

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL PELO
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

DAYVENNE LORRANNE BATISTA PORTO

GOIÂNIA
2020

DAYVENNE LORRANNE BATISTA PORTO

UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL PELO
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Ciências Exatas e da computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Samuel Lima Picanço

Coorientador: Prof. Dr. Fábio Freitas Ferreira

GOIÂNIA

2020

DAYVENNE LORRANNE BATISTA PORTO

UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL PELO
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção o título de Licenciatura em Matemática, e aprovado em sua forma final pela Escola de Ciências Exatas e da Computação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em ____ / ____ / _____

Prof. Ma. Ludmilla Reis Pinheiro dos Santos
Coordenador de Trabalho de Conclusão de Curso

Banca examinadora:

Orientador: Me. Samuel Lima Picanço - PUC GO

Coorientador: Dr. Fábio Freitas Ferreira - UFF

Dr. Clóves Gonçalves Rodrigues - PUC GO

Me. Rafael da Silva Valada - ULBRA

GOIÂNIA

2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, por ter sido meu apoio e refúgio nos momentos de incertezas, e por ter me dado força para concluir esta importante etapa da minha vida.

Sou grata à minha família pelo amor e apoio que sempre me deram durante toda essa trajetória.

Ao meu orientador Prof. Me. Samuel Lima Picanço que aceitou me orientar nessa monografia ainda no primeiro período de faculdade. E pela sua dedicação e paciência durante todo o projeto, seus conhecimentos fizeram toda a diferença no resultado final desse trabalho.

Ao meu Coorientador Dr. Fábio Freitas Ferreira pelas considerações que me fez ao longo de todo o projeto. Por ter desenvolvido o código computacional que utilizei como parte fundamental do trabalho.

Por fim, agradeço à todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente na minha trajetória acadêmica e no projeto de monografia.

RESUMO

Equações diferenciais parciais aparecem como modelo matemático em muitos fenômenos físicos presentes em nossas vidas. A solução dessas equações nem sempre pode ser obtida por meio de métodos analíticos. Sendo assim, o trabalho tem como objetivo principal resolver a equação da onda em uma corda por meio de um método numérico, a saber, o método das diferenças finitas e comparar a solução numérica obtida com a solução analítica da equação da onda. Para utilização do método numérico foi feita a discretização da EDP, obtendo-se com isso equações lineares que foram implementadas computacionalmente utilizando-se o software *octave*. Para os resultados obtidos, foram avaliados os erros numéricos, verificando-se assim a estabilidade e eficiência do método.

Palavras chave: Equações Diferenciais Parciais; Equação da Onda; Método Numérico; Método das Diferenças Finitas.

ABSTRACT

Partial differential equations appear as a mathematical model in many physical phenomena present in our lives. The solution of these equations cannot always be obtained through analytical methods. Thus, the main objective of this work is to solve the wave equation on a string using a numerical method, namely, the finite difference method and to compare the numerical solution obtained with the analytical solution of the wave equation. To use the numerical method, EDP was discretized, thus obtaining linear equations that were computationally implemented using the software *octave*. For the results obtained, numerical errors were evaluated, thus verifying the stability and efficiency of the method.

Key words: Partial Differential Equation; Wave Equation; Numerical Method; Finite Difference Method.

Lista de Figuras

1.1	Representação da onda em uma corda	3
1.2	Representação da corda esticada presa pelas extremidades	4
1.3	Representação da corda vibrando	5
1.4	Representação da decomposição das forças	5
2.1	Representação do deslocamento inicial da corda	17
3.1	Representação do domínio discreto da função f	20
3.2	Representação do domínio discreto	22
3.3	Molécula de Cálculo Computacional	24
3.4	Representação das soluções numéricas e analíticas	26
3.5	Diagrama de Dispersão para Avaliação do Método	28

Sumário

Lista de Figuras	v
Introdução	1
1 Equação da Onda Unidimensional	3
1.1 O que são ondas?	3
1.2 Obtenção da Equação da Onda Unidimensional	4
2 Solução Analítica da Equação	10
2.1 Equações de Derivadas Parciais Lineares	10
2.1.1 Separação de Variáveis	10
2.2 Obtendo a solução para a Equação da Onda	11
2.3 Resolvendo um Exemplo	16
3 Método Numérico	19
3.1 Método das Diferenças Finitas	19
3.1.1 Derivadas Numéricas	19
3.2 Discretização da Equação da Onda	22
3.3 Implementação do Método Numérico	24
3.3.1 Simulações	25
3.3.2 Avaliação do Erro do Método Numérico	27
3.3.3 Tempo de Execução do Código	29
4 Considerações Finais	30

Introdução

Uma onda pode ser entendida como uma perturbação que se espalha por um meio, após a vibração de alguma fonte, denominada fonte da onda. Ao se propagar, a onda transfere energia, sem transportar matéria, o que significa que, após a perturbação cessar, todos os pontos do meio perturbado estarão na mesma posição em que se encontravam antes (JUNIOR; FERRARO; SOARES, 2015).

Como exemplo pode-se citar o movimento executado pelos pontos de uma corda esticada, com as extremidades fixas (como uma corda de violão). Ao ser tocada a corda vibra e cada um de seus pontos executa um movimento de sobe e desce, ocupando ao longo de certo período de tempo diferentes posições na vertical.

Considere uma corda de comprimento L com as extremidades fixas. O deslocamento y de cada ponto da corda medido em relação à posição inicial (corda em repouso) depende da posição x e do instante de tempo t e, segundo (ZILL, 2001), pode ser determinado pela equação da onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

em que $c = \frac{1}{v}$, sendo v a velocidade de propagação da onda naquela corda dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

em que T é a tração da corda esticada e μ é a densidade linear da mesma.

De acordo com essas definições, a equação da onda em uma única direção é caracterizada equação diferencial parcial linear de segunda ordem, e sua solução geral é formada pelo conjunto de funções $y(x, t)$ que satisfazem a igualdade em (1).

Para se obter a solução analítica de equações diferenciais parciais é necessário impor

uma série de restrições. Na maioria das vezes é difícil chegar a solução por esse meio.

Tendo em vista o que foi apresentado até aqui, a presente pesquisa tem a finalidade de verificar a eficiência e estabilidade da solução numérica da equação da onda em uma corda pelo método das diferenças finitas.

Dessa forma, o objetivo geral desse trabalho foi utilizar um método numérico para obter uma solução para um caso específico da equação mostrada anteriormente, comparando-a com a solução analítica. Para tanto, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Obter uma solução particular para a equação;
- Utilizar o método das diferenças finitas para resolver a equação numericamente;
- Implementar computacionalmente o método escolhido.
- Comparar a solução numérica com a solução analítica.

Para se atingir os objetivos descritos foi feita uma revisão bibliográfica e aplicamos, no caso da solução analítica, o método de separação de variáveis e, para determinar a solução numérica, o método das diferenças finitas.

No capítulo 1 desta pesquisa será verificado alguns conceitos físicos sobre a ondulatória e em seguida será apresentada a dedução para a equação da onda em uma corda.

No capítulo 2 será utilizado o método de separação das variáveis como possibilidade de resolver a equação analítica. Ao final dele, será resolvido um problema para exemplificar o método.

O capítulo 3 mostrará o desenvolvimento utilizado para resolver o mesmo problema por meio de um método numérico. Serão obtidas as aproximações numéricas para as derivadas que aparecem na equação (1), em seguida será apresentado as soluções obtidas por meio do método numérico e trataremos de avaliar os erros cometidos.

