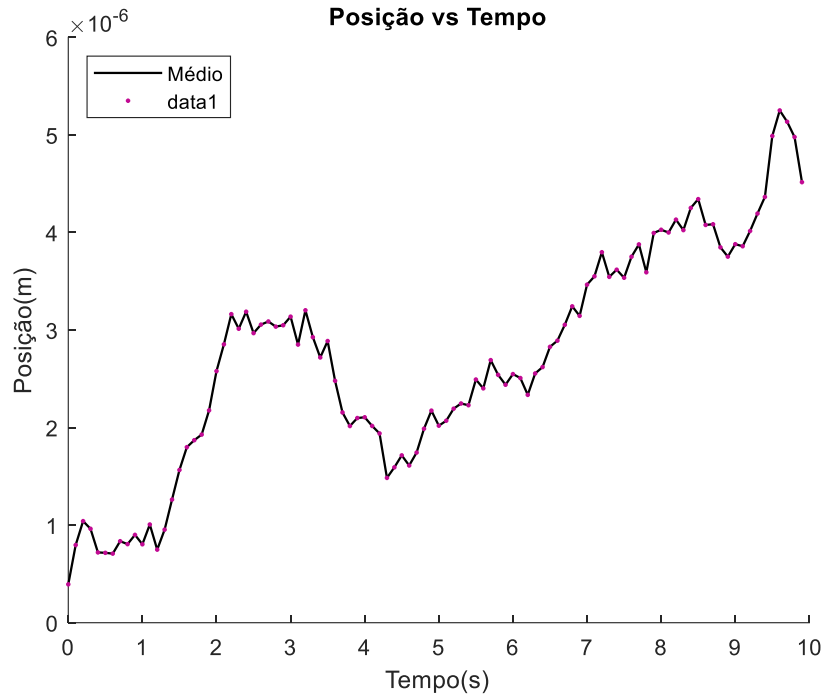
(a)



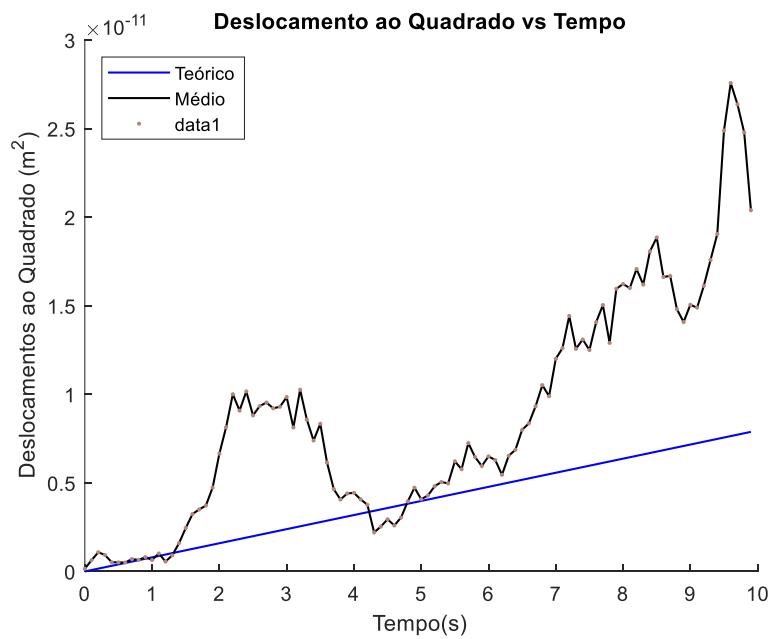
(b)

Fonte: Nossos resultados.

Figura 20 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein). (100 números aleatórios e 1 trajetórias).



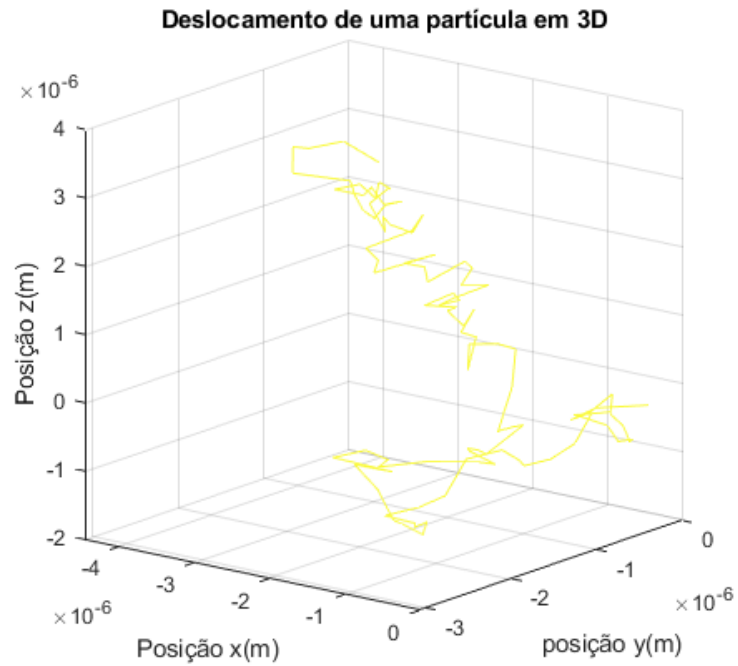
(a)



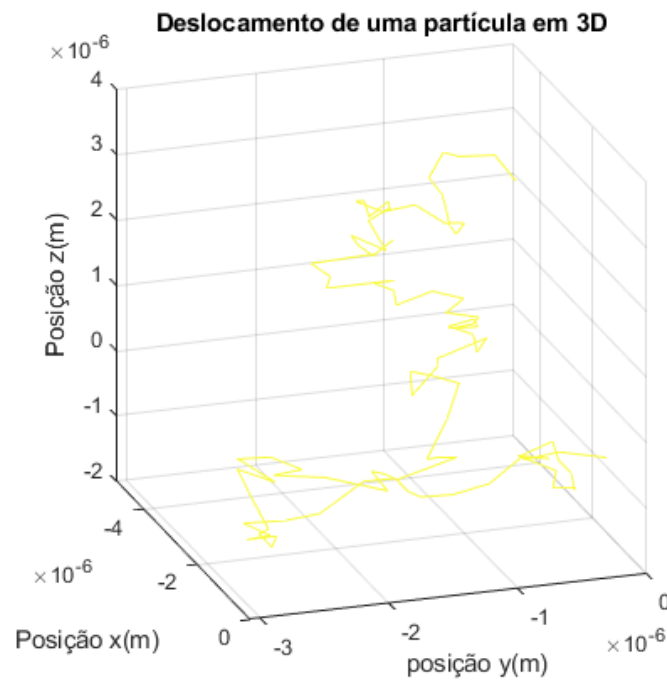
(b)

Fonte: Nossos resultados.

