

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS ESCOLA
POLITÉCNICA E DE ARTES
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO**



Um estudo de centro em grafos

GUILHERME MACHADO SILVA

GOIÂNIA
2025

GUILHERME MACHADO SILVA

Um estudo de centro em grafos

Trabalho de Conclusão de Curso II apresentado à Escola Politécnica e de Artes, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia da Computação.

Orientador(a):
Profa. Dra. Carmen Cecilia Centeno.

Banca examinadora:
Prof. Me. Anibal Santos Jukemura
Prof. Me. Olegário Correa da Silva Neto.

GOIÂNIA
2025

Um estudo de centro em grafos

Este Trabalho de Conclusão de Curso julgado adequado para obtenção o título de Bacharel em Engenharia da Computação, e aprovado em sua forma final pela Escola Politécnica e de artes, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, em 11/06/2026.

Banca Examinadora:

Orientadora: Profa. Dra. Carmen
Cecilia Centeno

Prof. Me. Anibal Santos Jukemura

Prof. Me. Olegário Correa da Silva Neto

AGRADECIMENTO

Primeiramente, a Deus, por ter me guiado todos os dias. Sem a sua graça, eu não conseguiria trilhar esta jornada que agora chega ao fim.

À minha mãe, Cintia Machado Pimentel da Silva, ao meu pai, Edneilo José da Silva, e à minha irmã, Maria Clara Machado Silva. Vocês foram a minha base de sustentação durante todo esse tempo. Agradeço por me darem as condições de estar aqui; o apoio incondicional e a dedicação de cada um de vocês foram essenciais para que este sonho se tornasse realidade.

Um agradecimento muito especial à minha orientadora, Profa. Dra. Carmen Cecilia Centeno, que marcou profundamente a minha história na universidade. Quando ingressei no curso em abril de 2021, em um momento onde tudo ainda era online, ela nos acolheu de forma excepcional, tirando dúvidas e até mesmo indicando as melhores regiões para morar. Ter recebido esse carinho no início da minha trajetória e poder reencontrá-lo agora, nesta reta final, é um imenso privilégio. Quando vi a possibilidade de tê-la como orientadora, não pensei em um plano B. Muito obrigado por tudo.

Ao Prof. Me. Anibal Santos Jukemura, que compôs a banca do TCC 1 e abriu nossos olhos de como seguir com a pesquisa. Ao Prof. Me. Olegário Correa da Silva Neto, por aceitar o convite e agora fazer parte da banca avaliadora deste trabalho.

À Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) e a todos os professores do curso de Engenharia de Computação que deixaram sua marca na minha formação.

Por fim, aos meus amigos, familiares e a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse passar por essa jornada e chegar até aqui.

RESUMO

A Teoria dos Grafos constitui uma importante área da Matemática Discreta, oferecendo ferramentas para modelar e analisar sistemas formados por elementos interconectados. Entre os diversos problemas estudados nesse contexto, destacam-se aqueles relacionados à centralidade, cujo objetivo consiste em identificar vértices estrategicamente posicionados em uma rede. Este trabalho apresenta um estudo bibliográfico sobre três importantes conceitos de centralidade em grafos: centro, centroide e mediana. Inicialmente, são revisados conceitos fundamentais, que servem de base para a compreensão dos problemas estudados. Em seguida, são discutidas as propriedades de cada um dos conceitos fazendo uma comparação entre eles, exemplificando o uso destes com exemplos reais.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos; Centralidade; Centro; Centroide; Mediana; p-Mediana; Localização de Instalações.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Grafo completo.	11
Figura 2 - Grafo bipartido.	12
Figura 3 – Hipercubo.....	12
Figura 4 - Grafo de Petersen.	13
Figura 5 - Grafo com vértice de corte.	13
Figura 6 - Grafo para demonstrar a excentricidade.	14
Figura 7 - Árvore Central.	17
Figura 8 - Árvore Bicentral.	18
Figura 9 - Grafo do Teorema 2	20
Figura 10 - Árvore T para Centroide	23
Figura 11 - Árvore bicentral para Centroide	24
Figura 12 - Grafo Mediana.	25
Figura 13 - Árvore de mediana	26
Figura 14 - Árvore C. C.M. diferente	30
Figura 15 - Grafo C. C. M diferente	31
Figura 16 - Árvore C. C.M.	31
Figura 17 - Grafo C. C. M	32

Sumário

1 INTRODUÇÃO.....	8
1.1 Contextualização.....	8
1.2 Problema de Pesquisa	8
1.3 Objetivos	9
1.3.1 Objetivo Geral.....	9
1.3.2 Objetivos Específicos.....	9
1.4 Justificativa.....	9
1.5 Estrutura do Trabalho.....	9
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	11
2.1 Conceitos Básicos.....	11
2.2 Centro em Grafos.....	15
2.2.1 Aplicações do Centro em Grafos.....	21
2.3 O Centróide em grafos	22
2.3.1 Centróides em Árvores	22
2.4 Mediana	24
2.4.1 Mediana em Árvores.....	25
2.4.2 Aplicações da Mediana	26
3 COMPARAÇÃO ENTRE CENTRO, CENTRÓIDE E MEDIANA EM GRAFOS	29
4 CONCLUSÃO	32
REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

A Teoria dos Grafos constitui um dos ramos mais importantes da Matemática Discreta e da Ciência da Computação, oferecendo ferramentas para modelar e analisar sistemas compostos por elementos interconectados. Redes de transporte, sistemas de comunicação, redes sociais, circuitos elétricos, estruturas moleculares e sistemas logísticos são apenas alguns exemplos de aplicações que podem ser representadas por grafos.

Dentre os diversos problemas estudados nessa área, a identificação de vértices estrategicamente posicionados ocupa papel de destaque. Em muitas situações práticas, deseja-se localizar pontos capazes de otimizar a operação de uma rede, reduzindo tempos de deslocamento, equilibrando estruturas ou minimizando custos de atendimento. Essas questões conduzem ao estudo da centralidade em grafos.

A centralidade pode ser interpretada sob diferentes perspectivas. O conceito de centro está associado à minimização da maior distância entre um vértice e os demais elementos da rede. O centroide, por sua vez, está relacionado ao balanceamento estrutural da rede, buscando vértices cuja remoção produza componentes tão equilibradas quanto possível. Já a mediana fundamenta-se na minimização da soma das distâncias, tornando-se particularmente relevante em problemas de localização de instalações e planejamento logístico.

Além do interesse teórico, esses conceitos possuem aplicações em diversas áreas do conhecimento. Problemas envolvendo localização de hospitais, escolas, postos de coleta seletiva, centros de distribuição, unidades de atendimento médico e instalações de infraestrutura podem ser modelados por meio de grafos e resolvidos utilizando técnicas baseadas em centralidade. Em particular, a generalização da mediana para múltiplas instalações conduz ao clássico Problema das p -Medianas, amplamente estudado em Pesquisa Operacional, Logística e Engenharia de Transportes.

Nesse contexto, este trabalho apresenta um estudo teórico e bibliográfico sobre medidas de centralidade em grafos, com ênfase nos conceitos de centro, centroide e mediana, destacando suas propriedades matemáticas, relações estruturais, aplicações e aspectos computacionais.

1.2 Problema de Pesquisa

A noção de centralidade em grafos pode ser definida a partir de diferentes critérios de otimização, conduzindo a conceitos distintos como centro, centroide e mediana. Embora todos busquem identificar vértices estrategicamente posicionados em uma rede, cada um deles enfatiza aspectos diferentes da estrutura do grafo, tais como distâncias máximas, balanceamento estrutural ou minimização do custo total de deslocamento.

Diante disso, surge a seguinte questão de pesquisa:

Como os conceitos de centro, centroide e mediana se relacionam do ponto de vista matemático, estrutural e computacional, e de que forma essas medidas podem ser utilizadas na modelagem de problemas reais de localização e planejamento em redes?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Estudar os conceitos de centro, centroide e mediana em grafos, analisando suas propriedades matemáticas, interpretações estruturais, aplicações e aspectos computacionais associados a problemas de localização em redes.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Revisar os conceitos fundamentais de Teoria dos Grafos relacionados a distância, excentricidade, raio e diâmetro;
- Apresentar e discutir a teoria do centro em grafos, com ênfase em árvores e grafos conexos;
- Estudar o conceito de centroide e suas propriedades estruturais;
- Definir formalmente a mediana em grafos e sua relação com medidas de centralidade baseadas em distâncias;
- Comparar os conceitos de centro, centroide e mediana, destacando semelhanças e diferenças;
- Investigar aplicações dessas medidas de centralidade em problemas de localização de instalações e planejamento de redes.

1.4 Justificativa

O estudo da centralidade em grafos possui relevância tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado. Sob a perspectiva matemática, os conceitos de centro, centroide e mediana fornecem diferentes interpretações para a noção de posição estratégica em uma rede, permitindo compreender propriedades estruturais relacionadas a distâncias, equilíbrio e otimização.

Sob a perspectiva prática, essas medidas desempenham papel importante em problemas de localização de instalações, planejamento urbano, logística, transporte, redes de comunicação e sistemas de atendimento público. A determinação de locais adequados para hospitais, escolas, centros de distribuição e postos de atendimento constitui apenas algumas das aplicações em que tais conceitos podem ser empregados.

Além disso, o estudo das medianas conduz naturalmente ao Problema das p-Medias, um dos problemas clássicos da Pesquisa Operacional e da otimização combinatória, cuja relevância permanece atual devido à sua ampla utilização em sistemas reais de grande escala.

Dessa forma, o presente trabalho justifica-se pela importância teórica dos conceitos estudados e por sua aplicabilidade em diversos contextos científicos, tecnológicos e sociais.

1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. O Capítulo 1 apresenta a contextualização do tema, o problema de pesquisa, os objetivos e a justificativa do estudo.