No Capítulo 4 serão feitas as devidas considerações.

Capítulo 1

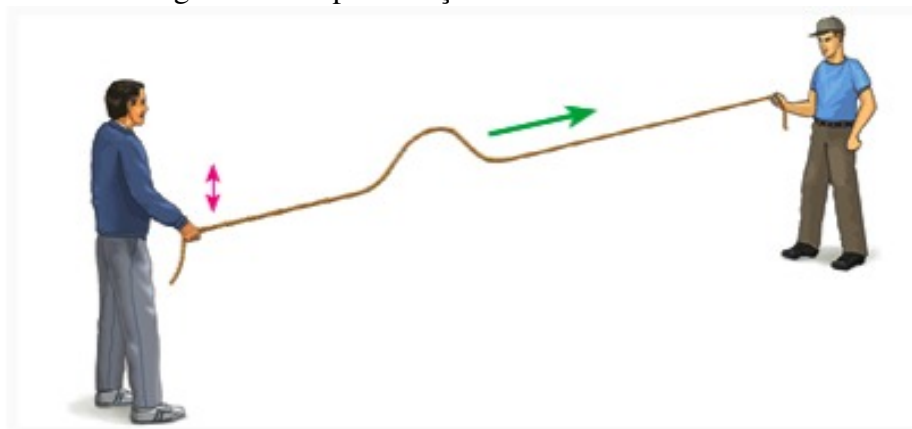
Equação da Onda Unidimensional

1.1 O que são ondas?

O som que ouvimos, os objetos que enxergamos, as mensagens que recebemos em nossos *smartphones* e a estação de rádio que sintonizamos, estas coisas tão comuns no nosso dia, se conectam por meio de um fenômeno físico: o movimento ondulatório. Por esse tipo de movimento, energia é transferida sem que haja o transporte de matéria entre dois pontos distintos (HEWITT, 2015).

Pode-se compreender melhor esse fenômeno pensando em duas pessoas segurando uma corda esticada pelas suas extremidades. Conforme ilustrado pela figura 1.1 de um lado a pessoa sacode a corda para cima e para baixo e a partir daí, uma perturbação é produzida. Tal perturbação irá se propagar até a outra a extremidade, porém cada ponto da corda executará apenas um movimento de sobe e desce.

Figura 1.1: Representação da onda em uma corda



Fonte: (JUNIOR; FERRARO; SOARES, 2015)

Outro exemplo muito comum e relativamente fácil de se reproduzir é o de uma pedra caindo na superfície de uma piscina. Imaginemos que há uma rolha de cortiça boiando nessa piscina. A pedra perturbará o meio (água) e cada ponto na superfície irá executar um movimento de sobe e desce, até atingir a rolha. Esta também irá executar um simples movimento na vertical, permanecendo na mesma posição ao final da perturbação.

As ondas que necessitam de um meio para se propagarem são chamadas ondas mecânicas. Quando a perturbação e a propagação acontecem formando um ângulo de 90° entre si, dizemos que as ondas são transversais. Portanto, a onda que se propaga na água da piscina é uma onda mecânica transversal.

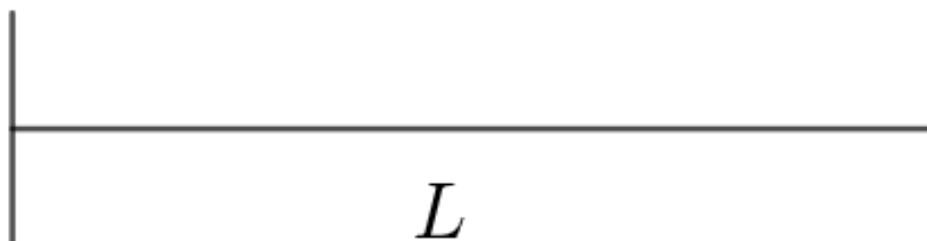
Uma onda que se propaga em apenas uma direção, como a onda em uma corda por exemplo, é chamada onda unidimensional. Ondas que se propagam em duas dimensões, como aquelas que se formam na água da piscina, são ditas bidimensionais. As ondas que se propagam em 3 dimensões, como o som, são chamadas ondas tridimensionais.

Nesse trabalho tem-se o interesse de estudar as posições ocupadas pelos pontos de uma corda esticada, como uma corda de violão por exemplo, quando uma onda se propaga por ela. Para tanto, resolverá-se a equação da onda unidimensional de forma analítica e numérica. Porém, antes disso, será obtido matematicamente o modelo que será utilizado.

1.2 Obtenção da Equação da Onda Unidimensional

Considera-se uma corda esticada de comprimento L presa pelas extremidades, como indicada na figura (1.2)

Figura 1.2: Representação da corda esticada presa pelas extremidades

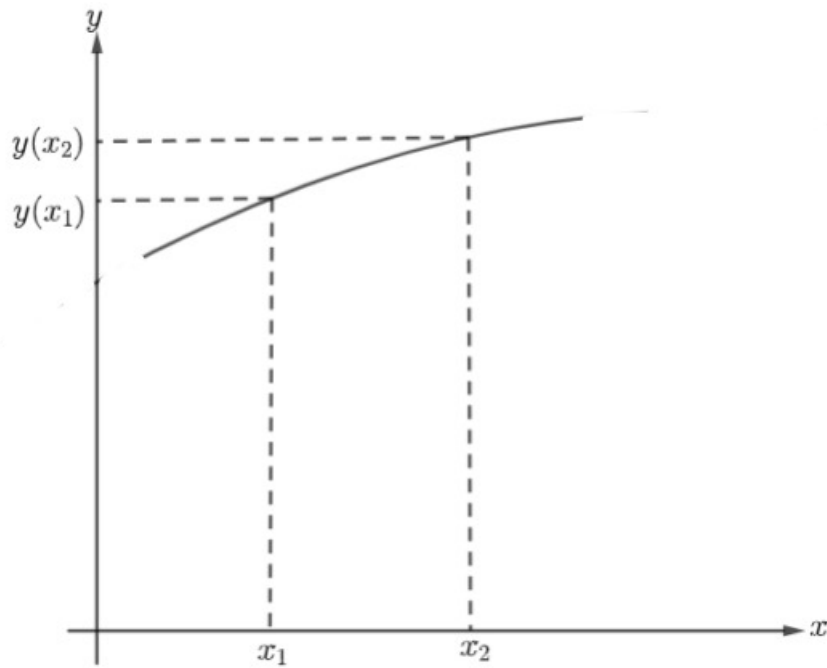


Fonte: Elaborada pela autora

Ao ser perturbada, os pontos desta corda irão ocupar diferentes posições na direção vertical. Considere um instante de tempo em que a corda está vibrando e tomemos um pequeno

trecho da mesma, entre os pontos x_1 e x_2 , como mostra a figura (1.3)