Figura 21 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (100 números aleatórios e 1 trajetórias).



(a)

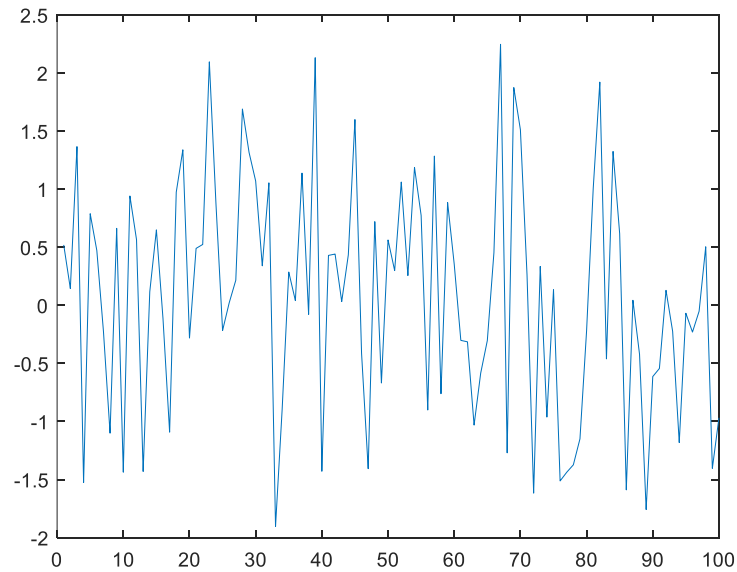


(b)

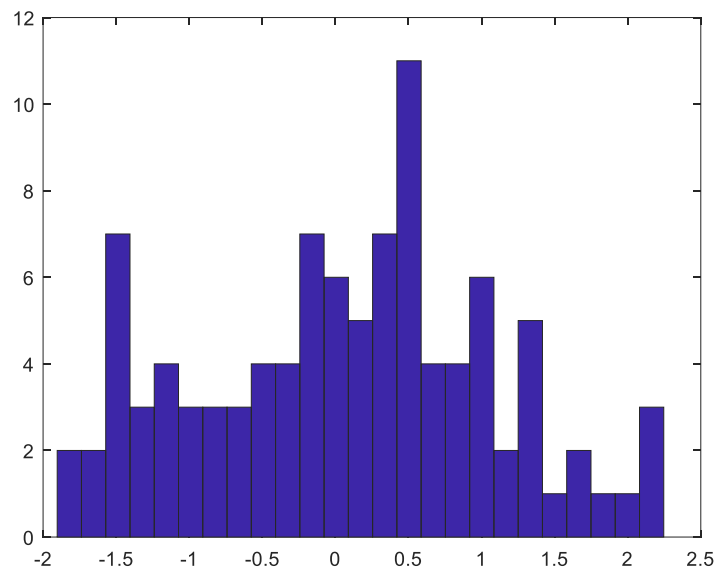
Fonte: Nossos resultados.

Simulação: 100 números aleatórios e 10 trajetórias.

Figura 22 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados. (100 números aleatórios e 10 trajetórias).



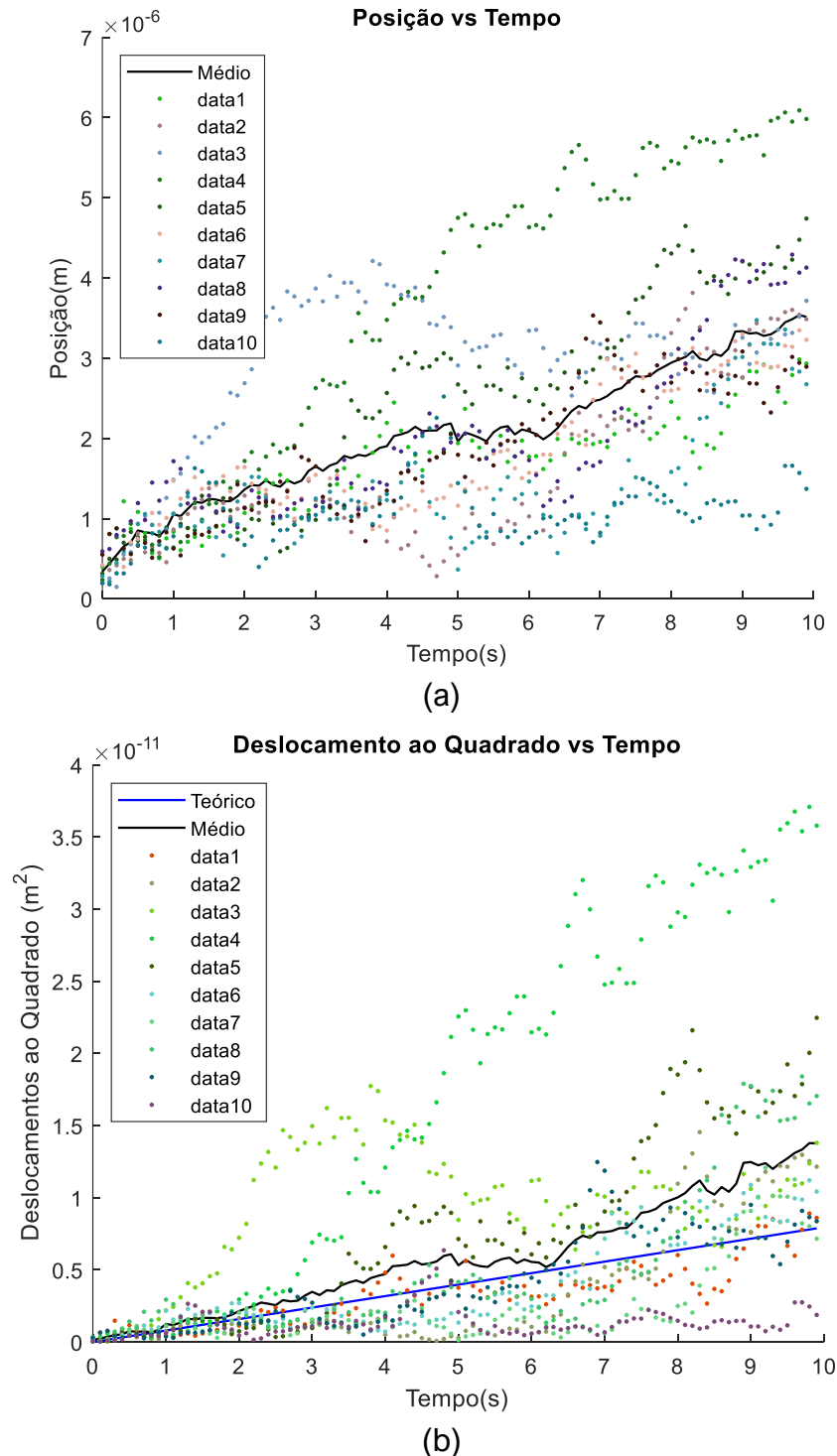
(a)