O Capítulo 2 reúne a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho, abordando conceitos básicos da Teoria dos Grafos, bem como as definições e propriedades de centro, centroide e mediana.

O Capítulo 3 apresenta uma comparação entre os três conceitos estudados.

Por fim, o Capítulo 4 apresenta as considerações finais do trabalho, sintetizando os principais pontos discutidos ao longo da pesquisa e sugerindo perspectivas para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

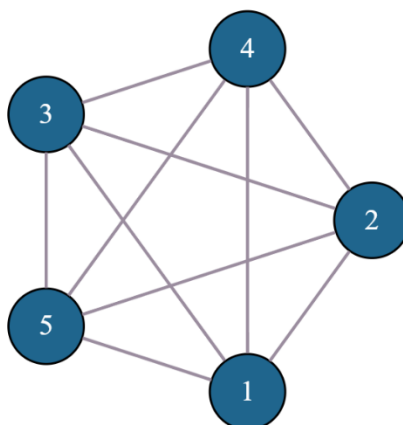
2.1 Conceitos Básicos

Um **grafo** G é uma dupla $(V(G), E(G))$, em que $V(G)$ é um conjunto finito não vazio, cujos elementos são denominados **vértices**, e $E(G)$ é o conjunto de pares de $V(G)$, denominados **arestas**. Denota-se a aresta que liga o vértice u ao vértice v por uv . Se existir a aresta uv , dizemos que o vértice u é **adjacente** ao vértice v ($u \sim v$) e que a aresta uv é **incidente** a u e a v . Os pares de vértices que formam cada aresta são as **extremidades** ou **extremos** da aresta. O **grau** de um vértice é o número de arestas incidentes a ele.

Os **vizinhos** de um vértice v , denotado por $N(v)$, são todos os vértices adjacentes a v . Um **subgrafo** de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. O subgrafo H será um **subgrafo induzido** se $E(H)$ contiver todas as arestas de G cujos extremos pertencem a $V(H)$. Uma **clique** é um subgrafo induzido de um grafo G , tal que cada dois vértices do subgrafo são adjacentes. Por outro lado, um **conjunto independente** é um subconjunto de vértices em que nenhum par é adjacente.

Um **caminho** é um grafo conexo não vazio P onde $V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$. Um caminho de n vértices é denotado por P_n . O número de arestas de um caminho é o seu comprimento. Um grafo G é dito **conexo** quando, para qualquer par de vértices $u, v \in V(G)$, existe ao menos um caminho ligando u a v . Um caminho onde $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_kx_0\}$ é chamado **ciclo**. Um ciclo com n arestas é denotado por C_n .

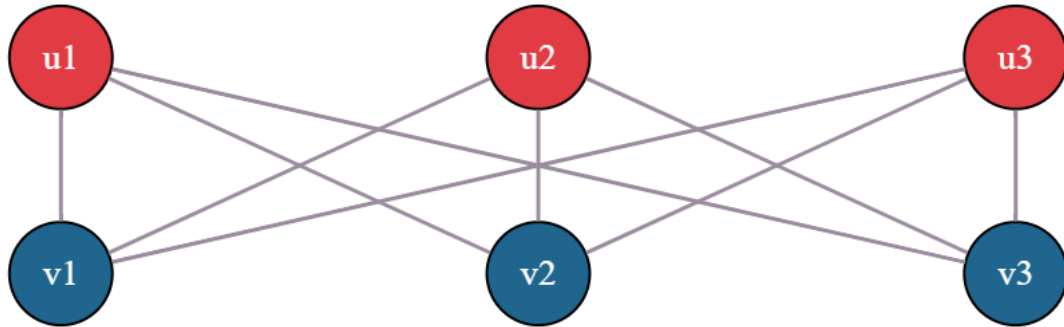
Figura 1 - Grafo completo.



Fonte: devtoolsdaily.com

Um grafo G é dito **completo** quando todos os seus vértices são dois a dois adjacentes, isto é, existe uma aresta entre cada par de vértices (Figura 1). O grafo completo com n vértices é denotado por K_n , possui $n(n-1)/2$ arestas e cada um de seus vértices tem grau $n-1$.

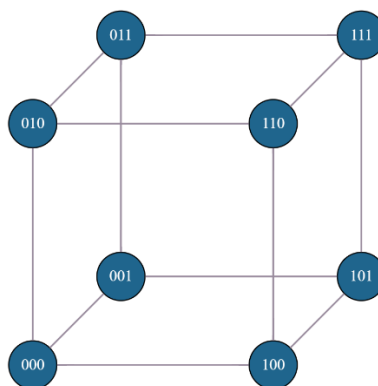
Figura 2 - Grafo bipartido.



Fonte: devtoolsdaily.com

Um grafo G é **bipartido** quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes V_1 e V_2 , de modo que toda aresta de G tenha uma extremidade em V_1 e a outra em V_2 . Quando, além disso, todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2 , dizemos que G é bipartido completo, denotado por $K_{(m,n)}$, em que $m = |V_1|$ e $n = |V_2|$ (Figura 2).

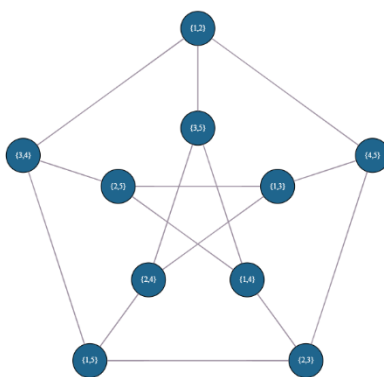
Figura 3 – Hipercubo.



Fonte: devtoolsdaily.com

O **hipercubo** de dimensão n , denotado por Q_n , é o grafo cujos vértices correspondem às 2^n sequências binárias de comprimento n , sendo dois vértices adjacentes quando suas sequências diferem em exatamente uma coordenada. Assim, Q_1 é uma única aresta, Q_2 é o ciclo C_4 e Q_3 corresponde ao cubo. Cada vértice de Q_n tem grau n .

Figura 4 - Grafo de Petersen.

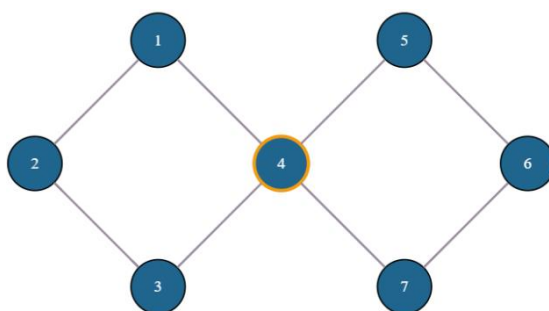


Fonte: devtoolsdaily.com

O **grafo de Petersen** é um grafo com 10 vértices e 15 arestas, comumente definido a partir dos subconjuntos de dois elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: cada vértice representa um desses subconjuntos, e dois vértices são adjacentes quando os subconjuntos correspondentes são disjuntos. Trata-se de um grafo no qual todos os vértices têm grau 3, notável por aparecer recorrentemente como exemplo — e como contraexemplo — em diversos resultados da teoria dos grafos, em razão de sua alta simetria.

Um grafo G é chamado de **regular** quando todos os seus vértices têm o mesmo grau. Se cada vértice tem grau k , dizemos que G é k -regular. Grafos regulares são importantes em teoria dos grafos porque possuem alta simetria estrutural, o que facilita a análise de propriedades como diâmetro, centralidade e distribuição de distâncias.

Figura 5 - Grafo com vértice de corte.



Fonte: devtoolsdaily.com

Um vértice $v \in V(G)$ é denominado **vértice de corte** (quando sua remoção, juntamente com as arestas a ele incidentes, aumenta o número de componentes conexas do grafo). Na figura 5 o vértice 4 é um vértice de corte. Ao se remover 4 teremos duas componentes conexas $(1,2,3)$ e $(5,6,7)$. Esse conceito relaciona-se diretamente com a noção de conexidade: em uma

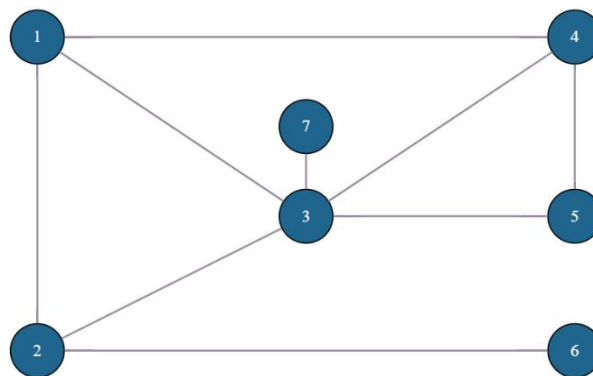
árvore, por exemplo, todo vértice que não é folha é um vértice de corte, uma vez que sua retirada separa o grafo em duas ou mais partes.

Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico, isto é, que não contém ciclos. Árvores desempenham um papel central no estudo de centro em grafos, pois muitos resultados estruturais clássicos são primeiro estabelecidos nesse contexto e depois generalizados para classes mais amplas de grafos.

A **distância** entre dois vértices u e v , denotada por $d(u, v)$, é o comprimento (número de arestas) do menor caminho entre u e v . Se não existe caminho entre u e v , convencionase $d(u, v) = \infty$.

A **excentricidade** de um vértice em um grafo é a maior distância dentre as distâncias para qualquer outro vértice, $e(v) = \max\{d(u, v) : u \in V(G)\}$. Considere o grafo G da Figura 06, para calcular a excentricidade do vértice 3 verificamos as distâncias até todos os outros vértices. Para os vértices 1, 2, 4, 5 e 7 a distância é 1, já para o vértice 6 a distância é 2 (caminho $3 \rightarrow 2 \rightarrow 6$). Como a maior distância de 3 para algum outro vértice é 2 a excentricidade do vértice 3 é igual a 2. De maneira semelhante, os vértices 1 e 2 também possuem excentricidade 2. O vértice 6, por outro lado, está mais isolado, apresentando excentricidade igual a 3 (caminho $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$). A mesma lógica se aplica aos vértices 4, 5 e 7, que também apresentam excentricidade 3.