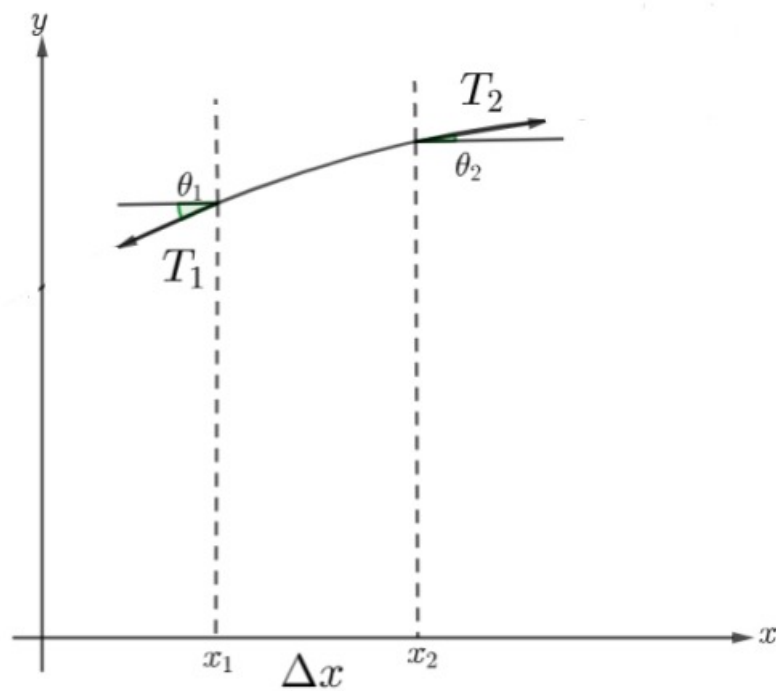
Figura 1.3: Representação da corda vibrando



Fonte: Elaborada pela autora

Agora será feita a decomposição das forças que estão agindo nesse pedaço

Figura 1.4: Representação da decomposição das forças



Fonte: Elaborada pela autora

Estamos considerando nesse pedaço da corda que as únicas forças que agem sobre ela

são a tração T_1 e a tração T_2 .

Os ângulos que essas forças fazem com a horizontal dependem da posição da corda naquele espaço, como pode ser visto na figura (1.4). Dessa forma, o ângulo θ_2 depende da coordenada x_2 e o ângulo θ_1 depende da coordenada x_1 .

Supõe-se que o pedaço dessa corda tem uma massa Δm e com as forças de tração especificadas anteriormente, escrevemos:

$$\Delta m \cdot a_x = \sum F_x = T_2 \cos(\theta(x_2)) - T_1 \cos(\theta(x_1)) \quad (1.1)$$

A equação (1.1) nada mais é que o Princípio Fundamental da Dinâmica (Segunda Lei de Newton) para as forças que agem na horizontal.

Analogamente, para as forças que agem na vertical, têm-se:

$$\Delta m \cdot a_y = \sum F_y = T_2 \sin(\theta(x_2)) - T_1 \sin(\theta(x_1)) \quad (1.2)$$

Antes de continuar com as equações (1.1) e (1.2), recordemos um importante conceito que será utilizado:

Segundo (STEWART, 2016), "se uma função f tiver uma expansão em série de potências em x_0 , então ela deve ser da seguinte forma:"

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.3)$$

Essa expressão mostrada em (1.3) é chamada série de Taylor da função f em torno de x_0 . Quando $x_0 = 0$, a expressão fica reduzida a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (1.4)$$

e é chamada Série de Maclaurin.

Voltando às equações (1.1) e (1.2), considerando que a deflexão na corda é muito pequena, o que significa que θ é um ângulo muito próximo de zero. Dessa forma, utilizando o resultado mostrado em (1.4) para escrever as funções trigonométricas têm-se:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots$$

Dessa forma, pode-se notar que, na expressão que permite calcular o $\sin \theta$, as potências com expoentes ≥ 3 podem ser desconsideradas, uma vez que seus valores estão próximos de zero. O mesmo pode ser feito para as potências com expoentes ≥ 2 na expressão que calcula $\cos \theta$.

Assim, terá-se pela expansão de Maclaurin as seguintes aproximações

$$\sin \theta = \theta$$

$$\cos \theta = 1$$

Uma consequência disso será que $\tan \theta = \theta$. Tais aproximações podem ser usadas para pequenas oscilações na corda.

Uma consideração importante aqui é dizer que a corda não oscila na horizontal, ou seja, cada ponto da mesma executa apenas um movimento de sobe e desce. Isso permite escrever:

$$V_x = 0 \Rightarrow a_x = 0 \tag{1.5}$$

Essa condição da velocidade em x ser zero implica que a aceleração na corda vai ser igual a zero. Tendo uma implicação também na Segunda Lei de Newton, porque se $\Delta m \cdot a_x = 0$ têm-se em x a seguinte expressão:

$$T_2 \cos(\theta(x_2)) - T_1 \cos(\theta(x_1)) \approx 0 \tag{1.6}$$

Sendo possível usar as aproximações de pequenas oscilações, têm-se que $\cos \theta = 1$ então:

$$T_2 - T_1 = 0 \tag{1.7}$$

Logo,

$$T_2 = T_1 = T \tag{1.8}$$

Feito isso, pode-se começar a trabalhar com a equação (1.2), de acordo com o que foi feito nas aproximações de pequenas oscilações o seno passará a ser a tangente do ângulo θ que poderá ser substituído da seguinte forma:

$$\Delta m \cdot a_y = \sum F_y = T \tan(\theta(x_2)) - T \tan(\theta(x_1)) \quad (1.9)$$

Organizando a equação, têm-se:

$$\tan(\theta(x_2)) - \tan(\theta(x_1)) = \frac{\Delta m}{T} \cdot a_y \quad (1.10)$$

A aceleração em y também pode ser escrita como a derivada segunda da velocidade em y em relação ao tempo, assim:

$$\tan(\theta(x_2)) - \tan(\theta(x_1)) = \frac{\Delta m}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

A tangente desse ângulo é justamente a taxa de variação da posição y com relação a x , assim a tangente vai ser aproximada pela derivada da posição y da corda

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial y}{\partial x}(x_1) = \frac{\Delta m}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

Realizando a divisão por $(x_2 - x_1)$ em ambos os lados da equação (1.12) têm-se:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial y}{\partial x}(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta m}{(x_2 - x_1)} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

De forma que no primeiro termo da equação apareça uma estrutura matemática que lembra derivada pela definição, representada como:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \quad (1.14)$$

Tomando-se o limite de $x_2 \rightarrow x_1$, têm-se que o lado esquerdo da igualdade da equação (1.13) terá a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) (x_1)$$

Para o lado direito da equação (1.13) ainda tomando o limite de $x_2 \rightarrow x_1$, considera-se que a massa não é uma constante, dessa forma o Δm poderá ser escrito como uma massa

infinitesimal sobre dx , como será mostrado a seguir:

$$\frac{dm}{dx}(x_1) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Organizando e unindo o lado esquerdo e direito chegaremos a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_1) = \frac{\mu}{T}(x_1) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Como foi tomado um ponto x_1 geral, a equação vale para qualquer x . Da mesma forma também vale para qualquer t , com isso a equação ficará da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

A velocidade de propagação de uma onda numa corda é dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ e nessa equação têm-se que T é a tração da corda e μ é a densidade linear da corda, assim pode-se fazer a substituição de $\frac{\mu}{T}$ pela velocidade, como será feito a seguir:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.15)$$

A equação (1.15) representada acima é a equação da onda. Escrevendo $\frac{1}{v^2}$ como c^2 a equação terá o seguinte formato:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

Dessa maneira, têm-se a equação diferencial que descreve o deslocamento de qualquer ponto da corda, em função de (x, t) .

Capítulo 2

Solução Analítica da Equação

No capítulo 1 construiu-se o modelo matemático que será utilizado neste trabalho. Tal modelo permite calcular o deslocamento vertical $y(x, t)$ de uma corda vibrante, cujo comprimento é L . Isso dá condição de resolver a equação (1.16).