(b)

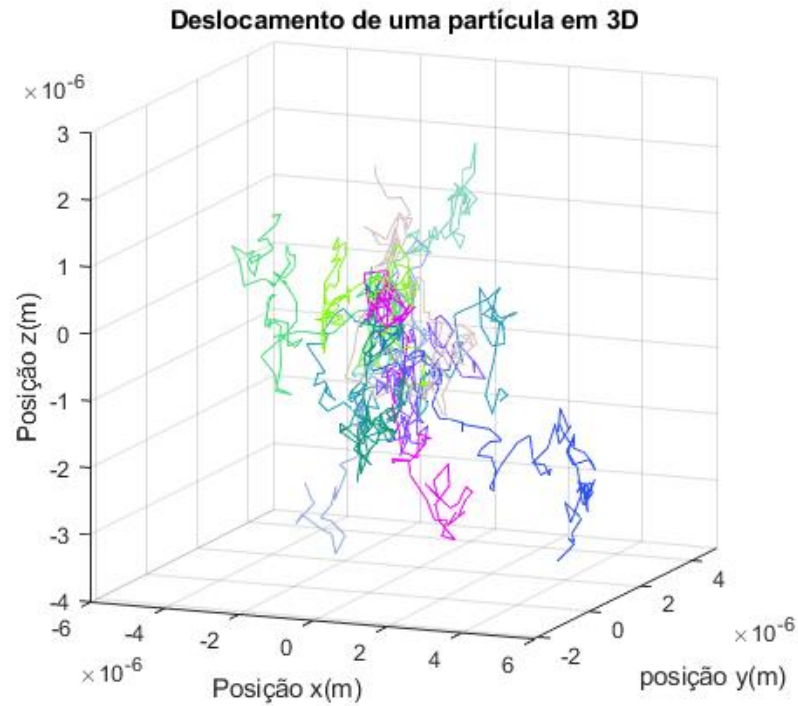
Fonte: Nossos resultados.

Figura 23 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein). (100 números aleatórios e 10 trajetórias)

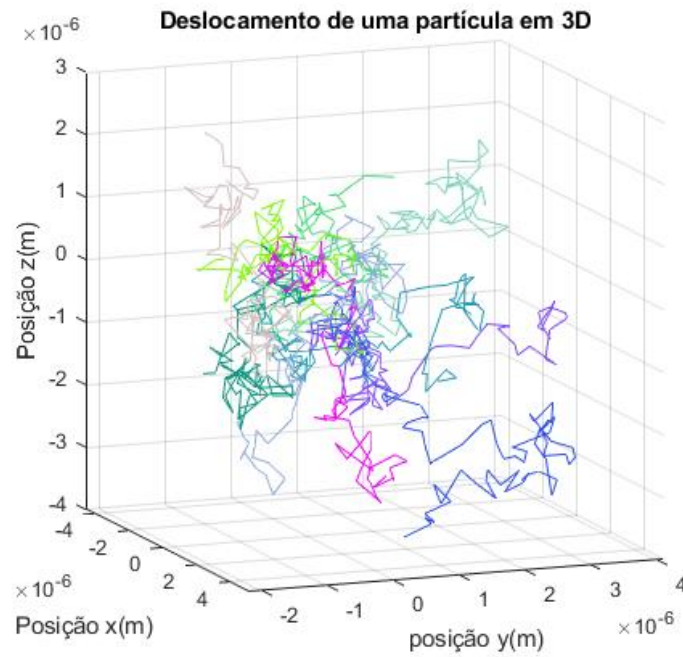


Fonte: Nossos resultados.

Figura 24 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes (100 números aleatórios e 10 trajetórias).



(a)

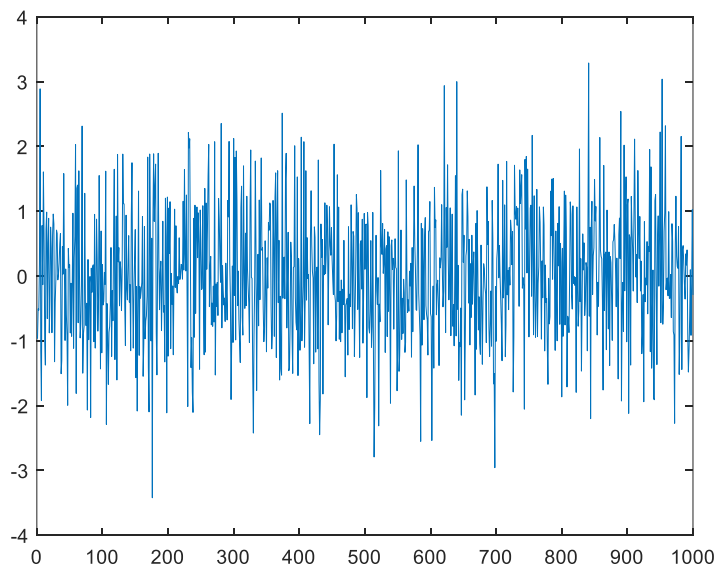


(b)

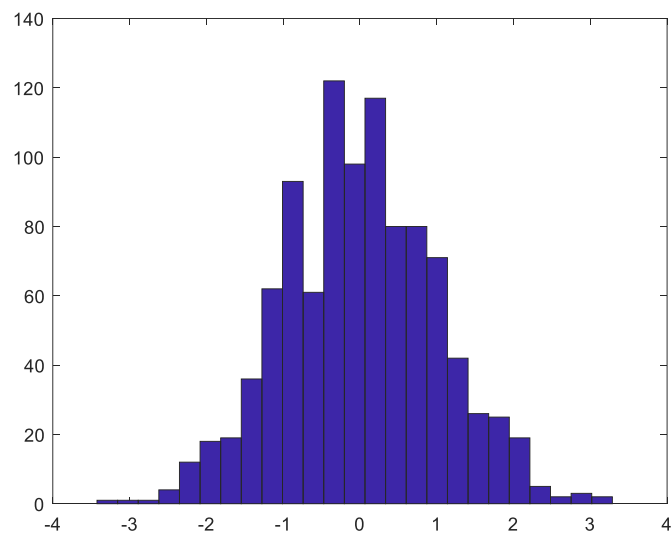
Fonte: Nossos resultados.

Simulação: 1000 números aleatórios e 10 trajetórias

Figura 25 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados (1000 números aleatórios e 10 trajetórias).