Figura 6 - Grafo para demonstrar a excentricidade.



Fonte: devtoolsdaily.com

O **raio** é a menor excentricidade que existe em todo o grafo, denotado por $\text{rad}(G)$. Ele representa a melhor localização possível, o ponto de onde a viagem mais longa é a mais curta de todas. Os nós com essa característica são chamados de nós centrais. No exemplo da Figura 6 o raio é 2. Por outro lado, o **diâmetro** é a maior excentricidade que existe em todo o grafo. No exemplo da Figura 6 o diâmetro é 3. Em um grafo desconexo, o diâmetro e o raio (e toda excentricidade) são infinitos, porque a distância entre vértices em componentes diferentes é infinita.

O diâmetro apresenta comportamento bastante distinto dependendo da classe de grafos considerada. Em alguns grafos altamente simétricos, o diâmetro pode ser determinado de forma exata por argumentos estruturais. O grafo de Petersen, por exemplo, possui diâmetro igual a 2, pois quaisquer dois vértices não adjacentes possuem um vizinho comum. De maneira semelhante, o hipercubo (Q_k) possui diâmetro igual a k , uma vez que a distância entre dois vértices corresponde ao número de coordenadas em que diferem. Já no ciclo (C_n), o diâmetro é dado por $\lfloor n/2 \rfloor$, pois a maior distância entre dois vértices ocorre quando estes se encontram em posições diametralmente opostas ao longo do ciclo. Em todos esses exemplos, todos os vértices possuem a mesma excentricidade, de modo que o raio coincide com o diâmetro. Em grafos conexos arbitrários, entretanto, a relação entre essas duas grandezas é descrita pela desigualdade clássica $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$, que estabelece que o diâmetro nunca é menor que o raio e nem superior ao dobro deste. Essa relação fornece limites importantes para a análise da estrutura global de uma rede e desempenha papel fundamental no estudo de centralidade. No caso particular das árvores, a estrutura torna-se ainda mais simples, pois existe um único caminho entre quaisquer dois vértices. Consequentemente, o diâmetro de uma árvore corresponde ao comprimento de seu caminho mais longo. Entre todas as árvores com (n) vértices, a estrela ($K_{1,n-1}$) possui o menor diâmetro possível, igual a 2, e raio igual a 1, enquanto o caminho (P_n) possui o maior diâmetro possível, igual a $(n-1)$, e raio igual a $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Esses resultados evidenciam que o diâmetro constitui uma medida global da extensão de uma rede variando de estruturas altamente centralizadas de estruturas alongadas e pouco compactas.

Os conceitos de distância, excentricidade, raio, e diâmetro desempenham papel fundamental na análise estrutural de grafos, pois permitem medir diferentes aspectos da proximidade entre vértices. A partir dessas medidas surgem diversos conceitos de centralidade, cada um associado a um critério específico de otimização. Entre eles, destaca-se inicialmente o conceito de centro, baseado na minimização da excentricidade dos vértices e, consequentemente, da maior distância até os demais elementos da rede. O estudo do centro constitui um dos temas clássicos da Teoria dos Grafos e serve como ponto de partida para o desenvolvimento de outras noções de centralidade, como centroide e mediana, que serão abordadas posteriormente.

2.2 Centro em Grafos

Um **vértice central** de um grafo é um vértice cuja excentricidade é igual ao raio do grafo, isto é, um vértice que apresenta a menor excentricidade dentre todos os vértices da rede. O centro de um grafo (G), denotado por $(C(G))$, é o subgrafo induzido pelo conjunto de todos os seus vértices centrais. No grafo da Figura 6, os vértices centrais são 1, 2 e 3. Em contraste, um **vértice periférico** é aquele cuja excentricidade é igual ao diâmetro do grafo, no grafo da Figura 06, os vértices 6, 4, 5 e 7 são vértices periféricos. O conjunto de todos os vértices periféricos de um grafo forma sua **periferia**. Se os vértices centrais representam os locais mais "centrais", os vértices periféricos são os mais "remotos" ou "extremos".

A teoria de centro em grafos dedica-se ao estudo dos vértices centrais e das propriedades estruturais associadas à centralidade. Sua definição clássica baseia-se no conceito de excentricidade ($e(v) = \max\{d(u, v) : v \in V(G)\}$), os vértices centrais são exatamente aqueles que minimizam essa medida. Sob o ponto de vista computacional, a determinação

do centro de um grafo é um problema solucionável em tempo polinomial, pertencendo, portanto, à classe (P).

A importância do conceito de centro ultrapassa o interesse puramente teórico, estando diretamente relacionada a problemas de localização de instalações e planejamento de redes. Em diversas situações práticas deseja-se determinar uma posição estratégica que minimize distâncias dentro de uma determinada região. Por exemplo, ao escolher a localização de um hospital, de uma base do corpo de bombeiros ou de um centro de atendimento de emergências, busca-se minimizar o maior tempo de resposta entre a instalação e qualquer ponto da área atendida. Em outros contextos, como a localização de agências bancárias, centros de distribuição, agências dos correios ou unidades de prestação de serviços, o objetivo pode ser minimizar a distância total percorrida pelos usuários. Problemas semelhantes surgem ainda no planejamento de ferrovias, rodovias, oleodutos e redes de comunicação.

Essas aplicações motivaram o desenvolvimento de diferentes conceitos de centralidade em grafos. O centro, definido a partir da excentricidade mínima, representa uma solução natural para problemas em que se deseja minimizar a maior distância entre a instalação e os usuários da rede. Dessa forma, o estudo do centro constitui um dos primeiros e mais importantes problemas de localização em Teoria dos Grafos, servindo como base para o desenvolvimento de outras noções de centralidade que serão discutidas posteriormente.

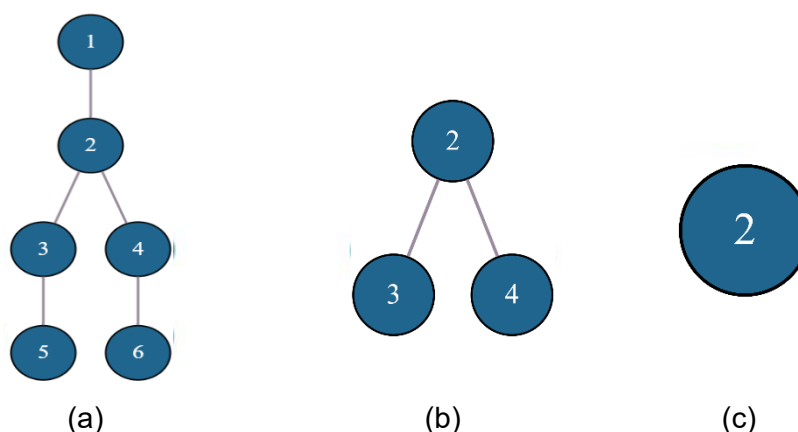
Entretanto, o estudo do centro não se limita à simples identificação desses vértices. A teoria contemporânea busca compreender propriedades estruturais mais amplas associadas à centralidade. Entre as questões investigadas estão, por exemplo:

- Como se caracteriza o subgrafo induzido pelos vértices centrais?
- Quais critérios guiam a localização ótima de instalações críticas, como centros de emergência ou unidades de resposta rápida, considerando restrições de conectividade e distância?

Assim, a teoria de centro em grafos abrange não apenas algoritmos eficientes de localização do centro, mas também uma análise mais profunda das estruturas e fenômenos associados à centralidade dentro de redes complexas.

Um caso particularmente importante é o das árvores. Problemas de centro em árvores podem ser aplicados à análise de roteamento e localização de servidores em redes hierárquicas. Para árvores, existe um algoritmo simples e de tempo linear baseado em podas sucessivas de folhas.

Figura 7 - Árvore Central.



Fonte: devtoolsdaily.com

Na Figura 7 (a) temos a árvore T para a qual queremos identificar o centro. A operação de poda de uma árvore consiste em remover todas as folhas da árvore (vértices adjacentes a apenas um vértice) obtendo assim uma nova árvore. A Figura 7 (b) apresenta a árvore T após uma primeira poda, após a remoção dos vértices 1, 5 e 6 (folhas de T). A Figura 7 (c) apresenta a árvore T após uma segunda poda, após a remoção dos vértices 3 e 4, que são as novas folhas de T após a primeira poda. Após a segunda poda, sobrou apenas o vértice 2. O processo para aqui, pois não há mais o que remover. Portanto, o vértice 2 é o centro da árvore original.