2.1 Equações de Derivadas Parciais Lineares

A equação a ser resolvida, de acordo com (ZILL, 2001) é de segunda ordem, linear e homogênea. Sua solução é um conjunto de funções que satisfazem aquela igualdade.

2.1.1 Separação de Variáveis

Segundo (ZILL, 2001), o método de separação das variáveis recebe esse nome por procurar solução particular para uma EDP na forma do produto de duas funções em que cada uma delas só dependa de uma variável, da seguinte forma:

$$u(x, y) = F(x).G(y)$$

É importante ressaltar que nem todas as Equações Diferenciais Parciais podem ser resolvidas por esse método. A Equação de Onda em uma corda admite solução que pode ser obtida por este método.

Teorema 1 *Princípio da Superposição*

Se u_1, u_2, \dots, u_n são soluções de uma equação de derivadas parciais linear homogênea, então

a combinação linear

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k, \text{ em que os } c_i \text{ são constantes e } i = 1, \dots, k$$

também é solução.

Não faz parte de nossos objetivos aqui demonstrar o teorema, porém sua demonstração pode ser obtida em (BOYCE; DIPRIMA, 1999, p.91)

Em outras palavras, se obtiver um conjunto infinito de soluções, poderá escrever uma outra solução como uma soma das primeiras, formando uma série infinita.

2.2 Obtendo a solução para a Equação da Onda

Assim como foi feito na obtenção da equação da onda, no capítulo anterior, para resolvê-la, algumas condições devem ser consideradas. Pensa-se então em uma corda de comprimento L , presa pelas extremidades e completamente esticada. Sendo assim em $x = 0$ e $x = L$ não haverá oscilação na corda, ou seja:

$$y(0, t) = 0$$

e

$$y(L, t) = 0$$

A corda será puxada em algum ponto e as posições dos demais serão dadas por $y(x, 0) = f(x)$.

Considera-se ainda que a corda tem uma distribuição inicial de velocidades, ou seja, a velocidade com que cada ponto oscila depende de sua posição no instante de tempo $t = 0$. Pode-se chamar essa distribuição de $y_t(x, 0) = g(x)$.

Impostas tais condições, será construído um problema de contorno para a equação da onda:

$$c^2 y_{xx} = y_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

Condições de contorno: $y(0, t) = 0$ e $y(L, t) = 0$.

Condições iniciais: $y(x, 0) = f(x)$ (deslocamento inicial) e $y_t(x, 0) = g(x)$ (velocidade ini-

cial).

Supõe-se agora que a solução de (2.1) pode ser obtida pelo método de separação de variáveis. Sendo assim, existe solução $y(x, t)$ tal que:

$$y(x, t) = F(x).G(t)$$

Como serão utilizadas as segundas derivadas de y , deve-se calculá-las.

$$\begin{cases} y_x = F'(x).G(t) \\ y_{xx} = F''(x).G(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_t = F(x).G'(t) \\ y_{tt} = F(x).G''(t) \end{cases}$$

Levando esses resultados em (2.1), têm-se:

$$c^2 F''(x).G(t) = F(x).G''(t) \quad (2.2)$$

Que pode ser organizada assim:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2.G(t)} \quad (2.3)$$

A igualdade acima só é verdadeira se as razões forem constantes, ou seja:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad (2.4)$$

$$\frac{G''(t)}{c^2.G(t)} = \lambda \quad (2.5)$$

O problema agora se resume em resolver as equações (2.4) e (2.5). Tais equações podem ser reescritas da seguinte forma:

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \quad (2.6)$$

$$G''(t) - \lambda c^2 G(t) = 0 \quad (2.7)$$

Com a equação (2.6) será construído o seguinte Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F(0) = 0, \quad F(L) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Para a equação (2.8) será escrito o seu polinômio característico $r^2 - \lambda = 0$ e assim sua solução dependerá do valor de λ .

Se $\lambda = 0$:

$$r^2 = 0 \implies r = 0$$

Terá então a solução $F(x) = c_1 + c_2x$, Aplicando-se as condições $F(0) = 0$ e $F(L) = 0$ terá a seguinte solução:

$$F(x) = 0$$

que não será interessante para o trabalho.

Se $\lambda > 0$ ($\lambda = a^2$)

$$r^2 - a^2 = 0 \implies r = \pm a$$

Têm-se a seguinte solução:

$$F(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$$

Quando aplicada a condição $F(0) = 0$, verifica-se que $c_2 = -c_1$ e isso permite escrever:

$$F(x) = c_1 (e^{ax} - e^{-ax})$$

Lembrando que $e^{ax} - e^{-ax} = \frac{\sinh ax}{2}$. Usando a condição $F(L) = 0$ e sabendo que $\sinh aL \neq 0$, $\forall aL$, descobre-se que $c_1 = 0$. E mais uma vez terá uma solução que não será interessante, ou seja:

$$F(x) = 0$$

Se $\lambda < 0$ ($\lambda = -a^2$)

$$r^2 + a^2 = 0 \implies r = \pm ai$$

O que dá a solução geral:

$$F(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \operatorname{sen}(ax)$$

Fazendo $x = 0$ (condição de contorno), obterá-se que $c_1 = 0$. Tendo então a solução:

$$F(x) = c_2 \operatorname{sen} ax$$

Para $x = L$ (condição de contorno), têm-se:

$$c_2 \operatorname{sen} aL = 0$$

Como não tem-se interesse na solução nula, poderá escrever:

$$\operatorname{sen} aL = 0 \implies aL = n\pi$$

$$a = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo, a solução do PVI (2.8) será:

$$F(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ou ainda:

$$F_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Deve-se agora resolver (2.7). Usando um processo análogo, partirá-se direto à solução que interessa. O polinômio característico será:

$$r^2 - \lambda c^2 = 0 \quad (2.10)$$

Mas, anteriormente, viu-se que $a = \frac{n\pi}{L}$ e $\lambda = -c^2$. Logo $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Substituindo em (2.10), têm-se:

$$r^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \implies r = \pm \frac{n\pi c}{L} i$$

Esse resultado permite escrever a seguinte solução:

$$G(t) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (2.11)$$

Ou ainda:

$$G_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right), n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Com os resultados obtidos em (2.9) e (2.12), estará-se apto a escrever a solução geral da equação:

$$y(x, t) = \left[C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \quad (2.13)$$

Fazendo algumas substituições nos coeficientes, têm-se:

$$y(x, t) = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right], n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Usando o princípio da superposição citado no teorema (1), pode-se construir a seguinte solução:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.15)$$

Utilizando agora as condições iniciais $y(x, 0) = f(x)$ e $y_t(x, 0) = g(x)$.