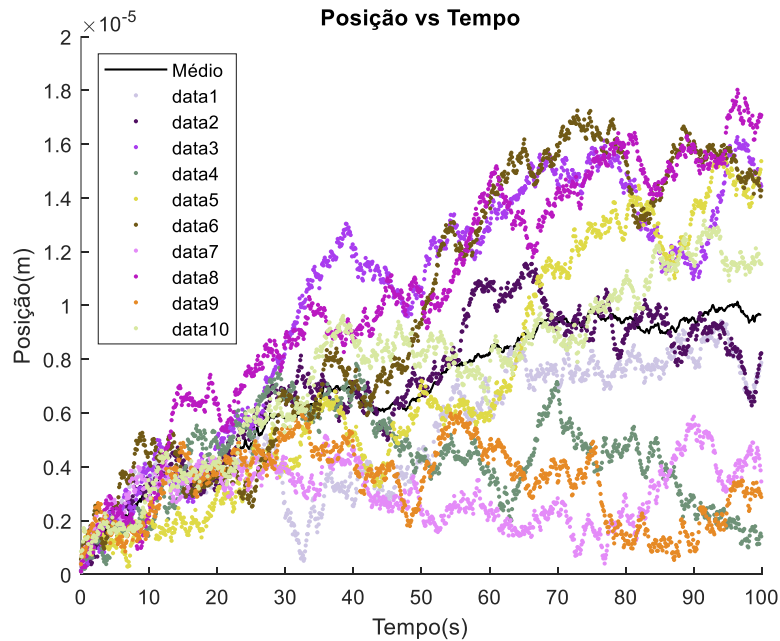
(a)



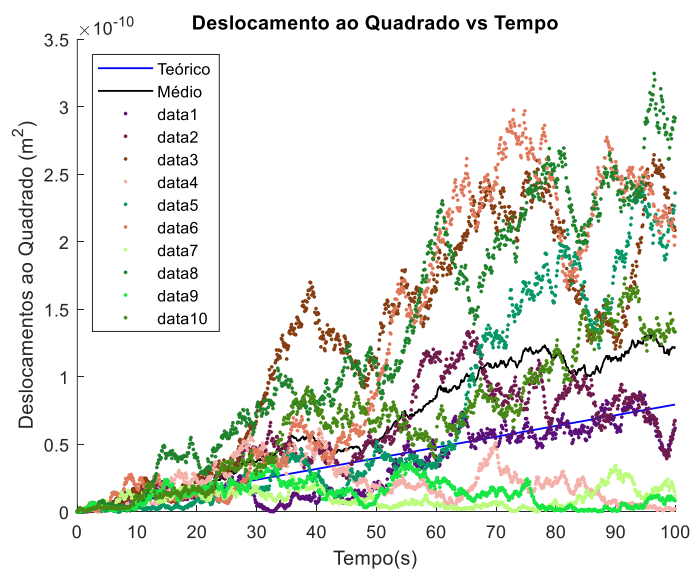
(b)

Fonte: Nossos resultados.

Figura 26 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein) (1000 números aleatórios e 10 trajetórias).



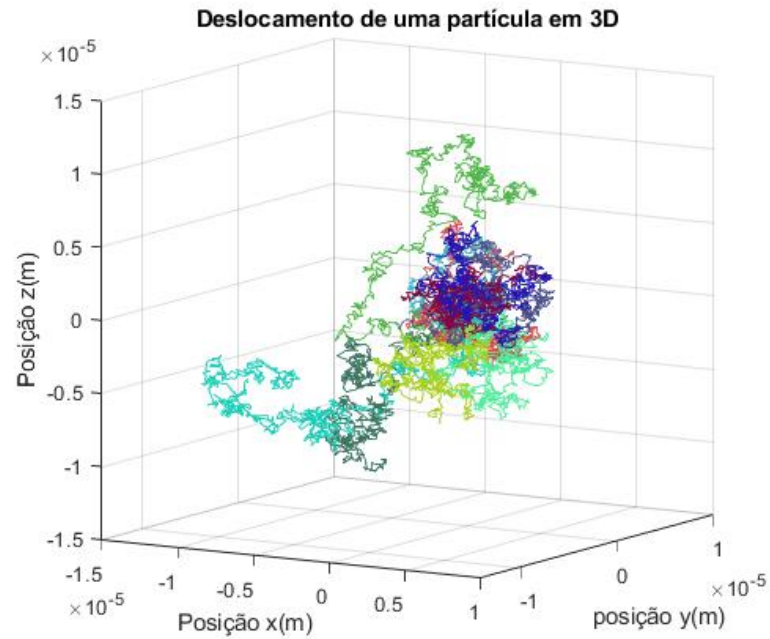
(a)



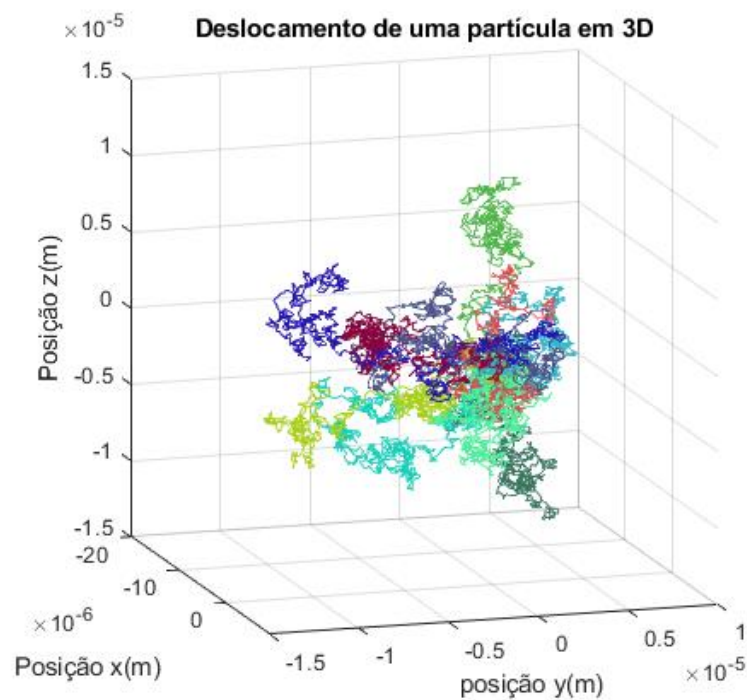
(b)

Fonte: Nossos resultados.

Figura 27 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (1000 números aleatórios e 10 trajetórias).



