

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

ESCOLA POLITÉCNICA E DE ARTES

GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



VERIFICAÇÃO DE PILARES NO ELU SUBMETIDOS

À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

RAFAEL CARNEIRO NAVES

GOIÂNIA

2025

RAFAEL CARNEIRO NAVES

**VERIFICAÇÃO DE PILARES NO ELU SUBMETIDOS
À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**

Trabalho de Conclusão de Curso II, na modalidade “produto”, apresentado à Escola Politécnica e de Artes, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador:

Prof. Me. Alberto Vilela Chaer

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manoel da Silva Álvares

Prof. Me. Murilo Meiron de Pádua Soares

GOIÂNIA

2025

RAFAEL CARNEIRO NAVES

**VERIFICAÇÃO DE PILARES NO ELU SUBMETIDOS
À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**

Monografia defendida e aprovada em 02 de novembro de 2025 pela banca examinadora a seguir:

Orientador: Prof. Me. Alberto Vilela Chaer

Prof. Dr. Manoel da Silva Álvares

Prof. Me. Murilo Meiron de Pádua Soares

GOIÂNIA

2025

RESUMO

Na grande maioria dos casos, os pilares apresentam solicitação de Flexão Composta Oblíqua. Raramente temos situação em Flexão Composta Reta. Um pilar tem suas dimensões definidas e, considerando a situação em Flexão Composta Oblíqua, para cada distribuição de armadura longitudinal, a partir de um determinado esforço normal (N_d), tem-se o par de momentos resistentes máximos em Flexão Composta Reta em torno de cada eixo, M_{Rdx} e M_{Rdy} , que servem de base para se esquematizar a elipse resistente em Flexão Composta Oblíqua. A verificação de um pilar no Estado Limite Último submetido a Flexão Composta Oblíqua é feita plotando o par ordenado (M_{dx} , M_{dy}) no gráfico correspondente à elipse resistente do pilar. Para que o pilar resista à solicitação (M_{dx} , M_{dy}), este par ordenado deverá estar no interior ou, no limite da linha que representa a elipse resistente. Este trabalho escreveu um memorial de cálculo e implementou, em planilha de cálculo, os passos para a geração dos ábacos de Flexão Composta Reta para uma determinada seção transversal e uma distribuição de armadura longitudinal. Com estes ábacos relativos à Flexão Composta Reta traçados e, tendo o esforço normal (N_d) da solicitação, obtém-se os momentos resistentes máximos em torno de cada eixo (x e y). Com os momentos resistentes máximos, traça-se a elipse resistente, que será referência para classificar se a seção transversal resiste ou não à solicitação considerada. O intuito é de que a planilha seja utilizada para o autoaprendizado do assunto.

Palavras-Chave: Concreto armado. Seção retangular. Flexão Composta Reta. Ábacos de Interação. Flexão Composta Oblíqua. Elipse Resistente Autoaprendizado.

ABSTRACT

In most cases, columns are subjected to biaxial bending with axial load (oblique combined bending). Situations involving uniaxial combined bending are relatively rare. Once the column dimensions are defined, and considering the case of oblique combined bending, for each distribution of longitudinal reinforcement and a given axial load (N_d), the pair of maximum resistant moments in uniaxial combined bending around each axis, M_{Rdx} and M_{Rdy} , can be determined. These values serve as the basis for constructing the resistant ellipse in oblique combined bending. The verification of a column at the Ultimate Limit State under oblique combined bending is performed by plotting the ordered pair (M_{dx} , M_{dy}) on the graph corresponding to the column's resistant ellipse. For the column to withstand the applied loads (M_{dx} , M_{dy}), this point must lie inside or on the boundary of the ellipse.

This study developed a calculation memorandum and implemented, in a spreadsheet, the steps required to generate interaction diagrams for uniaxial combined bending for a given cross-section and longitudinal reinforcement distribution. With these diagrams plotted and the axial load (N_d) defined, the maximum resistant moments around each axis (x and y) are obtained. Using these maximum resistant moments, the resistant ellipse is drawn, which serves as the reference to classify whether the cross-section can resist the considered loading. The spreadsheet is intended to be used as a tool for self-learning on the subject.