Para verificar se achamos o centro da árvore, vamos calcular a excentricidade de todos os nós na árvore original:

$e(1) = 3$ (a maior distância é de 1 até 5 ou 6)

$e(2) = 2$ (a maior distância é de 2 até 5 ou 6)

$e(3) = 2$ (a maior distância é de 3 até 6)

$e(4) = 2$ (a maior distância é de 4 até 5)

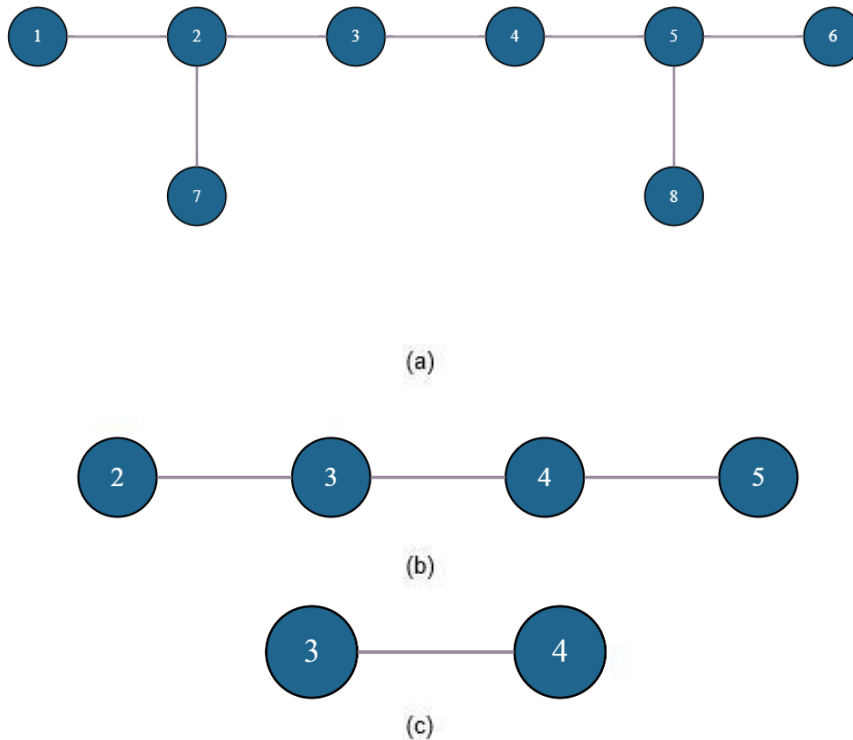
$e(5) = 3$ (a maior distância é de 5 até 1 ou 6)

$e(6) = 3$ (a maior distância é de 6 até 1 ou 5)

A menor excentricidade é 2, e o único vértice com esse valor é o vértice 2, logo 2 é o centro da árvore.

Uma árvore pode ter um ou dois vértices como centro. Vamos aplicar nosso processo de poda a uma outra árvore.

Figura 8 - Árvore Bicentral.



Fonte: devtoolsdaily.com

Para encontrar o centro da árvore T da Figura 8 (a) iniciamos a poda removendo os vértices 1, 6, 7 e 8, obtemos assim a nova árvore representada na Figura 8 (b). Seguimos com a poda removendo os vértices 2 e 5, obtendo a árvore representada na Figura 8 (c). Após a segunda poda, restaram os nós 3 e 4, que estão conectados por uma aresta. Não podemos mais podar. Se removêssemos 3 e 4, a árvore ficaria vazia. Portanto, o centro da árvore é o par de vértices adjacentes $\{3, 4\}$.

Vamos confirmar o resultado calculando a excentricidade de cada vértice da árvore original:

$e(1) = 5$ (a maior distância é de 1 até 6 ou 8)
 $e(2) = 4$ (a maior distância é de 2 até 6 ou 8)
 $e(3) = 3$ (a maior distância é de 3 até 6 ou 8)
 $e(4) = 3$ (a maior distância é de 4 até 1 ou 7)
 $e(5) = 4$ (a maior distância é de 5 até 1 ou 7)
 $e(6) = 5$ (a maior distância é de 6 até 1 ou 7)
 $e(7) = 5$ (a maior distância é de 7 até 6 ou 8)
 $e(8) = 5$ (a maior distância é de 8 até 1 ou 7)

A menor excentricidade encontrada é 3. Os nós que possuem essa excentricidade são os nós 3 e 4, formando o centro da árvore T.

Os exemplos das Figuras 7 e 8 sugerem que o centro de uma árvore pode assumir apenas duas formas: um único vértice (árvore central) ou dois vértices adjacentes (árvore bicentral).

O resultado clássico a seguir foi demonstrado por Camille Jordan em 1869 e constitui um dos primeiros resultados estruturais sobre centralidade em árvores.

Teorema 1 (Jordan, 1869): O centro de uma árvore consiste em um único vértice ou um par de vértices adjacentes.

A demonstração a seguir é baseada na abordagem apresentada por Buckley e Harary (1990), utilizando o processo iterativo de remoção das folhas da árvore apresentado anteriormente.

Prova.

O resultado é imediato para as árvores K_1 e K_2 , pois seus únicos vértices são centrais.

Considere agora uma árvore (T) com pelo menos três vértices e seja (T') a árvore obtida pela remoção de todas as folhas (vértices de grau 1) de (T). Mostraremos que (T) e (T') possuem o mesmo centro.

Seja (v) um vértice de (T'). Como toda árvore possui um único caminho entre quaisquer dois vértices, qualquer vértice mais distante de (v) (isto é, qualquer vértice excêntrico de (v)) deve necessariamente ser uma folha da árvore. De fato, se um vértice excêntrico não fosse uma folha, seria possível prolongar o caminho até uma folha ainda mais distante, contradizendo a maximalidade da distância.

Ao remover todas as folhas para obter (T'), cada caminho máximo que parte de (v) perde exatamente sua última aresta. Consequentemente, a excentricidade de (v) diminui em uma unidade: $e_{T'}(v) = e_T(v) - 1$.

Como a mesma redução ocorre para todos os vértices remanescentes, a ordem relativa entre suas excentricidades não se altera. Portanto, os vértices que possuem excentricidade mínima em (T) continuam sendo exatamente os vértices de excentricidade mínima em (T').

Logo, (T) e (T') possuem o mesmo centro.

Podemos repetir esse procedimento sucessivamente, removendo todas as folhas da árvore obtida na etapa anterior. Como (T) possui número finito de vértices, esse processo termina após um número finito de passos.

Ao final restará:

- um único vértice, formando a árvore (K_1); ou
- dois vértices adjacentes, formando a árvore (K_2).

Como o centro foi preservado em cada etapa do processo, os vértices da árvore final constituem precisamente o centro da árvore original (T).

Portanto, o centro de uma árvore consiste sempre em um único vértice ou em um par de vértices adjacentes.

□

Embora as árvores forneçam um ambiente particularmente simples para o estudo do centro, muitas redes reais apresentam ciclos e estruturas mais complexas. Surge então a questão de quais propriedades do centro permanecem válidas em grafos conexos arbitrários.

Teorema 2(BUCKLEY, HARARY, 1990): O centro $C(G)$ de um grafo G conexo qualquer está dentro de um bloco de G .

Prova

Suponha, por absurdo, que o centro $(C(G))$ não esteja contido em um único bloco. Então existem vértices centrais pertencentes a blocos distintos. Consequentemente, existe um vértice de corte (v) tal que o grafo $(G-v)$ possui pelo menos duas componentes conexas, (G_1) e (G_2) , cada uma contendo um vértice central.

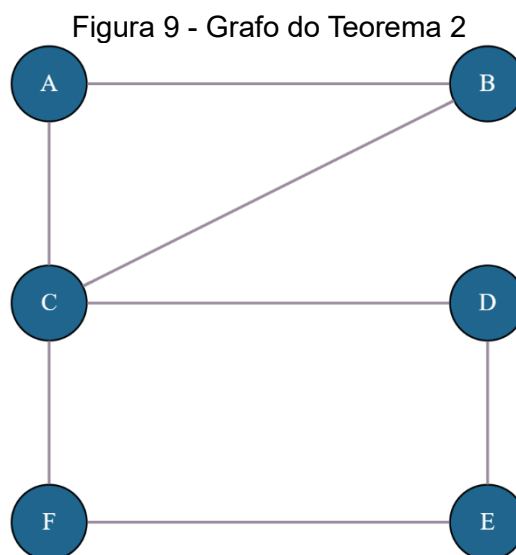
Seja u um vértice excêntrico de v , isto é $d(v,u) = e(v)$. Sem perda de generalidade, suponha que (u) não pertença à componente (G_1) . Considere agora um vértice central $(w \in G_1)$. Como todo caminho de (w) para (u) deve passar pelo vértice de corte (v) , segue que $d(w,u) = d(w,v) + d(v,u)$. Como (u) é excêntrico para (v) , temos $d(v,u) = e(v)$.

Além disso, como (w) pertence à componente (G_1) , tem-se $d(w,v) \geq 1$. Portanto, $d(w,u) \geq 1 + e(v)$. Mas a excentricidade de (w) é pelo menos a distância até qualquer vértice do grafo, em particular até (u) . Logo, $e(w) \geq d(w,u) \geq 1 + e(v)$.

Assim, $e(w) > e(v)$. Isso mostra que (w) não pode ser um vértice central, pois existe um vértice $((v))$ com excentricidade estritamente menor. Obtivemos uma contradição com a hipótese de que (w) era central. Portanto, todos os vértices centrais devem pertencer a um mesmo bloco de (G) .

□

O teorema 2 afirma que todos os vértices que formam o centro de um grafo (aqueles com a menor excentricidade) devem pertencer a um único "bloco". Um bloco é uma parte do grafo que não pode ser desconectada pela remoção de um único vértice. O vértice que conecta blocos é chamado de **vértice de corte** (ou vértice de articulação).



Fonte: devtoolsdaily.com

Para ilustrar a aplicação do Teorema 2, analisa-se o grafo apresentado na Figura 9. Inicialmente, identifica-se que o vértice C atua como um vértice de corte, particionando a estrutura em dois blocos distintos (subconjuntos maximais): $V1 = \{A, B, C\}$ e $V2 = \{C, D, E, F\}$. Ao calcular as excentricidades de cada elemento, obtêm-se os valores $e(A)=3$, $e(B)=3$, $e(C)=2$, $e(D)=2$, $e(E)=3$ e $e(F)=2$. Como os vértices C, D e F apresentam a menor excentricidade, conclui-se que o centro do grafo é composto por $C(G) = \{C, D, F\}$. Observa-se, portanto, que o centro está inteiramente contido no bloco V2 através do vértice de articulação C, o que confirma a premissa do Teorema 2 e fortalece a compreensão prática do resultado.