(a)

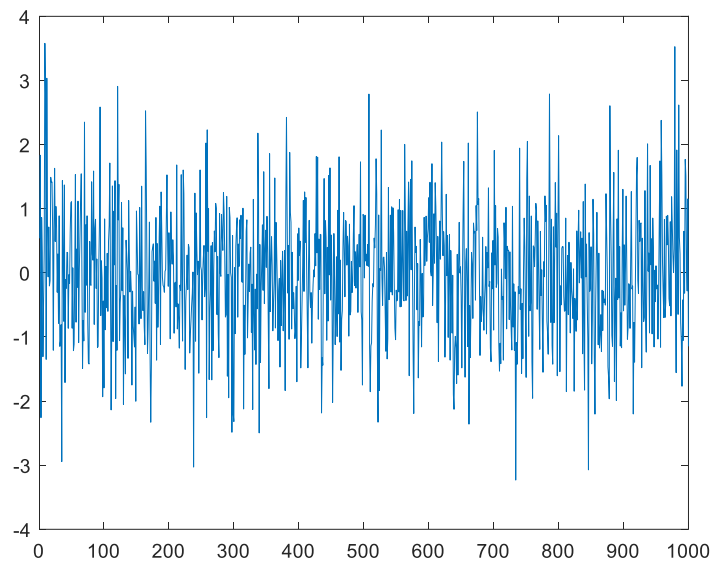


(b)

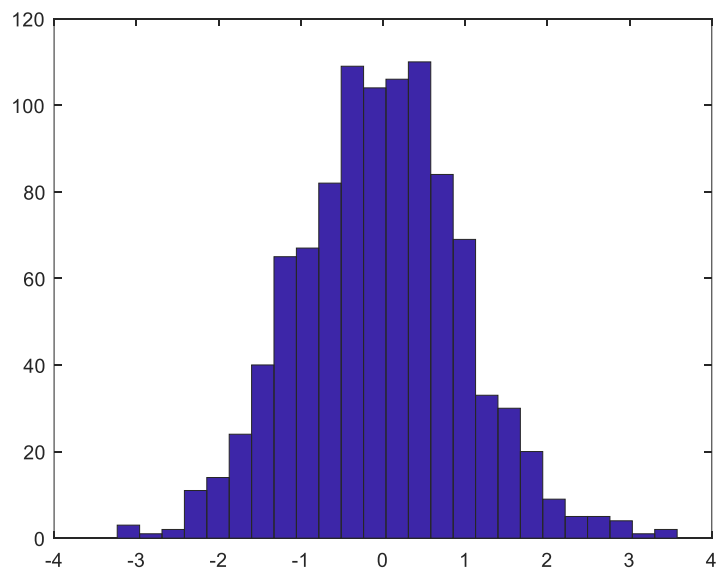
Fonte: Nossos resultados.

Simulação: 1000 números aleatórios e 10 trajetórias ($a = 0,01$, $b = 0,05$, $c = 0,02$)

Figura 28 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) mostra a distribuição dos números aleatórios; (b) o histograma ou o comportamento distribuição normal de dados (1000 números aleatórios e 10 trajetórias: $a = 0,01$, $b = 0,05$, $c = 0,02$).



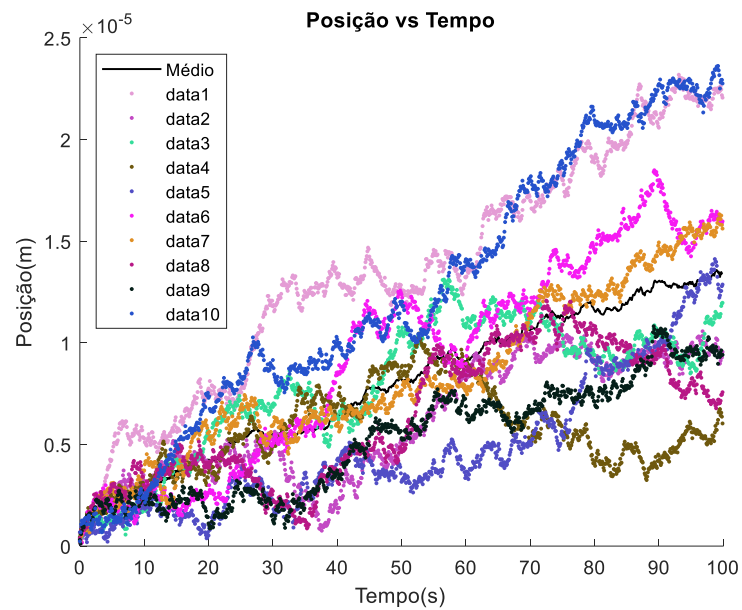
(a)



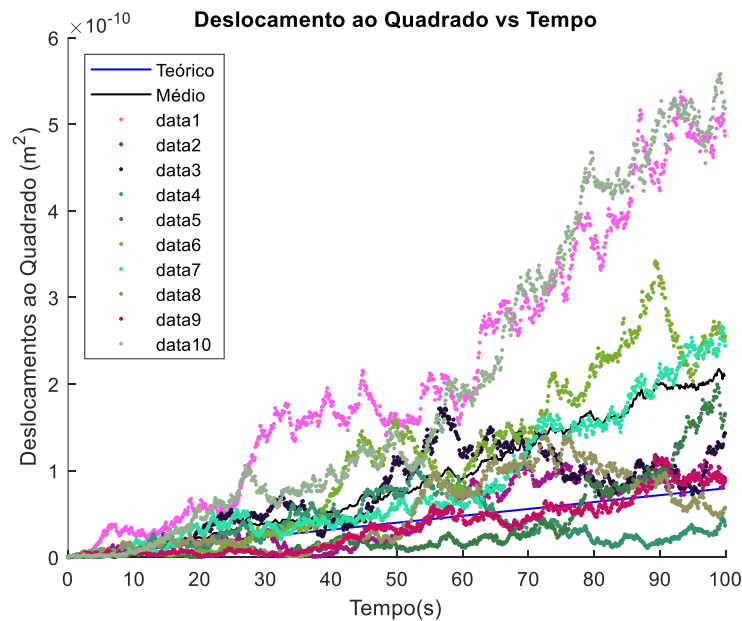
(b)

Fonte: Nossos resultados.

Figura 29 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) posição (m) em função do tempo (a linha preta representa a média da posição) (b) a posição ao quadrado em função do tempo (a linha preta é o deslocamento quadrático médio e a linha azul o resultado de Einstein) (1000 números aleatórios e 10 trajetórias: $a = 0,01$, $b = 0,05$, $c = 0,02$).