Keywords: Reinforced concrete; Rectangular section; Uniaxial combined bending; Interaction diagrams; Biaxial combined bending; Resistant ellipse; Self-learning.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	7
2	OBJETIVOS	8
2.1	OBJETIVOS GERAIS.....	8
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	8
3	JUSTIFICATIVA	9
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	10
4.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
4.1.1	<i>Seções transversais em Flexão Composta Reta</i>	<i>10</i>
4.1.2	<i>Domínios de deformação para elementos lineares submetidos a solicitações normais..</i>	<i>10</i>
4.1.3	<i>Aspecto geral do ábaco de interação Nd x Md em FCR.....</i>	<i>12</i>
4.1.4	<i>Diagrama tensão-deformação do concreto.....</i>	<i>13</i>
4.1.5	<i>Diagrama tensão-deformação do aço.....</i>	<i>14</i>
4.1.6	<i>Seções transversais em Flexão Composta Oblíqua</i>	<i>15</i>
4.2	MÉTODOS.....	17
4.2.1	<i>Seção retangular com distribuição prévia de armadura longitudinal.....</i>	<i>17</i>
4.2.2	<i>Determinação do par Nd x Md na Flexão Composta Reta</i>	<i>17</i>
4.2.3	<i>Determinação do par Nd x Md na Reta “a” (início do Domínio 1).....</i>	<i>18</i>
4.2.4	<i>Deformada qualquer pertencente ao Domínio 1</i>	<i>19</i>
	<i>Seja uma deformada genérica pertencente ao Domínio 1, Figura 8.....</i>	<i>19</i>
4.2.5	<i>Deformada qualquer pertencente aos Domínio 2, 3 e 4</i>	<i>20</i>
4.2.6	<i>Deformada qualquer pertencente ao Domínio 4a</i>	<i>22</i>
4.2.7	<i>Deformada qualquer pertencente ao Domínio 5</i>	<i>24</i>
4.2.8	<i>Determinação do par Nd x Md na Reta “b” (final do Domínio 5)</i>	<i>25</i>
4.2.9	<i>Profundidade efetivamente comprimida para deformada qualquer pertencente aos Domínio 2, 3, 4, 4a e 5.....</i>	<i>26</i>
4.2.10	<i>Sequência para determinação do par (Nd;Md) do ábaco de interação em Flexão Composta Reta para qualquer deformada pertencente aos Domínios de Deformação.....</i>	<i>26</i>
4.2.11	<i>Sequência para geração da elipse resistente (FCO)</i>	<i>28</i>
4.2.12	<i>Sequência para geração da elipse de Momento Mínimo</i>	<i>29</i>
5	RESULTADOS OBTIDOS.....	31
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
7	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	33
	REFERÊNCIAS	34

1 INTRODUÇÃO

Uma seção transversal submetida à Flexão Composta (Flexo-Tração ou Flexo-Compressão) nos Estados Limites Últimos apresenta, em Flexão Composta Reta um acoplamento entre o Esforço Normal e o Momento Fletor, representado pelas curvas de interação ou ábacos de interação, a partir de determinada distribuição de armadura longitudinal e área da seção. Segundo as condições de ruptura, representadas pelos Domínios de Deformação, para cada deformada pertencente a qualquer Domínio de Deformação, há um par de esforços resistentes últimos em Flexão Composta Reta (N_d , M_d) - FCR, de acordo com o plano de flexão analisado.

Para a situação da seção transversal submetida à Flexão Composta Oblíqua (N_d , M_{dx} , M_{dy}) - FCO, as recomendações normativas vigentes apresentam um processo de verificação em que uma Envoltória Resistente, representada por uma elipse, é gerada tendo como limites máximos (M_{Rdx} e M_{Rdy}) obtidos por meio dos ábacos de FCR, para o Esforço Normal solicitante. A seção estará atendendo à capacidade portante, se envolver – simultaneamente – o par de esforços de Momento Fletor (M_{dx} , M_{dy}) e a Envoltória de Momento Mínimo (elipse com os Momentos Mínimos sendo seus valores limites).

O presente trabalho apresenta a fundamentação teórica para a verificação de seções transversais submetidas à FCO e o produto é uma aplicação em planilha de cálculo, para servir de material didático para o ensino-aprendizagem.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos gerais

O objetivo geral é um produto materializado em uma planilha de cálculo, com fundamentação teórica e aplicação para verificação de seções transversais submetidas à FCO.