Primeira condição:

$$y(x, 0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.16)$$

O resultado obtido em (2.16) permite determinar o valor de a_n . Segundo (ZILL, 2001, p.260), esse coeficiente pode ser escrito como:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

De forma análoga, será possível chegar ao valor de b_n . Para tanto, será necessário

derivar (2.15) e substituir o t por zero. Chegando a:

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Reunindo o resultado obtido em

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \quad (2.17)$$

com os coeficientes

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

e

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

chegando à solução particular da equação

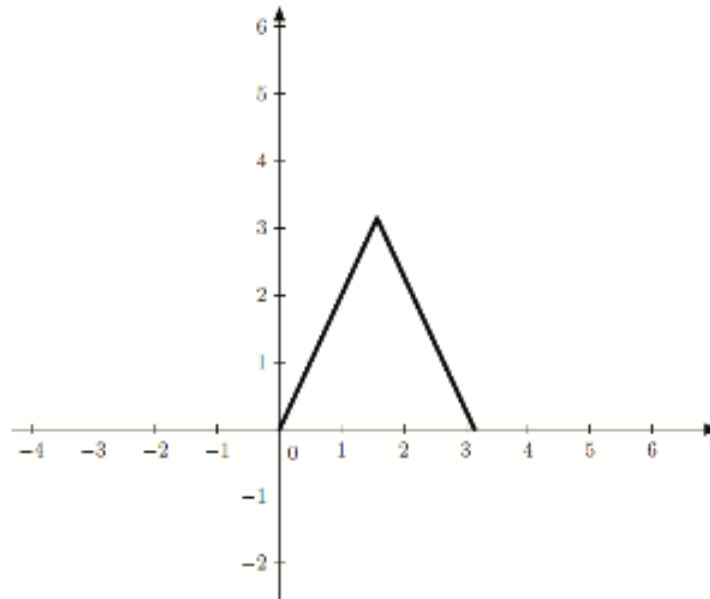
2.3 Resolvendo um Exemplo

Para ilustrar o que foi feito até aqui, será utilizado o seguinte exemplo:

Uma corda com coeficiente $c = 1\text{m}^{-2}/\text{s}^{-2}$ é esticada entre os pontos $x = 0$ e $x = \pi$.

O deslocamento inicial da corda é dado pelo gráfico mostrado na figura (2.1) e sua distribuição inicial de velocidade é nula (VALADA, 2015).

Figura 2.1: Representação do deslocamento inicial da corda



Fonte: (VALADA, 2015)

Uma vez que se conhece a solução particular para o problema, só terá o trabalho de calcular os coeficientes e escrever sua solução. Como a distribuição inicial de velocidade é nula, $g(x) = 0$, conseqüentemente $b_n = 0$.

Cálculo de a_n :

Pela figura podemos escrever que $L = \pi$.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

A função f pode ser obtida pelo gráfico. Pode-se observar que $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ e $f(\pi/2) = \pi$. Visto ainda que a função é definida por duas sentenças formadas por funções lineares. Sendo assim, com um pouco de álgebra, chegará-se a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -2x + 2\pi & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Agora deve-se multiplicar essa função por $\operatorname{sen} nx$ e integrar entre 0 e π . Por se tratar de uma função definida por duas sentenças, a integração deve ser feita separadamente. Na primeira

sentença a integração será feita de 0 a $\pi/2$ e na segunda, de $\pi/2$ a π . Em seguida, somando esses resultados e multiplicando por $2/\pi$. O resultado obtido é apresentado a seguir:

$$a_n = \frac{8 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2} \quad (2.18)$$

Substituindo esse valor na equação (2.15) e lembrando que $L = \pi$ e $c = 1$, chegará na solução do problema proposto.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos(nt) \right] \cdot \operatorname{sen}(nx) \quad (2.19)$$

Observando que em (2.19), y é uma função da posição x e do instante de tempo t . Isso significa que a corda executa um movimento oscilatório que depende da posição e do instante de tempo. Em outras palavras, quando fixa-se t , terá uma configuração de todos os pontos da corda naquele instante ao longo do eixo horizontal. Se fixar x , encontramos como aquele ponto varia ao longo do tempo.

No capítulo seguinte será apresentado um método numérico para resolver este problema, com o intuito de comparar sua solução com aquela obtida em (2.19).

Capítulo 3

Método Numérico

Neste capítulo será apresentado o método numérico que será utilizado, o método das Diferenças Finitas.

3.1 Método das Diferenças Finitas

Segundo (FRANCO, 2012) o método das diferenças finitas busca discretizar o domínio e substituir as derivadas presentes na equação diferencial por aproximações que envolvem somente valores numéricos da função. Discretizar um domínio significa substituir cada derivada do problema, por uma aproximação que converge para o valor da derivada.

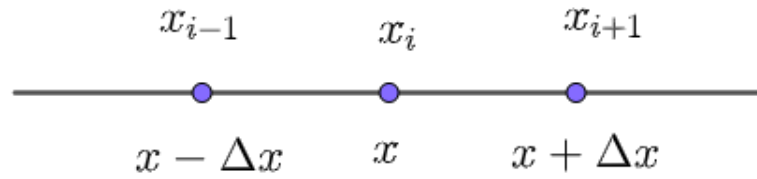
3.1.1 Derivadas Numéricas

Antes de apresentar a discretização da equação a ser resolvida, é necessário que se conheça o conceito de derivada numérica.

Seja f uma função contínua e suficientemente derivável em um intervalo I . Considere ainda $x_i \in I$. Segundo (GUIDORIZZI, 2008) chama-se expansão em série de Taylor para f em torno de x_i a seguinte expressão:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n \quad (3.1)$$

Seja f uma função conhecida por meio de um conjunto de pontos discretos no intervalo I de tal modo que $x_{i+1} - x_i = \Delta x$. Na figura a seguir temos a representação de 3 desses pontos.

Figura 3.1: Representação do domínio discreto da função f 

Fonte: Elaborado pela autora

Apropriando da expansão de Taylor para f , pode-se escrever a derivada em x_i da seguinte forma:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

Como utilizamos o termo posterior a x_i para a aproximação, chamamos tal resultado aproximação da derivada por diferença adiantada. Poderíamos ainda aproximar a derivada de primeira ordem assim:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (3.3)$$

O resultado obtido em (3.3) é chamado de diferença atrasada para o cálculo da aproximação da primeira derivada. Ao adicionar (3.2) com (3.3), chega-se ao seguinte resultado:

$$2f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

Ou ainda:

$$2f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

Finalmente:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

Para a derivada de segunda ordem mais uma vez será usada uma aproximação para f em torno de x_i no polinômio de Taylor.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots \quad (3.5)$$

Lembrando que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

Isolando-se o termo que contém a segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{f''(x_i)}{2!}(\Delta x)^2 &= f(x_{i+1}) - f(x_i) - f'(x_i)\Delta x - \dots \implies \\ \implies f''(x_i) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[2f(x_{i+1}) - 2f(x_i) - 2f'(x_i)\Delta x \right] + \\ &\quad \dots - 2 \frac{f^n(x_i)(\Delta x)^n}{n!} \end{aligned}$$

O que nos permite escrever:

$$f''(x_i) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[2f(x_{i+1}) - 2f(x_i) - 2f'(x_i)\Delta x \right] \quad (3.6)$$

O resultado descrito em (3.6) é uma aproximação em diferença avançada da segunda derivada em $f(x_i)$.

Podemos fazer um processo análogo para a segunda derivada, utilizando o termo anterior a $f(x_i)$, e chegar em:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!}(\Delta x)^2 - \dots \quad (3.7)$$

Organizando o resultado de (3.7) e isolando o termo que contém a segunda derivada:

$$f''(x_i) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[2f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + 2f'(x_i)\Delta x \right] \quad (3.8)$$

O resultado obtido em (3.8) é a aproximação em diferença atrasada da segunda derivada em $f(x_i)$. Adicionando-se (3.6) e (3.8), chegamos ao seguinte resultado:

$$2f''(x_i) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [2f(x_{i-1}) - 4f(x_i) + 2f(x_{i+1})]$$

Finalmente:

$$f''(x_i) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] \quad (3.9)$$

O resultado obtido em (3.9) é a aproximação para a derivada de segunda ordem em diferenças centradas.

Ao aproximar as derivadas, um erro é cometido. É possível se obter uma expressão

para o erro utilizando (3.1). Pode-se então chegar ao seguinte resultado:

$$E(x_i) = 2 \cdot \sum_{k=3}^n \frac{f^{(2k-1)}(x_i)}{(2k-1)!} (\Delta x)^{(2k-1)} \quad (3.10)$$

A seguir será feita a discretização da equação, com base no que foi discutido até aqui.