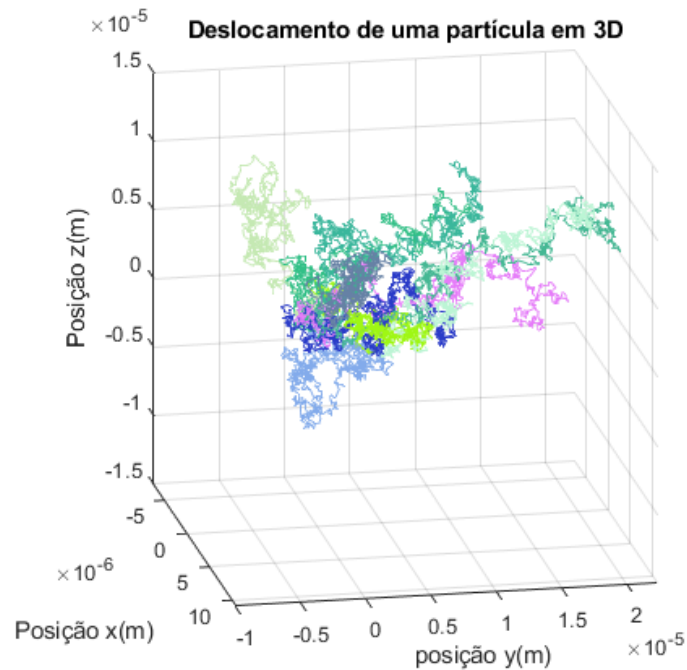
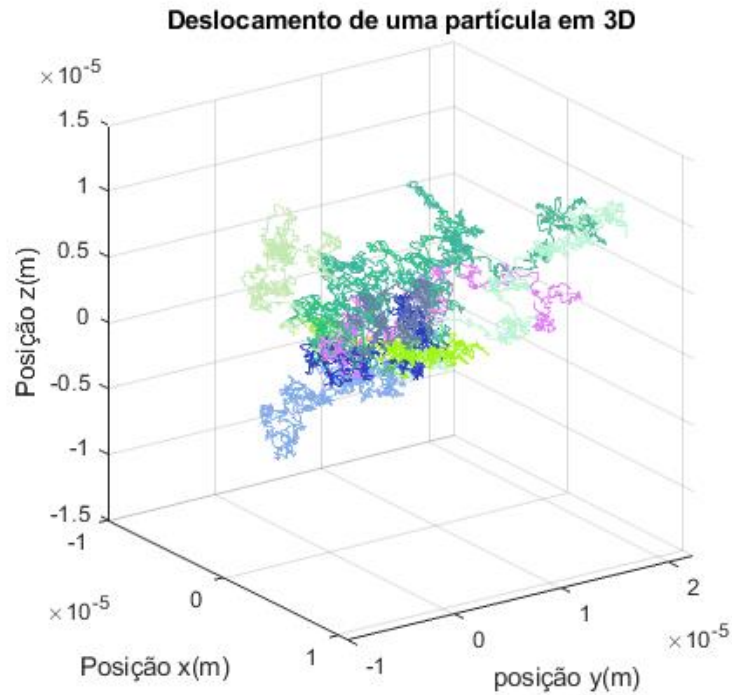
(a)



(b)

Fonte: Nossos resultados.

Figura 30 – Resultados de uma simulação em MATLAB de partículas brownianas: (a) e (b) são visualizações em três dimensões das trajetórias das partículas em dois ângulos diferentes. (1000 números aleatórios e 10 trajetórias: $a = 0,01$, $b = 0,05$, $c = 0,02$).



Fonte: Nossos resultados.

4.2.3 Conclusão da Simulações

Nos gráficos das figuras (19) à (27) simulamos o movimento browniano de uma partícula imersa em água usando o MATLAB na aproximação de Einstein. Inicialmente, três condições: 100 números aleatórios e 1 trajetórias; 100 números aleatórios e 10 trajetórias e 1000 números aleatórios e 10 trajetórias. Observamos nas três simulações que quanto mais números aleatórios são gerados melhor os resultados se aproximam do modelo de Einstein. Em todas as simulações os resultados se aproximam muito do modelo de Einstein para pequenos períodos de tempos e se afasta para tempos mais longos. Esse resultado já é previsto na dinâmica estocástica.

Fizemos ainda para comparar uma quarta simulação (1000 números aleatórios e 10 trajetórias) onde consideramos a anisotropia das direções considerando $a = 0,01$, $b = 0,05$ e $c = 0,02$, figuras (28) à (30) Nesta simulação observamos uma dependência da anisotropia, acreditamos que existe uma dependência correlacional entre as posições e/ou deslocamentos, mas os resultados continuam próximo do modelo de Einstein.

Os resultados ilustram muito bem o movimento browniano e pode ser com anisotropia variável com tempo.

5 CONCLUSÕES

Procuramos neste trabalho apresentar a teoria por traz do movimento browniano de Einstein, apresentamos a história que iniciou na investigação de Robert Brow em 1828 que deu nome à essa mobilidade das partículas analisadas.

Podemos falar do ano miraculoso de Einstein, 1905, citando seus grandes artigos que mudaram a face da física, trazendo em evidências a sua famosa tese de doutorado que trazia artigo que falavam da existência de átomos, com ênfase no artigo de maio de 1905 que falava sobre o movimento de partículas suspensas em um fluido. Tentamos demonstrar como Einstein relacionou a teoria da termodinâmica, principalmente a teoria cinética dos gases, os tópicos que Einstein utilizou para alicerçar o seu trabalho, e através desse conhecimento pode desenvolver suas equações para chegar a modelo que determinava o seu desvio médio quadrático.

Apresentamos algumas aplicações para o movimento browniano, mostrando que esse trabalho de Einstein permitiu um avanço na linguagem matemática da época, que proporcionou desenvolver conhecimentos sobre o movimento aleatório e criar vários modelos matemáticos de probabilidade bem como a consolidação da física estatística.

Para consolidação do presente trabalho apresentamos em uma ferramenta computacional, o MatLab, o movimento browniano sugerido nas equações de Einstein e comprovar que a sua equação permitia uma ótima aproximação de valores experimental para curto intervalos de tempo.

REFERÊNCIAS

BESSADA, Dennis Fernandes Alves. **Generalizações do movimento browniano e suas aplicações á física e a finanças**. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica.

DUQUE, Oscar Mario Londoño. **Uma breve análise do movimento browniano**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Matemática.

FIGUEIRA, Jalves S. **Movimento browniano: uma proposta do uso das novas tecnologias no ensino de física**. Artigo, revista brasileira de ensino de física, v. 33, n. 4, 4403 (2011)

FILHO, Antônio de Macedo. **Processo de difusão com agregação e reorganização espontânea em uma rede 2D**. 2008. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Física Teórica e Experimental.

FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro: produtos e serviço / Eduardo Fortuna**. – 20ª ed. ver. E atual. – Rio de Janeiro: Qualitymark Editora, 2015.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos da física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HENRIQUES, Marcos Vinícius Cândido. **Ondaletas e movimento browniano fracionário: Aplicação à caracterização de poços de petróleo**. 2008. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Física Teórica e Experimental.