Sendo assim o teorema 2 mostra que os vértices centrais de um grafo não podem estar distribuídos em regiões separadas por vértices de corte. Em outras palavras, o centro de um grafo está sempre concentrado em uma região estruturalmente mais robusta da rede, isto é, em um único bloco. Esse resultado é particularmente relevante porque revela que a centralidade não depende apenas das distâncias entre vértices, mas também da organização estrutural do grafo. Assim, embora o centro seja definido por uma propriedade métrica — a excentricidade mínima — ele também apresenta uma forte restrição topológica, permanecendo contido em uma subestrutura altamente conectada do grafo.

2.2.1 Aplicações do Centro em Grafos

O estudo do centro em grafos possui relevância tanto teórica quanto prática. Do ponto de vista aplicado, o conceito de centro está diretamente associado a problemas de localização de instalações, nos quais se deseja minimizar a maior distância entre uma instalação e os usuários de uma rede. Exemplos clássicos incluem a localização de hospitais, quartéis de bombeiros, bases de ambulâncias e centros de resposta a emergências, onde o objetivo é garantir que o tempo máximo de atendimento seja o menor possível.

Além dessas aplicações tradicionais, medidas de centralidade baseadas em distâncias têm sido empregadas em outras áreas do conhecimento. Na química matemática, por exemplo, Randić e colaboradores investigaram a centralidade de vértices em grafos moleculares, nos quais os vértices representam átomos e as arestas representam ligações químicas. Nesse contexto, a posição relativa de um átomo em relação ao centro da molécula pode fornecer informações relevantes sobre propriedades físico-químicas, estabilidade e reatividade molecular (RANDIĆ, 2001).

Sob a perspectiva teórica, diversas pesquisas têm buscado compreender propriedades estruturais associadas ao centro de um grafo. Buckley, Miller e Slater estudaram o chamado problema de incorporação de centros, investigando sob quais condições um grafo dado pode aparecer como centro de um supergrafo conexo. Esse tipo de resultado contribui para a compreensão da relação entre a estrutura global de uma rede e a configuração de seus vértices centrais (BUCKLEY; MILLER; SLATER, 1981).

Outra linha de investigação relevante está relacionada ao tamanho do centro. Hu e Zhan analisaram as possíveis cardinalidades do conjunto de vértices centrais em função da ordem e do raio do grafo, caracterizando quais valores podem ser assumidos pelo centro e construindo famílias de grafos extremas que realizam tais configurações (HU; ZHAN, 2022).

O conceito de centro também motivou o estudo dos chamados grafos autocentrados e quase autocentrados. Um grafo é autocentrado quando todos os seus vértices possuem a

mesma excentricidade mínima, de modo que todos são centrais. Klavžar, Narayankar e Walikar introduziram a classe dos grafos quase autocentrados, nos quais todos os vértices são centrais, exceto exatamente dois. Os autores investigaram propriedades estruturais dessa classe e mostraram como grafos arbitrários podem ser incorporados em grafos quase autocentrados de raio prescrito (KLAVŽAR; NARAYANKAR; WALIKAR, 1999).

Esses resultados evidenciam que a teoria do centro em grafos ultrapassa o problema clássico de determinação dos vértices centrais. Atualmente, a área envolve questões relacionadas à estrutura do centro, à sua cardinalidade, a problemas de incorporação e às aplicações em diferentes contextos científicos e tecnológicos, constituindo uma importante linha de pesquisa dentro da Teoria dos Grafos.

Embora o conceito de centro desempenhe papel fundamental na teoria da centralidade, ele não é a única forma de caracterizar vértices estrategicamente posicionados em uma rede. Em muitas aplicações, minimizar a maior distância não é necessariamente o objetivo mais adequado. Dependendo do contexto, pode ser mais relevante identificar vértices que promovam um equilíbrio estrutural da rede ou que minimizem o custo total de deslocamento entre seus elementos. Essas diferentes perspectivas deram origem a outras importantes noções de centralidade, entre as quais se destacam o centroide, os grafos autocentrados e a mediana. O centroide, em particular, introduz uma visão complementar à do centro, pois está associado ao balanceamento estrutural do grafo e não apenas às distâncias entre vértices. O estudo dessa noção amplia a compreensão da centralidade em redes e estabelece um importante ponte conceitual entre os problemas de localização baseados em excentricidade e aqueles fundamentados na otimização de custos globais.

2.3 Centroide em Grafos

Embora o conceito de centro desempenhe papel fundamental na teoria da centralidade, ele não é a única forma de identificar vértices estrategicamente posicionados em uma rede. Em determinadas aplicações, o interesse não está em minimizar distâncias, mas sim em encontrar vértices que promovam um equilíbrio estrutural da rede. Essa motivação conduz ao conceito de centroide, introduzido originalmente por Camille Jordan em seus estudos sobre árvores.

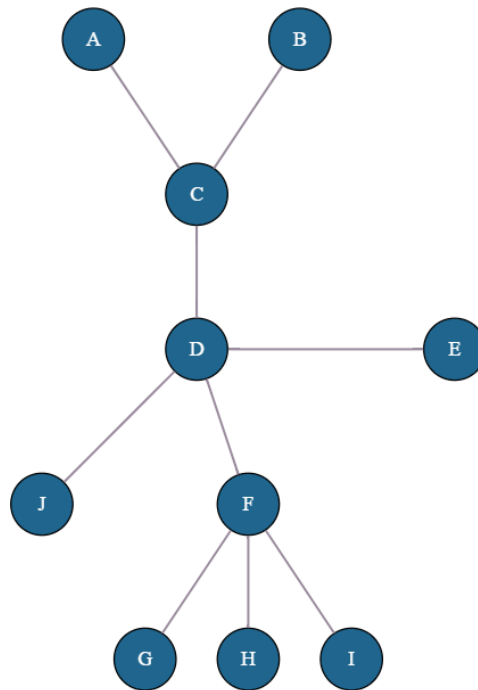
Enquanto o centro é definido a partir da excentricidade dos vértices, o centroide está relacionado ao balanceamento da estrutura do grafo. Em árvores, o centroide corresponde ao vértice cuja remoção produz componentes conexas tão equilibradas quanto possível, evitando a formação de subestruturas excessivamente grandes.

2.3.1 Centroides em Árvores

Seja (T) uma árvore. A remoção de um vértice (v) particiona a árvore em várias componentes conexas. O peso de (v) é definido como o número de arestas da maior componente resultante após sua remoção.

Um vértice (v) é denominado vértice centroide se possui peso mínimo dentre todos os vértices da árvore. O conjunto de todos os vértices centroides é denominado centroide da árvore e será denotado por $(Ct(T))$.

Figura 10 - Árvore T para Centroide



Fonte: devtoolsdaily.com

Calculamos o peso para cada nó não-terminal (nós que não são folhas).

1. Peso(C):

Se removermos C, teremos 3 componentes: {A}, {B} e o resto da árvore {D,E,F,G,H,I,J}. Número de arestas em cada componente: 0 (para A), 0 (para B), 6 (para o resto). O maior valor é 6. Portanto, $\text{Peso}(C) = 6$.

2. Peso(D):

Se removermos D, teremos 4 componentes: a sub-árvore de C {A,B,C}, o nó {E}, o nó {J}, e a sub-árvore de F {F,G,H,I}. Número de arestas: 2 (em {A,B,C}), 0 (em {E}), 0 (em {J}), 3 (em {F,G,H,I}). O maior valor é 3. Portanto, $\text{Peso}(D) = 3$.

3. Peso(F):

Se removermos F, teremos 4 componentes: {G}, {H}, {I}, e o resto da árvore {A,B,C,D,E,J}. Número de arestas: 0 (em G), 0 (em H), 0 (em I), 5 (no resto). O maior valor é 5. Portanto, $\text{Peso}(F) = 5$.

Resumo dos Pesos:

- $\text{Peso}(C) = 6$
- $\text{Peso}(D) = 3$
- $\text{Peso}(F) = 5$

O centroide da árvore é o conjunto de nós com o peso mínimo. O peso mínimo calculado é

3. $\text{Ct}(T) = \{D\}$

O nó D é o nó centroide porque minimiza o tamanho da maior sub-árvore resultante após sua remoção. Ele é o nó mais "central" em termos de balanceamento da "massa" (número de arestas/nós) da árvore. Isso exemplifica o Teorema 3 de Jordan, que afirma que o centroide de uma árvore consiste em um ou dois nós adjacentes. No nosso caso, é apenas um nó.

Teorema 3 (Jordan). Toda árvore possui um centroide constituído por um único vértice ou por dois vértices adjacentes.

Esse resultado apresenta forte semelhança com o Teorema 1 de Jordan para centros de árvores. Entretanto, embora ambas as estruturas possam possuir um ou dois vértices, centro e centroide são definidos por critérios distintos e não coincidem necessariamente.

Figura 11 - Árvore bicentral para Centroide



Fonte: devtoolsdaily.com

Para exemplificar a ocorrência de um centroide composto por dois vértices, analisa-se um P_4 (Figura 11). Ao testar a remoção isolada dos vértices, 2 ou 5, a estrutura remanescente resulta em uma única componente conexa, $\{3, 4, 5\}$ ou $\{2, 3, 4\}$, respectivamente. Por outro lado, a remoção do vértice interno 3 gera duas componentes conexas, $\{2\}$ e $\{4, 5\}$, logo peso de 3 é 1. De maneira análoga, a exclusão de 4 particiona a árvore nos subconjuntos $\{2, 3\}$ e $\{5\}$, logo peso de 4 também é 1. Como a eliminação de 3 ou de 4 minimiza o tamanho da maior componente conexa restante, conclui-se que o centroide da estrutura é composto pelo conjunto $\{3, 4\}$.