3.2 Discretização da Equação da Onda

Considerando a equação dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

que é conhecida como Equação da Onda Unidimensional. Será feita a discretização do domínio, que é contínuo e dessa forma, ao invés de se resolver uma Equação Diferencial Parcial, serão resolvidas equações lineares.

Primeiramente será feita a substituição de cada derivada presente em (3.11) por sua respectiva aproximação numérica. Lembrando que da definição de derivada parcial pode-se escrever:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y(x_2, t) - y(x_1, t)}{\Delta x} \quad (3.12)$$

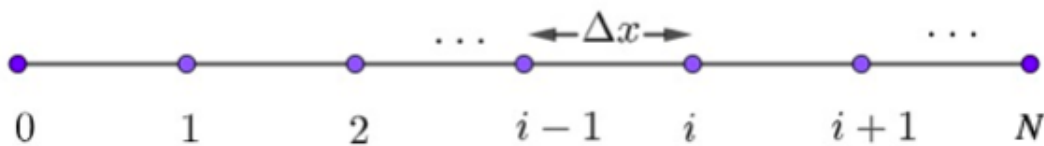
e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y(x_2, t) - 2y(x_1, t) + y(x_0, t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.13)$$

sendo $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

A figura a seguir mostra uma representação do domínio discreto que será utilizado para obtenção das equações de diferenças finitas.

Figura 3.2: Representação do domínio discreto



Fonte: Elaborado pela autora

Dessa forma, a equação (3.13) poderá ser reescrita assim:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.14)$$

em que o sobrescrito n passará a representar o instante de tempo. O subscrito i indicará a posição. Como a derivada é em relação a x , não há variação para n .

Analogamente a derivada temporal pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3.15)$$

A equação (3.11) será substituída por:

$$\frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - c^2 \frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = 0 \quad (3.16)$$

Ao utilizar as aproximações descritas anteriormente em que as derivadas foram substituídas por derivadas numéricas, a equação diferencial que modela esse problema será transformada em uma equação algébrica.

Organizando os termos em (3.16) será obtida a seguinte equação:

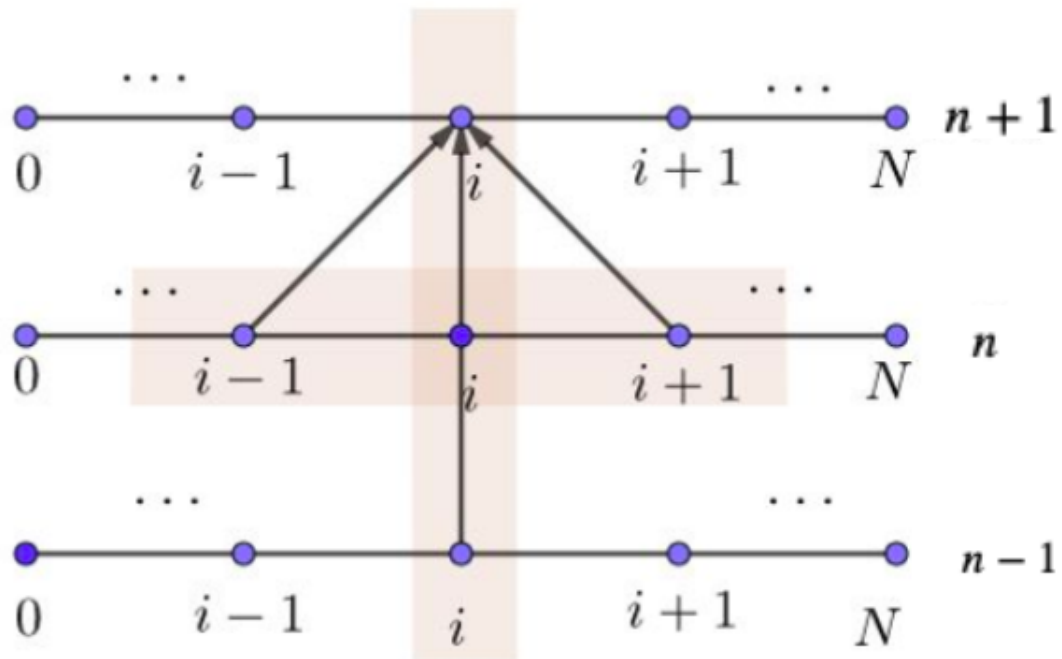
$$y_i^{n+1} = (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) \left(\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) + 2y_i^n - y_i^{n-1} \quad (3.17)$$

O resultado mostrado em (3.17) é chamado Formulação Explícita pois o termo desconhecido é o deslocamento y na posição i no instante de tempo $n + 1$. Deixando essa forma simplificada pode-se fazer o termo $\left(\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) = \lambda$.

$$y_i^{n+1} = (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n)(\lambda) + 2y_i^n - y_i^{n-1} \quad (3.18)$$

Ao se fixar um instante de tempo n , é possível calcular y em cada ponto da malha. A figura a seguir é conhecida como molécula de cálculo computacional e ilustra graficamente a equação (3.18).

Figura 3.3: Molécula de Cálculo Computacional



Fonte: Elaborado pela autora

Para inicializar o método, será assumido que $y_i^{n-1} = y_i^n$, lembrando que y_i^0 é dado pela condição inicial do problema. Cabe ressaltar ainda que y_0^n e y_N^n são as condições de contorno, nesse caso, do tipo Dirichlet. De acordo com (FRANCO, 2012), problemas em que os valores no contorno do domínio são constantes, como o que estamos resolvendo, são chamados Problemas de Dirichlet.

A seguir será apresentada a implementação do método numérico, bem como os resultados obtidos.

3.3 Implementação do Método Numérico

A equação (3.18) foi implementada no *Octave*, que é um software livre e de código aberto (OCTAVE, 2020). Foi utilizada uma malha espacial com 1000 pontos. Como o intervalo de solução tem amplitude π , têm-se que $\Delta x = 0.003$, aproximadamente. Lembrando que Δx é a distância entre dois pontos consecutivos da malha espacial.

Para o passo de tempo Δt utilizamos o valor 0.0003, aproximadamente pois, para garantir a convergência do método, verificou-se que era necessário estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} < 1. \quad (3.19)$$

em que $c\Delta t/\Delta x$ é conhecido como número de Courant-Friedrichs-Lewy, ou condição CFL. Segundo (FORTUNA, 2000) *apud* (MORAES, 2019), para que o método apresente estabilidade é necessário que