MELLO, Luis Fernando de Osório. **O movimento browniano e as curvas se tangentes**. Revista brasileira de ensino de física, vol. 20, nº 1, março, 1998.

MOREIRA, Ildeu de Castro. **1905 um ano miraculoso**. Física na Escola, v.6, n. 1, 2005.

MOREIRA, Marco Antônio. **Física de partículas: uma abordagem conceitual & epistemológica**. 1ª edição, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PERES, Silvana. **O estudo do movimento browniano com material de baixo custo**. Revista brasileira de ensino de física, vol. 40, nº 1, 2018.

REZENDE, Guilherme Rocha de. **Movimento browniano e motores brownianos**. 2011, Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Instituto de Física, Brasília.

RIGDEN, John S. **Einstein 1905 o padrão da grandeza**. 2007 – Lisboa / Portugal – Edições 70 Ltda

ROONEY, Anne. **A história da física**. 2013 – São Paulo – M. Books do Brasil Editora Ltda

SALINAS, Silvio R. A. **Einstein e a teoria do movimento browniano**. Artigo, revista brasileira de ensino de física, v. 27, n. 2, p. 263 - 269 (2005).

SALINAS, Silvio R. A. **Introdução à Física Estatística**. Ed. 4. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2018.

SILVA, J.M.; LIMA, J.A.S. **Quatro abordagens para o movimento browniano**. Artigo, revista brasileira de ensino de física, v.29, n.1, p. 25 - 35 (2007).

STACHEL, John. **O ano miraculoso de Einstein: cinco artigos que mudaram a face da física**. Física – história; 2. Física – teoria. 3. Einstein, Albert, 1879-1955. I. Stachel, John, org.

TOMÉ, Tânia; OLIVEIRA, Mário José de. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade**. 2 ed. rev. E ampl. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2014.

APÊNDICE A – OS PROGRAMAS DE SIMULAÇÃO

O programa abaixo permite a simulação de uma partícula para múltiplas trajetórias brownianas na aproximação de Einstein.

PROGRAMA: MovBrow_mult.m

```

N = 100;
particleCount = 100;

displacement = randn(1,N);

figure(1);
plot(displacement);

figure(2);
hist(displacement, 25);

d = 1.0e-6;
eta = 1.0e-3;
kB = 1.28e-23;
T = 293;
D = kB*T/(6*pi*eta*d);
tau = 0.1;
time = tau*1:N;
dimensions = 3;

a = 0.00;
b = 0.00;
c = 0.00;

k = sqrt(2*D*tau);

tau = .1;
time = 0:tau:(N-1)*tau;

particle = { };
for i = 1:particleCount
    particle{i} = struct();
    particle{i}.dx = k * (a + randn(1,N));
    particle{i}.dy = k * (b + randn(1,N));
    particle{i}.dz = k * (c + randn(1,N));
    particle{i}.x = cumsum(particle{i}.dx);

```

```

particle{i}.y = cumsum(particle{i}.dy);
particle{i}.z = cumsum(particle{i}.dz);

particle{i}.drsquared = particle{i}.dx.^2 + particle{i}.dy.^2 + particle{i}.dz.^2;
particle{i}.rsquared = particle{i}.x.^2 + particle{i}.y.^2 + particle{i}.z.^2;

particle{i}.position = sqrt(particle{i}.rsquared);
particle{i}.D = mean( particle{i}.drsquared ) / ( 2 * dimensions * tau );
particle{i}.standardError = std( particle{i}.drsquared ) / ( 2 * dimensions * tau *
sqrt(N) );
end

figure(3)
clf;
hold on;
for i = 1:particleCount
plot3(particle{i}.x, particle{i}.y, particle{i}.z, 'color', rand(1,3));
end
hold off;
xlabel('Posição x(m)');
ylabel('posição y(m)');
zlabel('Posição z(m)');
title('Deslocamento de uma partícula em 3D');
grid on
axis square

figure(4);
drsquaredSum = zeros(1,N);
for i = 1:particleCount
    drsquaredSum = drsquaredSum + particle{i}.position;
end
ensembleAverage = drsquaredSum / particleCount;
clf;
hold on;
plot(time, ensembleAverage , 'k', 'LineWidth', 1);
legend('Médio','location','NorthWest');
for i = 1:particleCount
    plot(time, particle{i}.position, '.', 'color', rand(1,3));
end
xlabel('Tempo(s)');
ylabel('Posição(m)');
title('Posição vs Tempo'); hold off;

figure(5);
rsquaredSum = zeros(1,N);
for i = 1:particleCount
    rsquaredSum = rsquaredSum + particle{i}.rsquared;

```

```
end
ensembleAverage = rsquaredSum / particleCount;
clf;
hold on;
plot(time, (0:1:(N-1)) * 2*k^2, 'b', 'LineWidth', 1);
plot(time, ensembleAverage, 'k', 'LineWidth', 1);
legend('Teórico','Médio','location','NorthWest');
for i = 1:particleCount
plot(time, particle{i}.rsquared, '.', 'color', rand(1,3));
end
xlabel('Tempo(s)');
ylabel('Deslocamentos ao Quadrado (m^2)');
title('Deslocamento ao Quadrado vs Tempo'); hold off;
```

APÊNDICE B – BIOGRAFIA DE ALGUNS FÍSICOS

PAUL LANGEVIN (1872-1946)



Paul Langevin foi um físico francês. Estudou na École supérieure de physique et de chimie industrielles de la ville de Paris, onde foi mais tarde diretor. Teve uma ligação amorosa com sua colega Marie Curie. Langevin trabalhou com a moderação de nêutrons, iniciando assim uma base para a construção de reatores nucleares. Foi o primeiro a utilizar a piezoelectricidade de cristais de quartzo, em 1916, com a construção do primeiro sonar, e desenvolveu para a marinha francesa o primeiro sistema ecolot. O Instituto Laue-Langevin em Grenoble é assim denominado em sua homenagem. Participou assiduamente das sete primeiras Conferências de Solvay, sendo presidente das duas últimas, 6ª e 7ª. A 28 de abril de 1930, foi agraciado com o grau de Comendador da Ordem Militar de Sant'Iago da Espada, de Portugal.

JEAN PERRIN (1870-1942)

Foi um físico francês que, em seus estudos do movimento browniano de partículas minúsculas suspensas em líquidos, verificou a explicação de Albert Einstein para esse fenômeno e, assim, confirmou o atômico natureza da matéria equilíbrio de sedimentação. Por essa conquista, ele foi homenageado com o Prêmio Nobel de Física em 1926. Perrin era ateu e socialista. Ele foi um oficial do corpo de engenheiros durante a Primeira Guerra Mundial, Quando os alemães invadiram a França em 1940, ele fugiu para os EUA, junto com seu parceiro Nine Choucroun. Ele morreu na cidade de Nova York. Após a guerra, em 1948, seus restos mortais foram transportados de volta para a França pelo cruzador Jeanne d'Arc e enterrados no Panteão.