2.4 Mediana

Na teoria dos grafos e na análise de redes espaciais, o estudo de centralidade busca identificar os vértices de maior importância topológica. Enquanto o conceito de "centro" de um grafo foca na minimização do pior caso (minimizando a distância máxima ou excentricidade), o conceito de mediana atua na otimização do caso médio ou do custo total do sistema.

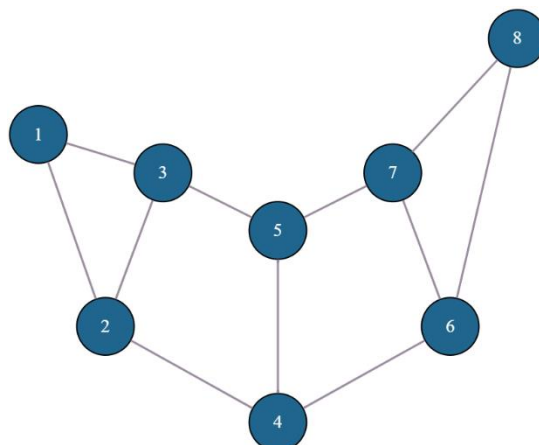
Matematicamente, seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas. A distância $d(u, v)$ entre dois vértices u e v é definida como o comprimento do caminho mínimo entre eles (ou a soma dos pesos das arestas desse caminho, em grafos ponderados).

O status (ou peso da distância total) de um vértice $u \in V$, denotado por $s(u)$, é a soma das distâncias de u para todos os outros vértices do grafo:

$$s(u) = \sum_{v \in V} d(u, v)$$

A mediana de um grafo G , denotada por $M(G)$, é definida como o subconjunto de vértices que minimizam a função de status $s(u)$. Ou seja, um vértice u pertence à mediana se, e somente se, o seu somatório de distâncias para o restante da rede for o menor possível.

Figura 12 - Grafo Mediana.



Fonte: devtoolsdaily.com

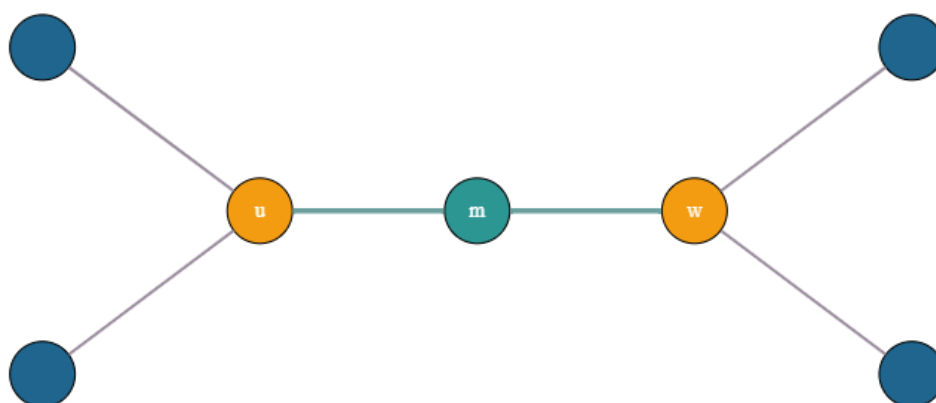
Para exemplificar a determinação da mediana em um grafo geral, analisa-se o grafo apresentado na Figura 12. A mediana é definida pelo conjunto de vértices que minimiza o somatório das distâncias de seus caminhos mínimos para todos os demais nós da rede, métrica denotada por $s(u)$. Ao calcular essas distâncias a partir de cada elemento, obtêm-se os seguintes somatórios: $s(1)=16$, $s(2)=13$, $s(3)=13$, $s(4)=11$, $s(5)=11$, $s(6)=13$, $s(7)=13$ e $s(8)=16$. Nota-se que os vértices 4 e 5 apresentam o menor custo total de alcance na estrutura (ambos com soma igual a 11), configurando os pontos de maior centralidade em termos de proximidade global. Conclui-se, portanto, que a mediana do grafo é composta pelo conjunto $M(G) = \{4, 5\}$.

2.4.1 Mediana em Árvores

A identificação da mediana ganha contornos analíticos precisos quando o grafo em questão é restrito à classe das árvores. Um teorema clássico, derivado dos estudos de Camille Jordan (1869) sobre a topologia de árvores, estabelece a base estrutural para esses vértices:

Teorema 4 (Estrutura da Mediana - Jordan): A mediana de qualquer árvore consiste sempre em um único vértice ou em dois vértices que são adjacentes.

Figura 13 - Árvore de mediana



Fonte: devtoolsdaily.com

Se uma árvore possuísse duas medianas não adjacentes, qualquer vértice localizado no caminho mínimo entre essas duas medianas obrigatoriamente possuiria uma soma de distâncias estritamente menor do que as extremidades, o que entra em contradição com a definição de que as extremidades são as medianas, como mostrado na figura 13.

2.4.2 Aplicações da Mediana

Após o desenvolvimento teórico, torna-se natural investigar como o conceito de mediana pode ser aplicado em situações reais. Diferentemente do centro, que busca minimizar a maior distância entre um vértice e os demais elementos da rede, a mediana procura minimizar a soma das distâncias, tornando-se particularmente adequada para problemas de localização de instalações e prestação de serviços.

Em problemas dessa natureza, uma região geográfica pode ser modelada por meio de um grafo ($G=(V,E)$), no qual os vértices representam locais de demanda ou possíveis locais de instalação, enquanto as arestas representam conexões entre esses pontos, podendo estar associadas a distâncias, tempos de deslocamento ou custos de transporte.

A determinação da mediana permite identificar o vértice que minimiza o custo total de deslocamento na rede, constituindo uma ferramenta importante para o planejamento de hospitais, escolas, centros de distribuição, postos de coleta seletiva, unidades de atendimento público e diversas outras instalações.

Embora a mediana determine a melhor localização para uma única instalação, muitos problemas reais exigem a implantação simultânea de múltiplas unidades de atendimento. Nesse contexto surge o Problema das p-Medianas, cujo objetivo consiste em determinar um conjunto de (p) vértices de uma rede de forma que a soma das distâncias entre cada vértice e a instalação mais próxima seja mínima.

Enquanto o problema da mediana simples admite algoritmos polinomiais para diversas classes de grafos, o problema das p-medianas apresenta dificuldade computacional significativamente maior. O número de combinações possíveis cresce rapidamente com o

tamanho da rede, tornando inviável a avaliação exaustiva de todas as soluções para instâncias de grande porte.

Por essa razão, o problema das p -medianas é classificado como NP-Difícil em grafos gerais, sendo frequentemente resolvido por meio de algoritmos heurísticos ou metaheurísticos.

A aplicação prática dos conceitos de mediana e p -mediana requer inicialmente a modelagem do problema real por meio de grafos. Nesse processo, localidades de interesse, como bairros, cidades ou pontos de demanda, são representadas por vértices, enquanto ruas, rodovias ou conexões logísticas são representadas por arestas. Dependendo da aplicação, essas arestas podem receber pesos associados à distância, ao tempo de deslocamento ou ao custo de transporte.

Uma vez construída a representação em grafo, torna-se necessário determinar uma estratégia computacional capaz de identificar as melhores localizações para as instalações consideradas. A escolha dessa estratégia depende diretamente do porte e da complexidade da rede analisada.

Em problemas de pequena escala, algoritmos exatos podem ser empregados para garantir a obtenção da solução ótima. Esses métodos exploram sistematicamente o espaço de soluções e asseguram que a configuração encontrada seja a melhor possível segundo a função objetivo adotada. Entretanto, à medida que o número de vértices e de possíveis localizações aumenta, o custo computacional desses métodos cresce rapidamente.

Em problemas de grande escala, como redes estaduais ou nacionais de transporte, a utilização de algoritmos exatos pode tornar-se inviável devido à explosão combinatória associada ao número de soluções possíveis. Nesses casos, torna-se necessário recorrer a métodos heurísticos e metaheurísticos, capazes de produzir soluções de elevada qualidade em tempos computacionais reduzidos.

De modo geral, heurísticas operam por meio de processos iterativos de melhoria, nos quais soluções iniciais são sucessivamente modificadas na tentativa de reduzir o valor da função objetivo. Um exemplo clássico é o algoritmo de substituição, no qual uma instalação é removida de uma determinada localização e transferida para outra posição da rede. Caso a alteração produza uma redução no custo total de atendimento, a nova configuração é mantida; caso contrário, outra alternativa é testada.

Essa abordagem tem sido amplamente utilizada em problemas de localização de instalações, permitindo que soluções próximas da ótima sejam obtidas mesmo em redes de grande porte. Dessa forma, a escolha do método de resolução representa um compromisso entre precisão matemática e viabilidade computacional, aspecto fundamental em aplicações reais do problema das p -medianas.

Um exemplo clássico de aplicação do problema das medianas ocorre na definição da localização de Postos de Entrega Voluntária (PEVs) para coleta de resíduos recicláveis. Em estudos realizados na cidade de Passo Fundo (RS), cruzamentos e vias urbanas foram modelados como grafos, permitindo identificar os locais mais adequados para a instalação dos pontos de coleta. O objetivo consistia em minimizar a distância percorrida pelos

moradores até os PEVs, incentivando a participação da população em programas de reciclagem.

Modelos mais avançados incorporaram ainda a existência de pontos de coleta previamente instalados, buscando evitar sobreposição de áreas de atendimento e reduzindo custos de implantação.

Outra aplicação importante ocorre na definição da localização de Unidades Básicas de Saúde (UBS). Nesse tipo de problema, os vértices representam bairros ou regiões urbanas e podem receber pesos proporcionais à população ou à demanda por serviços médicos. O objetivo consiste em minimizar a distância total percorrida pelos usuários até a unidade de atendimento mais próxima. Além da distância, modelos mais realistas incorporam restrições de capacidade, limitando o número de pacientes que podem ser atendidos por cada unidade de saúde.