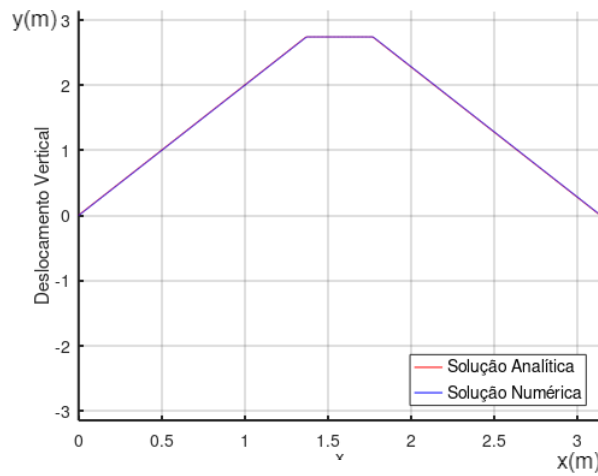
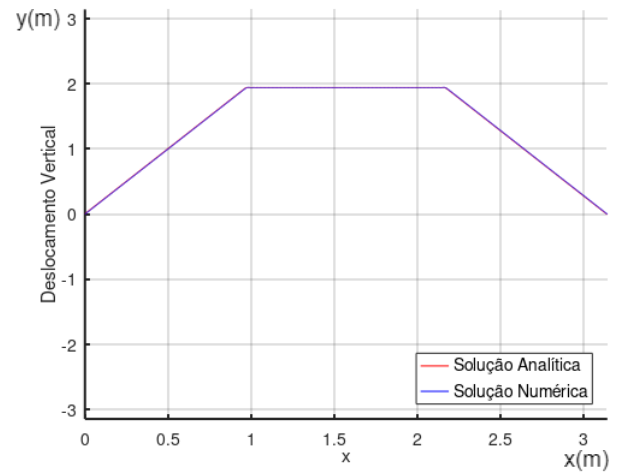
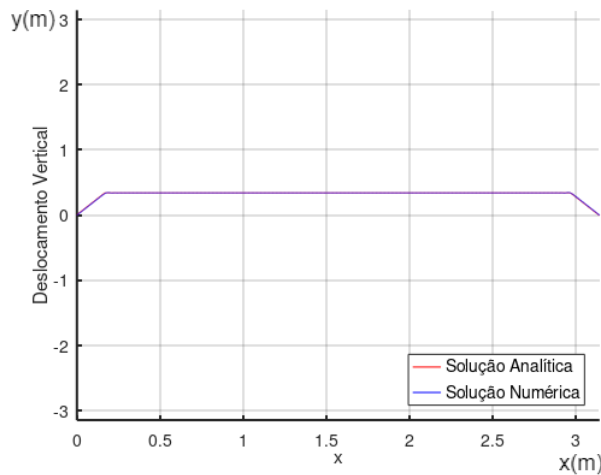
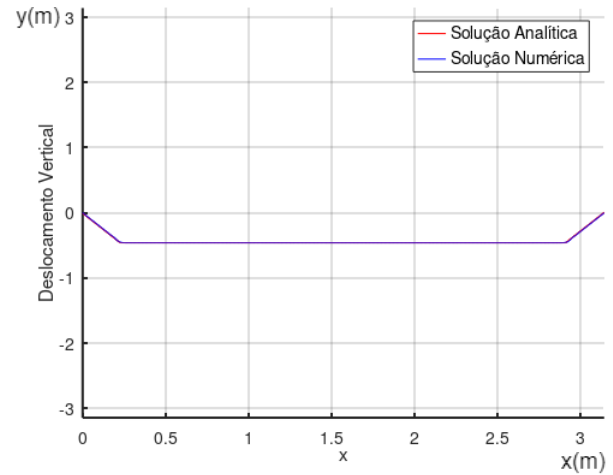
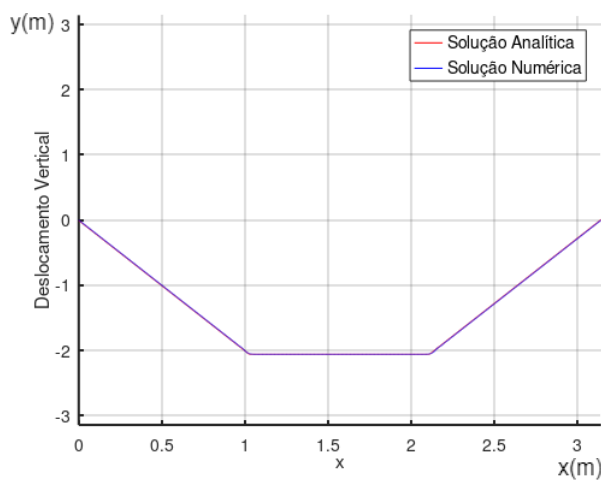
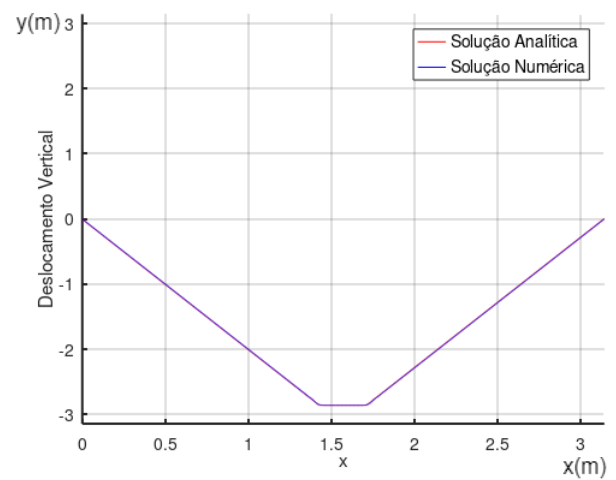
$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}.$$

Como $c = 1$, a condição mostrada em (3.19) foi satisfeita para os valores de Δx e Δt citados anteriormente.

3.3.1 Simulações

A solução numérica da equação da onda foi obtida para diferentes instantes de tempo e comparada com a solução analítica. Na figura (3.4) têm-se a representação das soluções para os instantes $t = 0.2$ s, $t = 0.6$ s, $t = 1.4$ s, $t = 1.8$ s, $t = 2.6$ s e $t = 3.0$ s

Figura 3.4: Representação das soluções numéricas e analíticas

(a) Simulação no instante $t = 0.2$ s(b) Simulação no instante $t = 0.6$ s(c) Simulação no instante $t = 1.4$ s(d) Simulação no instante $t = 1.8$ s(e) Simulação no instante $t = 2.6$ s(f) Simulação no instante $t = 3$ s

Fonte: Elaborado pela autora

É possível observar que em todos os instantes mostrados na figura, a solução numérica e a solução analítica estão praticamente sobrepostas. Com isso pode-se verificar que o método se comportou bem para aquilo que foi proposto. A seguir será discutido o erro cometido nas simulações numéricas.

3.3.2 Avaliação do Erro do Método Numérico

Para avaliar o erro foi utilizada a Norma Euclidiana, que mediu a distância entre o vetor solução numérica e o vetor solução analítica, para cada instante de tempo analisado. De acordo com (FRANCO, 2012), foi definida a norma do vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ por:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Sendo assim, foi criado o vetor diferença, definido como:

$$\text{diferença} = y_{\text{analítico}} - y_{\text{numérico}}$$

Em seguida calculamos a norma do vetor diferença e o erro percentual. A tabela 3.1 mostra os resultados obtidos para os instantes de tempo utilizados:

Tabela 3.1: Avaliação do Erro entre as Soluções

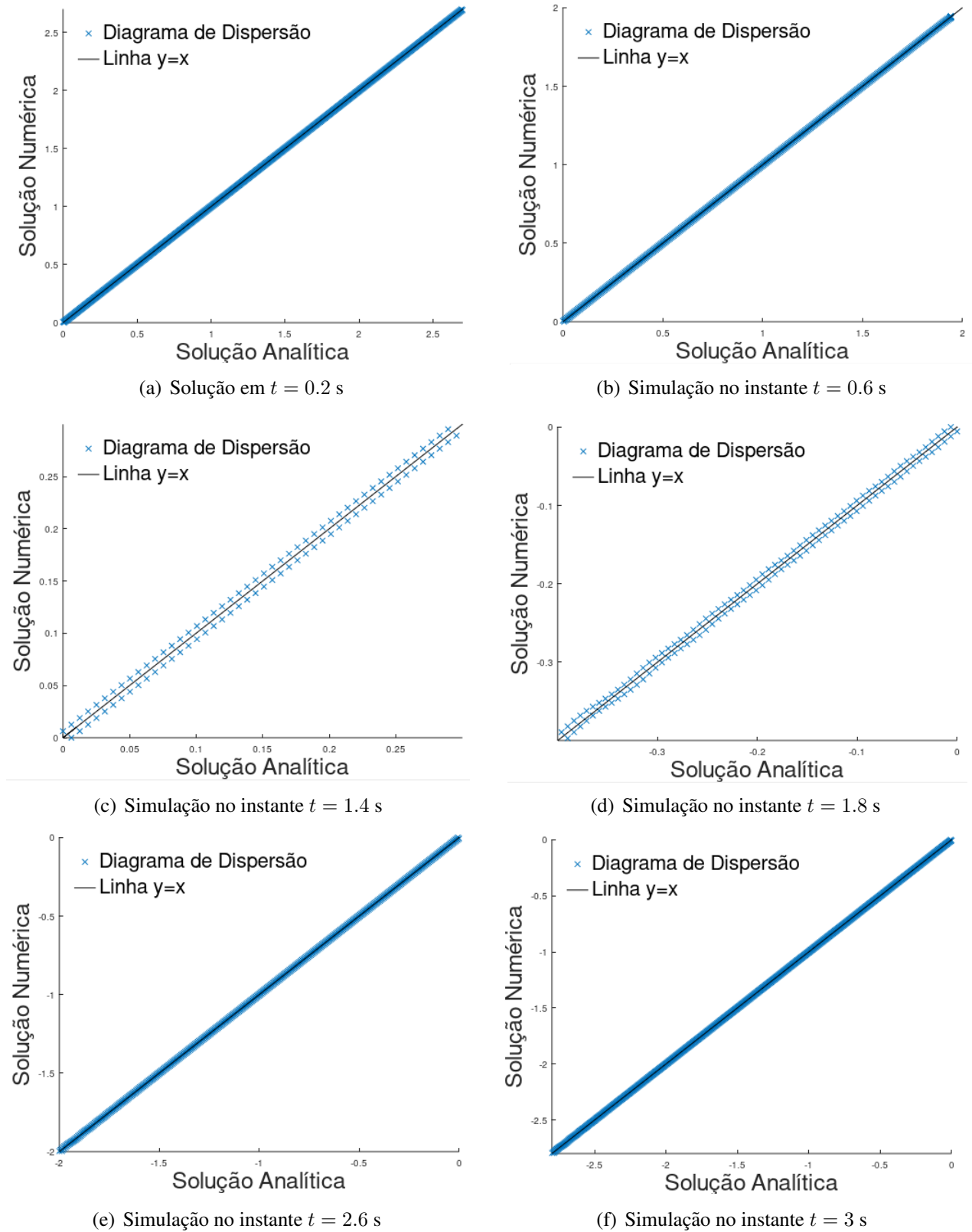
instantes (s)	0.2	0.6	1.4	1.8	2.6	3.0
erro	0.18590	0.15691	0.069148	0.079951	0.16348	0.19208
erro percentual (%)	0.1	0.1	0.6	0.5	0.1	0.1

Fonte: Elaborado pela autora

É possível verificar na tabela (3.1) que o método apresentou um erro percentual pequeno, o que demonstra sua eficácia em resolver o problema proposto.

Para ilustrar o que foi mostrado anteriormente vejamos a figura a seguir. Nela pode-se observar um diagrama de dispersão em que os valores do eixo x são dados pelas componentes do vetor solução analítica e os valores do eixo y são as componentes do vetor solução numérica. Juntamente com o diagrama foi traçada a reta $y = x$. Nota-se que os pontos do diagrama estão muito próximos da reta, o que significa que a solução numérica obtida é próxima da solução analítica.

Figura 3.5: Diagrama de Dispersão para Avaliação do Método



Fonte: Elaborado pela autora

Os diagramas mostrados na figura (3.5) são para os respectivos instantes de tempo utilizados na simulação (figura (3.4)).

3.3.3 Tempo de Execução do Código

Para os diferentes instantes de tempo que obteve-se a solução da equação da onda, julgou-se necessário alterar também o passo de tempo Δt . Isto para satisfazer a condição descrita em (3.19). Percebeu-se assim que, o tempo de execução do código aumentou significativamente.

Dessa forma pôde-se perceber a necessidade de utilizar uma função que calculasse esse tempo de execução. Os valores obtidos estão na tabela a seguir.

Tabela 3.2: Avaliação do Tempo de Execução em cada Instante

instantes (s)	0.2	0.6	1.4	1.8	2.6	3.0
tempo de execução (min)	10,9	13,3	20,9	23,7	31,6	45

Fonte: Elaborado pela autora

Como o erro percentual calculado foi pequeno e a solução obtida foi consideravelmente boa quando comparada à solução analítica, não viu-se necessidade de aumentar o número de pontos da malha computacional, o que tornaria o tempo de execução do código ainda maior. Lembrando ainda que, uma malha mais refinada iria aumentar o número de variáveis na equação (3.18), bem como o total de passos de tempo, tornando o código mais lento.

No próximo capítulo serão feitas as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 4

Considerações Finais

As Equações Diferenciais Parciais aparecem com muita frequência em problemas que modelam matematicamente fenômenos da natureza. Resolver tais equações por processos analíticos é, muitas vezes, uma tarefa laboriosa.

Sabendo disso, essa pesquisa se propôs a verificar a eficiência de um método numérico na obtenção da solução da equação da onda unidimensional. Escolheu-se o método das diferenças finitas, com a formulação explícita, implementado computacionalmente pelo *software Octave*.

A equação escolhida tem solução analítica conhecida, o que possibilitou uma comparação das soluções. Por meio dos gráficos apresentados na figura (3.4), verificamos que as soluções ficaram muito próximas, para todos os instantes de tempo analisados. Isso nos permite considerar que o método implementado, para esta equação, mostrou resultados satisfatórios.

Os resultados apresentados na tabela (3.1) servem para corroborar o que foi afirmado no parágrafo anterior: os erros calculados para avaliar o método foram pequenos o que mais uma vez demonstra boa estabilidade do mesmo.

Depois de avaliar os resultados obtidos e o tempo de execução do código, podemos dizer que a pesquisa conseguiu cumprir seu objetivo principal, que era resolver numericamente a equação da onda. Sugere-se que seja dada continuidade ao trabalho uma vez que há outras formulações que podem ser utilizadas com o mesmo objetivo.

Referências Bibliográficas

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluídos, V 30*. São Paulo: EdUSP, 2000.

FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education, 2012.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 5. ed. São Paulo: LTC, 2008.

HEWITT, P. G. *Física Conceitual*. Tradução: Trieste Freire Ricci. Porto Alegre: Bookman, 2015.

JUNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. *Os Fundamentos da Física*. 11. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 2.

MORAES, A. das N. *Critério de Estabilidade de um Esquema Explícito em Diferenças Finitas para o Modelo de Placas de Mindlin-Timoshenko*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Pará, 2019.

OCTAVE. *Octave*. 2020. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/octave/>. Acesso em 16/11/2020.

STEWART, J. *Cálculo*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 2.

VALADA, R. da S. *Modelagem de Sistemas Dinâmicos II*. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2015.

ZILL, M. R. C. D. G. *Equações Diferenciais, volume 2*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.