2.2 Objetivos específicos

- Revisão bibliográfica sobre o tema;
- Aplicação em planilha de cálculo para geração de ábacos de FCR;
- Obtenção, por meio da planilha, das envoltórias resistentes de FCO;
- Análise de eficiência da capacidade resistente com relação ao esforço solicitante.

3 JUSTIFICATIVA

Este trabalho dá continuidade à trabalhos anteriores em que o orientador tem coordenado aplicações por meio de planilhas de cálculo para facilitar e dinamizar o processo ensino-aprendizagem em sala de aula, no intuito de promover e organizar uma interface mais amistosa para o usuário, o que facilita o aprendizado das etapas envolvidas na compreensão da teoria e aplicação numérica.

Para além de realizar um trabalho de síntese de determinado assunto, deixar um legado para quem for se beneficiar do produto deste trabalho é um resultado de enorme satisfação.

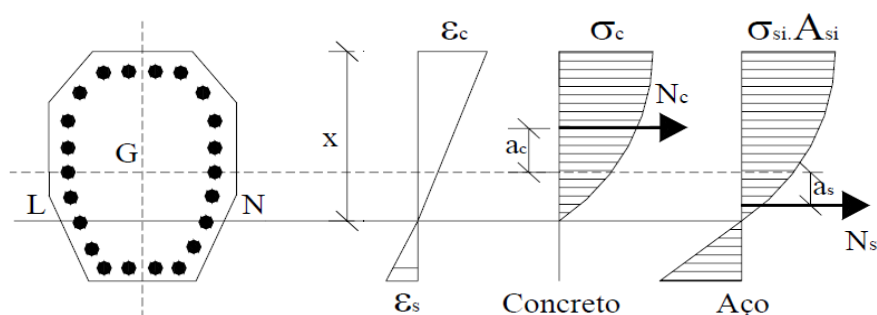
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 Revisão bibliográfica

4.1.1 Seções transversais em Flexão Composta Reta

Segundo Santos (2001), Figura 1 a seguir, temos o esquema de uma seção genérica em Flexão Composta Reta, com a resultante em compressão proporcionada pela região de concreto comprimido e a resultante das barras de armadura, que podem estar em compressão ou tração. No caso de um pilar tracionado – tirante – não haveria resultante do concreto e a resultante das barras de aço estarão em tração.

Figura 1- Seção transversal genérica em FCR



Fonte: SANTOS, 2001.

4.1.2 Domínios de deformação para elementos lineares submetidos a solicitações normais

A norma ABNT NBR 6118(2023) define os procedimentos e critérios essenciais para o projeto de estruturas de concreto. A capacidade portante refere-se, essencialmente, à segurança com relação aos Estados Limites Últimos (ruptura).

Segundo a ABNT NBR6118 (2023), as seções transversais submetidas à flexão pura e à flexão composta, apresentam o seguinte comportamento no ELU,

- Domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto. O estado limite último é caracterizado pelo escoamento do aço limitado a 10%;

O presente trabalho propõe uma subdivisão do Domínio 2 em Subdomínio 2a e Subdomínio 2b, assim caracterizados:

- Subdomínio 2a: deformada no concreto ($0 \leq \epsilon_c < \epsilon_{c2}$), cujo diagrama tensão-deformação se encontra na região parabólica;
- Subdomínio 2b: deformada no concreto ($\epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu}$), cujo diagrama tensão-deformação atinge sua tensão máxima;

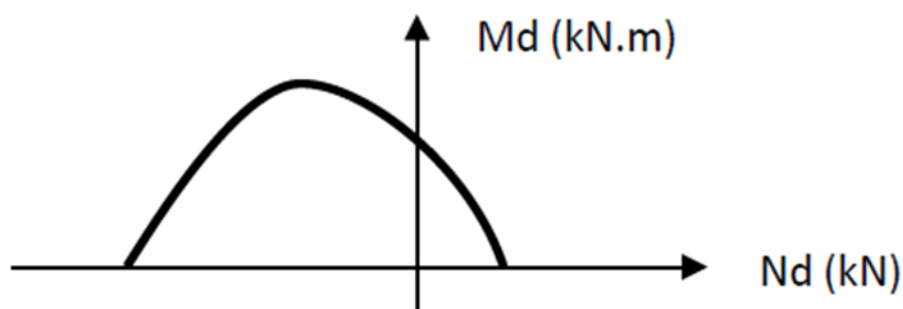
Ruptura convencional por encurtamento-limite do concreto:

- Domínio 3: flexão simples (seção sub armada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço;
- Domínio 4: flexão simples (seção super armada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\epsilon_s < \epsilon_{yd}$);
- Domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- Domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
- Reta b: compressão uniforme.