Problemas semelhantes surgem na definição da localização de escolas, universidades e institutos federais. Em estudos realizados no estado de Santa Catarina, municípios foram representados como vértices e as rodovias como arestas ponderadas por distâncias ou tempos de viagem. O objetivo consistia em identificar localidades capazes de reduzir o deslocamento médio dos estudantes. Devido ao grande número de municípios e possibilidades de escolha, métodos heurísticos foram empregados para encontrar soluções próximas da ótima em tempo computacional viável.

O estudo da mediana em grafos demonstra como conceitos abstratos da Teoria dos Grafos podem ser empregados na modelagem e solução de problemas reais de localização e planejamento. A representação de sistemas geográficos, logísticos e urbanos por meio de grafos permite transformar situações complexas em estruturas matemáticas passíveis de análise computacional, possibilitando a identificação de locais estrategicamente posicionados para a instalação de serviços e equipamentos.

Nesse contexto, a mediana destaca-se como uma importante medida de centralidade, uma vez que busca minimizar a soma das distâncias entre um vértice e os demais elementos da rede. Essa característica a torna particularmente adequada para aplicações em que o objetivo é reduzir custos médios de deslocamento ou ampliar a acessibilidade dos usuários a determinados serviços. A generalização desse conceito conduz ao Problema das p -Medianas, no qual se busca determinar múltiplas instalações capazes de atender uma rede de forma eficiente.

As aplicações apresentadas neste capítulo evidenciam a versatilidade dessa abordagem. Em sistemas de coleta seletiva, a determinação das medianas permite posicionar pontos de entrega voluntária de modo a reduzir os deslocamentos da população. Na área da saúde pública, a localização de unidades básicas de saúde pode ser otimizada considerando simultaneamente distâncias e demandas populacionais. Em planejamento educacional, a utilização de modelos de p -medianas auxilia na definição de locais para implantação de escolas e instituições de ensino, buscando minimizar o deslocamento dos estudantes.

Entretanto, à medida que a dimensão do problema aumenta, especialmente nos modelos de p -medianas, surge uma significativa dificuldade computacional decorrente do crescimento combinatório do número de soluções possíveis. Essa característica explica a ampla utilização de métodos heurísticos e metaheurísticos em aplicações reais. Em vez de

procurar exaustivamente a solução ótima, essas abordagens buscam soluções de elevada qualidade em tempos computacionais viáveis, tornando possível a análise de redes com milhares de vértices e múltiplas instalações.

Por fim, observa-se que a integração entre modelagem em grafos, algoritmos de caminhos mínimos, técnicas de otimização e ferramentas computacionais especializadas constitui um dos principais pilares dos modernos sistemas de apoio à decisão. Dessa forma, a teoria da mediana e das p-medianas não apenas amplia a compreensão matemática da centralidade em grafos, mas também fornece instrumentos concretos para o planejamento de infraestrutura, a gestão de recursos públicos e a tomada de decisões em problemas complexos de localização.

3 COMPARAÇÃO ENTRE CENTRO, CENTROIDE E MEDIANA EM GRAFOS

O estudo da centralidade em grafos busca identificar vértices que ocupam posições estratégicas dentro de uma rede. Entretanto, diferentes critérios podem ser utilizados para definir o que significa ser "central". Dependendo do problema considerado, pode ser desejável minimizar a maior distância até os demais vértices, equilibrar a estrutura da rede ou reduzir o custo total de deslocamento. Nesse contexto, surgem os conceitos de centro, centroide e mediana.

Embora esses conceitos sejam frequentemente associados à ideia de centralidade, cada um deles é fundamentado em uma métrica distinta e conduz a soluções diferentes para um mesmo problema. Compreender suas diferenças é fundamental para a correta modelagem de problemas de localização, logística, transporte e análise de redes.

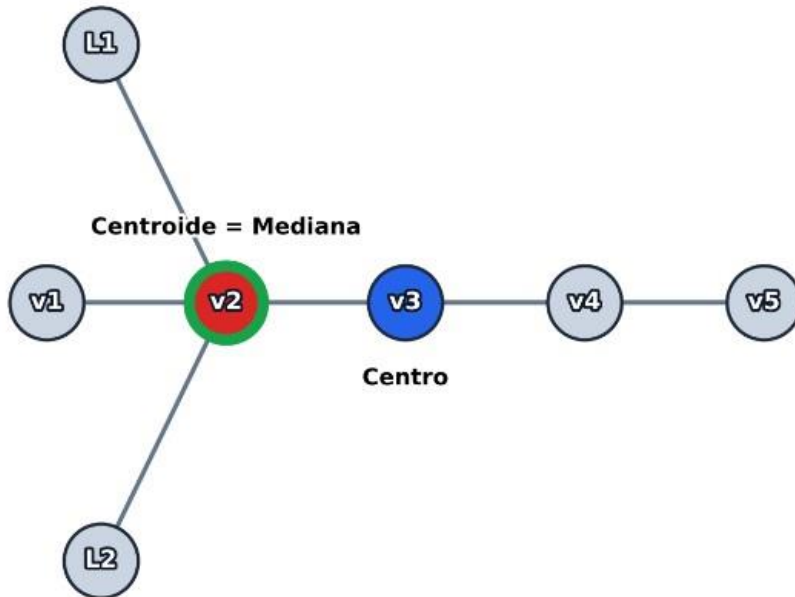
O centro de um grafo é definido como o conjunto dos vértices que minimizam a excentricidade. Em outras palavras, um vértice central é aquele cuja maior distância para os demais vértices é a menor possível. Assim, o centro procura minimizar o pior caso de deslocamento dentro da rede. Esse conceito é especialmente útil em problemas nos quais o tempo máximo de atendimento é o fator mais importante, como a localização de hospitais, quartéis de bombeiros, centrais de emergência e serviços de resgate, problemas nos quais o objetivo é garantir que nenhum ponto da rede esteja excessivamente distante da instalação escolhida.

O centroide representa um ponto de equilíbrio estrutural da rede. Enquanto o centro está relacionado às distâncias máximas, o centroide está associado à distribuição estrutural dos vértices e ao balanceamento da rede. Problemas de decomposição de grafos, particionamento de redes, processamento distribuído e algoritmos de divisão e conquista frequentemente utilizam o conceito de centroide.

A mediana baseia-se na minimização da soma total das distâncias. A mediana é o conjunto dos vértices que minimizam essa quantidade. Diferentemente do centro, que procura minimizar a pior distância possível, a mediana busca minimizar o custo médio ou total de deslocamento na rede. Esse conceito é amplamente empregado em problemas de localização de instalações, centros de distribuição, unidades de saúde, escolas, postos de coleta e planejamento logístico.

Apesar de representarem diferentes formas de centralidade, os conceitos de centro, centroide e mediana podem eventualmente coincidir em determinadas estruturas. Entretanto, em grafos gerais, não há garantia de que os vértices pertencentes ao centro, ao centroide e à mediana sejam os mesmos.

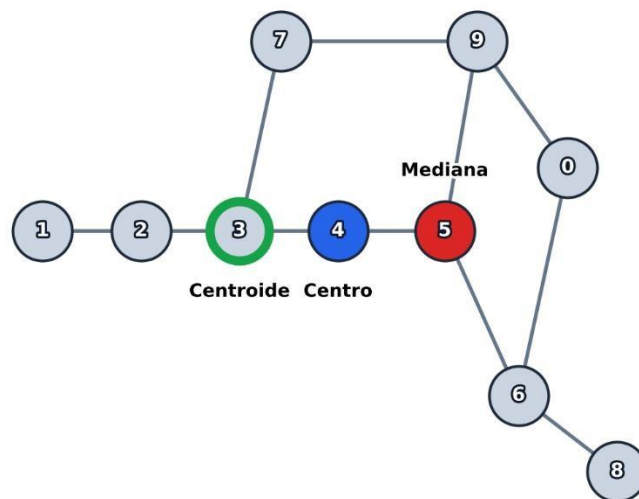
Figura 14 - Árvore C. C.M. diferente



Fonte: devtoolsdaily.com

A Figura 14 apresenta uma topologia em árvore onde os conceitos se manifestam de forma parcialmente distinta. Pelo Teorema 4, sabe-se que em qualquer árvore o centroide e a mediana sempre coincidem, o que é visualmente confirmado pela alocação de ambos no vértice **v2**, o ponto que minimiza tanto o peso dos ramos quanto o somatório das distâncias. No entanto, o centro da árvore, responsável por minimizar a excentricidade máxima, localiza-se no vértice **v3**. Esse exemplo corrobora que, mesmo em grafos acíclicos conexos, o ponto de equilíbrio estrutural (centroide/mediana) não necessariamente é a mesma posição geométrica de alcance máximo (centro).

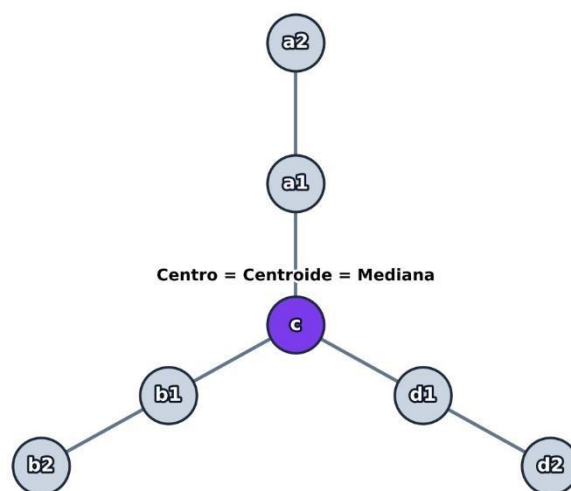
Figura 15 - Grafo C. C. M diferente



Fonte: devtoolsdaily.com

A divergência entre as métricas pode ser ilustrado na Figura 15. A introdução de ciclos na topologia elimina a garantia de coincidência prevista pelo Teorema de Jordan. Nesse cenário, observa-se uma separação completa dos três papéis: o vértice 3 atua como centroide (minimizando o peso das componentes remanescentes), o vértice 4 estabelece-se como o centro (minimizando a excentricidade), e o vértice 5 configura-se como a mediana (minimizando as distâncias globais). Esta estrutura prova empiricamente que, na ausência de restrições topológicas estritas, as três definições de centralidade podem recair sobre vértices mutuamente exclusivos.