NIELS BOHR (1885-1962)

O trabalho do físico dinamarquês e filósofo Niels Bohr foi a chave para o desenvolvimento da mecânica quântica, transformando uma hipótese esboçada em um conceito funcional. Pela física quântica ele expandiu a teoria de estrutura atômica de Rutherford e explicou o espectro do hidrogênio. Mas ele nunca subestimou as complexidades envolvidas. Bohr começou seus estudos na Universidade de Copenhague antes de se mudar para a Inglaterra para trabalhar em Cambridge e Manchester. Mais tarde voltou para Copenhague para fundar o Institute of Theoretical Physics. Em 1922, ele recebeu o Prêmio Nobel de Física. Durante a Segunda Guerra Mundial, ele fez parte da equipe que estava desenvolvendo a bomba atômica. Sua carreira poderia ter seguido uma trajetória diferente. Em 1908, por pouco ele não foi escolhido como goleiro da seleção nacional de futebol na Dinamarca. A perda no futebol representou um ganho para Física.

JAKOB LAUB (1884-1962)

Ele era filho de Abraham Laub e Anna Maria Schenborn. Laub, que se converteu da fé judaica à católica e mudou seu nome de "Jakub" para "Jakob Johann", visitou pela primeira vez a escola secundária em Rzeszów. As próximas estações foram a Universidade de Viena, a Universidade de Cracóvia e, finalmente, a Universidade de Göttingen, onde estudou matemática com David Hilbert, Woldemar Voigt, Walther Nernst, Karl Schwarzschild e Hermann Minkowski. Depois ele foi para a Universidade de Würzburg, onde obteve o doutorado em 1907. Logo ele estabeleceu contato mais próximo com Wilhelm Wien, Arnold Sommerfeld, Johannes Stark e Albert Einstein. Quando ele viajou para Berna em 1908 para visitar Einstein (com quem se correspondeu mais tarde com frequência e foi amigável), ele o encontrou ainda trabalhando como funcionário de patentes. Ele chamou isso de "piada da escada [Treppenwitz] da história". Em 1909 ele se tornou colega de trabalho de Philipp Lenard na Universidade de Heidelberg.

Em 1911 ele emigrou com sua esposa Ruth Elisa Wendt para a Argentina. Lá ele trabalhou no observatório geofísico e astronômico em La Plata. Posteriormente, obteve uma posição de liderança no Departamento de Física de Buenos Aires. Depois de aceitar a nacionalidade argentina (com a variante do primeiro nome espanhol "Jacobo Juan"), ele começou a trabalhar no serviço diplomático da Argentina. Em 1947 ele voltou para a Alemanha. Em sua nova cidade natal, Friburgo, ele enfrentou problemas econômicos e, portanto, vendeu parte de sua correspondência com Einstein.

Em 1905, ele investigou os raios catódicos junto com Wilhelm Wien. Posteriormente, ele investigou alguns tópicos sobre relatividade especial e escreveu em 1907 um importante trabalho sobre a ótica de corpos em movimento. Em 1908, ele escreveu vários trabalhos junto com Einstein sobre as equações eletromagnéticas básicas, que visavam substituir a formulação quadridimensional da eletrodinâmica de Minkowski por uma formulação clássica mais simples.

Tanto Laub quanto Einstein consideraram o formalismo do espaço-tempo muito complicado. No entanto, descobriu-se que o formalismo do espaço-tempo de Minkowski foi fundamental para o desenvolvimento posterior da relatividade especial. Laub também publicou alguns artigos sobre efeitos relativísticos em gases em 1910 ele escreveu um dos primeiros artigos de pesquisa sobre a relatividade. Também nos anos seguintes, Laub ainda escreveu muitos artigos científicos sobre diferentes tópicos.

LUDWIG BOLTZMANN (1844-1906)

Ludwig Eduard Boltzmann (Viena, 20 de fevereiro de 1844 — Duino-Aurisina, 5 de setembro de 1906) foi um físico austríaco, conhecido pelo seu trabalho no campo da termodinâmica estatística. É considerado junto com Josiah Willard Gibbs e James Clerk Maxwell como o fundador da mecânica estatística. Foi defensor da teoria atômica, numa época em que esta ainda era bem controversa. No início do século XIX, a química fez importantes progressos. Joseph Louis Proust elaborou a Lei das proporções definidas. John Dalton derivou desta lei a existência de átomos como elementos básicos estruturais de compostos químicos e determinou as massas atômicas de numerosos elementos químicos. Partindo da observação de que as massas atômicas são aproximadamente múltiplos da massa do átomo de hidrogênio, William Prout formulou a hipótese de que o átomo de hidrogênio é o

elemento básico da matéria. Foi só no século XX que se descobriu que existe, além do núcleo do hidrogênio, o próton, um elemento mais que forma o núcleo do átomo - o neutrón. Na química, em meados do século XIX, a existência de átomos foi reconhecida amplamente, e, no ano de 1869, a publicação da tabela periódica por Dmitri Mendeleiev forneceu uma fundamentação sistemática à teoria atômica.

Por outro lado, a teoria atômica foi só parcialmente aceita no domínio dos físicos. Para muitas questões físicas investigadas na época, ela não era relevante. Foi só na última década do século XIX que a teoria atômica foi atacada massivamente. Entre os adversários desta teoria encontravam-se não só Ostwald, Helm e Ernst Mach, cuja Epistemologia fenomenológica rejeitou a existência de átomos que não fossem acessíveis aos sentidos humanos. Estas tendências eram limitadas geograficamente ao espaço da língua alemã e, parcialmente, na França (Pierre Duhem). Na Inglaterra, estas teorias tiveram poucos partidários.

APÊNDICE C – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE PUBLICAÇÃO DE PRODUÇÃO ACADÊMICA

O estudante HUGO LEONARDO RAMOS DE ALENCAR do curso de Licenciatura Plena em Física, matrícula 20172001800056, telefone: (62) 92131212, e-mail hleonardo30@gmail.com, na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei nº 9.610/98 (Lei dos Direitos do autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado O MOVIMENTO BROWNIANO DE EINSTEIN, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto (PDF); Imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); Vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão pela internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 15 de dezembro de 2020.

Assinatura do autor:



Nome completo do autor: HUGO LEONARDO RAMOS DE ALENCAR

Assinatura do professor-orientador:



Nome completo do professor-orientador: Dr. ANDRÉ LUIZ CARDOSO DA SILVA