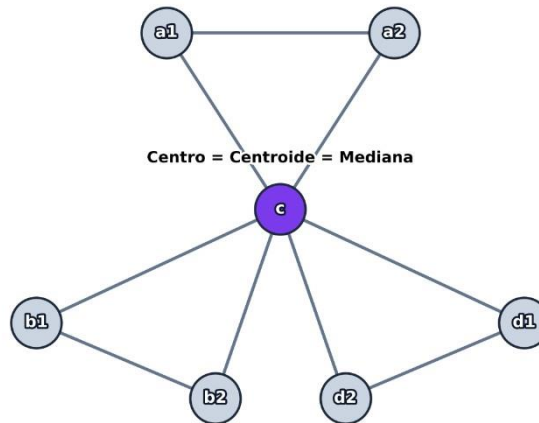
Figura 16 - Árvore C. C.M.



Fonte: devtoolsdaily.com

Por outro lado, existem condições estruturais específicas que forçam a convergência das três métricas, sendo a simetria o fator predominante. A Figura 16 demonstra uma árvore estritamente simétrica em relação a um núcleo central. Devido à distribuição perfeitamente balanceada de seus ramos, o vértice *c* minimiza simultaneamente a excentricidade máxima, o somatório das distâncias e o peso dos subgrafos. Consequentemente, o centro, o centroide e a mediana colapsam em um único vértice.

Figura 17 - Grafo C. C. M



Fonte: devtoolsdaily.com

Esse comportamento convergente não é exclusividade das árvores, podendo se manifestar também em grafos com ciclos, desde que haja um elevado grau de simetria radial. A Figura 17, que exibe uma topologia semelhante a um grafo da amizade (*friendship graph*), exemplifica esse caso. A estrutura é formada por triângulos que compartilham exclusivamente o vértice *c*. Devido a essa simetria e à centralização absoluta das adjacências, o vértice *c* concentra todos os três papéis simultaneamente, demonstrando que a topologia e o balanceamento do grafo são os determinantes finais para a coincidência ou divergência dessas propriedades centrais.

Observa-se que cada medida responde a perguntas diferentes:

- O centro responde: "Qual vértice minimiza a pior distância possível?"
- O centroide responde: "Qual vértice equilibra melhor a estrutura da rede?"
- A mediana responde: "Qual vértice minimiza o custo total de deslocamento?"

Portanto, a escolha da medida adequada depende diretamente dos objetivos do problema estudado.

4 CONCLUSÃO

A Teoria dos Grafos oferece um conjunto poderoso de ferramentas para a modelagem e análise de redes, permitindo representar matematicamente problemas presentes em áreas tão diversas quanto transporte, logística, telecomunicações, planejamento urbano, saúde

pública e sistemas de distribuição. Entre os diversos conceitos desenvolvidos nessa área, as medidas de centralidade ocupam posição de destaque por possibilitarem a identificação de vértices estrategicamente posicionados dentro de uma rede.

Neste trabalho foi realizado um estudo bibliográfico sobre diferentes abordagens de centralidade em grafos, com ênfase nos conceitos de centro, centroide e mediana. Inicialmente, foram revisados conceitos fundamentais relacionados à distância, excentricidade, raio e diâmetro, que constituem a base métrica para a compreensão dos problemas de localização em redes.

A partir desses fundamentos, foi apresentada a teoria do centro em grafos, destacando-se resultados clássicos como o Teorema de Jordan para árvores e propriedades estruturais do centro em grafos conexos. Observou-se que o centro está associado à minimização da distância máxima entre um vértice e os demais elementos da rede, sendo particularmente adequado para aplicações em que o pior caso deve ser controlado, como em sistemas de atendimento de emergência.

Em seguida, foi estudado o conceito de centroide, que introduz uma perspectiva estrutural para a centralidade. Diferentemente do centro, o centroide não está diretamente relacionado às distâncias, mas ao balanceamento da estrutura do grafo. Essa abordagem mostrou que diferentes critérios de centralidade podem conduzir a soluções distintas para uma mesma rede, evidenciando a riqueza e a diversidade dos problemas de localização em grafos.

O conceito de mediana constituiu o eixo central deste trabalho. Foi mostrado que a mediana busca minimizar a soma das distâncias entre um vértice e os demais elementos da rede, representando uma medida particularmente adequada para problemas de localização de instalações, nos quais se deseja reduzir custos médios ou totais de deslocamento.

O estudo foi então ampliado para o Problema das p-Mediana, uma generalização natural da mediana para situações em que múltiplas instalações devem ser posicionadas simultaneamente. Foram analisadas aplicações em coleta seletiva de resíduos, localização de unidades de saúde e planejamento de instituições de ensino, evidenciando a relevância prática desses modelos para a tomada de decisão em problemas reais de infraestrutura e serviços públicos.

Do ponto de vista computacional, verificou-se que a determinação de uma única mediana pode ser realizada em tempo polinomial por meio de algoritmos clássicos de caminhos mínimo. Entretanto, a generalização para o problema das p-mediana introduz um crescimento combinatório significativo do espaço de soluções, caracterizando um problema NP-difícil. Como consequência, aplicações de grande porte frequentemente exigem a utilização de heurísticas, metaheurísticas e ferramentas especializadas de otimização.

Por fim, conclui-se que os conceitos de centro, centroide e mediana representam diferentes interpretações da noção de centralidade em redes. Enquanto o centro procura minimizar a maior distância, o centroide busca equilibrar a estrutura da rede e a mediana minimiza o custo total de deslocamento. A compreensão dessas diferentes perspectivas contribui para uma visão mais ampla dos problemas de localização em grafos e demonstra como conceitos matemáticos aparentemente abstratos podem fornecer soluções concretas para desafios encontrados na sociedade contemporânea.

Como perspectivas para trabalhos futuros, sugere-se o aprofundamento do estudo de algoritmos para problemas de localização, a implementação computacional de modelos de p-medianas em redes reais e a investigação de outras medidas de centralidade, como centralidade de intermediação, centralidade de autovetor e centralidade de proximidade, ampliando ainda mais as possibilidades de aplicação da Teoria dos Grafos em problemas práticos.

REFERÊNCIAS

- BARÃO, F. R.; KRIPKA, M.; KRIPKA, R. M. L. Determinação da localização ótima de postos de entrega voluntária para coleta seletiva na região central do município de Passo Fundo - RS. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 41., 2009, Porto Seguro. Anais [...]. Porto Seguro: SOBRAPO, 2009.
- BUCKLEY, F.; HARARY, F. Distance in Graphs. Redwood City: Addison-Wesley, 1990.
- BUCKLEY, F.; MILLER, Z.; SLATER, P. J. On graphs containing a given graph as center. Journal of Graph Theory, Hoboken, v. 5, n. 4, p. 427-434, 1981.
- CALACHE, L. D. D. R.; CAMARGO, V. C. B. Proposta de um método de localização e alocação de pontos de coleta seletiva. Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, Rio de Janeiro, v. 8, n. 2, p. 137-162, 2016.
- DIESTEL, R. Graph Theory. 5. ed. Berlin: Springer, 2017.
- GOMES, L. F. B. et al. Centralidade de grafos aplicada a projetos de energia renovável. MIX Sustentável, Florianópolis, v. 6, n. 4, p. 105-114, 2020.
- GOUDARD, B.; OLIVEIRA, F. H.; GERENTE, J. Avaliação de modelos de localização para análise da distribuição espacial de Unidades Básicas de Saúde. Revista Brasileira de Cartografia, Rio de Janeiro, v. 67, n. 1, p. 15-34, 2015.
- HU, Y.; ZHAN, X. Possible cardinalities of the center of a graph. Discrete Mathematics, Amsterdam, v. 345, n. 12, 2022.
- JORDAN, C. Sur les assemblages de lignes. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, v. 70, p. 185-190, 1869.
- KLAVŽAR, S.; NARAYANKAR, K. P.; WALIKAR, H. B. Almost self-centered graphs. Ars Combinatoria, Winnipeg, v. 52, p. 99-111, 1999.
- MARTINS, D. L. Identificação de presença de grupos em grafos por níveis de distribuição de grau de centralidade. Revista de Tecnologia da Informação e Comunicação, v. 2, n. 2, 2012.
- OLIVEIRA, B. F. et al. Fontes de informação para inovação da indústria brasileira: uma análise a partir de medidas de centralidade de grafos. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA INDUSTRIAL E INOVAÇÃO, 4., 2019, Campinas. Anais [...]. Campinas: Blucher, 2019.
- OLIVEIRA, G. P. et al. Grafos conexos e centralidade de intermediação: uma aplicação à modelagem de poços multilaterais em reservatórios petrolíferos. Comunicações em Informática, v. 2, n. 1, p. 1-4, 2018.
- RANDIĆ, M. On the centrality of vertices of molecular graphs. Journal of Mathematical Chemistry, Dordrecht, v. 29, n. 4, p. 345-357, 2001.

SILVA, S. A.; KONRATH, A. C.; BORNIA, A. C. Otimização utilizando a heurística das pmedianas para identificar locais para instalação de Institutos Federais no Estado de Santa Catarina. *Exacta*, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 150-165, 2021.

WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.