4.1.3 Aspecto geral do ábaco de interação $N_d \times M_d$ em FCR

Para uma determinada seção transversal, com armadura longitudinal fornecida, os ábacos de interação $N_d \times M_d$ (FCR) se apresentam com a seguinte característica em que os pontos que geram o gráfico são pares de esforços ($N_d; M_d$) correspondente a uma deformada pertencente aos Domínios de Deformação. Quanto mais deformadas selecionadas, maior será a precisão da função que define a curva de interação, Figura 3.

Figura 3- Aspecto geral do ábaco de interação Nd x Md (FCR)



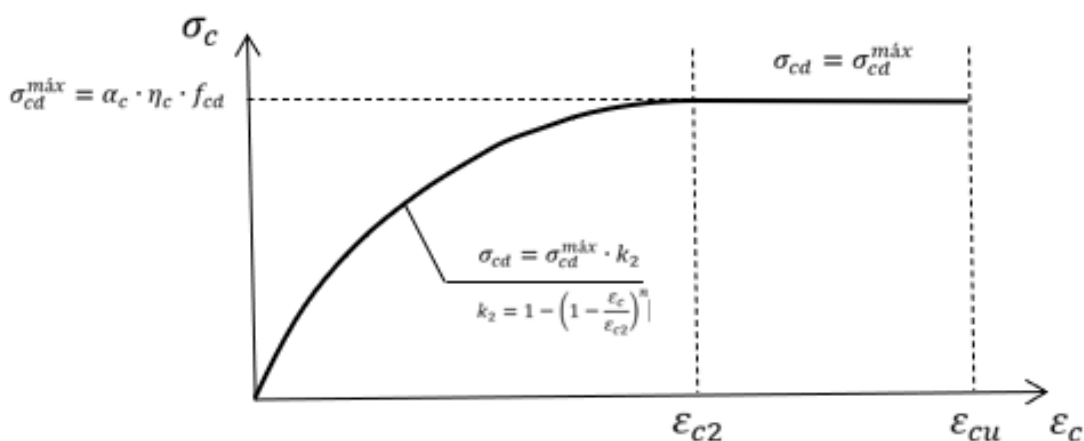
Fonte: AUTORES

Para uma distribuição de armadura duplamente simétrica, o ábaco acima terá uma parte simétrica para os correspondentes M_d girando no outro sentido.

4.1.4 Diagrama tensão-deformação do concreto

O diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto armado em compressão é apresentado pela ABNT NBR6118 (2003), adaptado segundo ALMEIDA (2024), Figura 4.

Figura 4- Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão



Fonte: ABNT NBR6118, 2023, adaptado por ALMEIDA, 2024.

Os Quadros 1 e 2, a seguir, apresentam alguns parâmetros: para a representação da relação tensão-deformação.

Quadro 1 – Parâmetros para o diagrama tensão-deformação do concreto

Classe de Concreto GRUPO I (C20 – C50)	Classe de Concreto GRUPO II (C55 – C90)
$\varepsilon_{c2} = 2 \text{ ‰}$	$\varepsilon_{c2} = 2 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$
$\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$	$\varepsilon_{cu} = 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$
$n = 2$	$n = 1,4 + 23,4 \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$
$\alpha_c = 0,85$	$\alpha_c = 0,85 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck} - 50}{200}\right)$

Fonte: ALMEIDA, 2024

A expressão de η_c é apresentada no Quadro 2.

Quadro 2 – Parâmetro η_c

Concretos C20 – C40	Concretos C45 – C90
$\eta_c = 1$	$\eta_c = \sqrt[3]{\left(\frac{40}{f_{ck}}\right)}$

Fonte: ALMEIDA, 2024

Para se determinar o valor de σ_{cd} , multiplica-se o valor de $\sigma_{cd}^{\text{máx}}$ pelo valor de k_2 , segundo o Quadro 3:

Quadro 3 – Parâmetro k_2

$k_2 = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n, \quad \text{se } 0 \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{c2}$
$k_2 = 1, \quad \text{se } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$

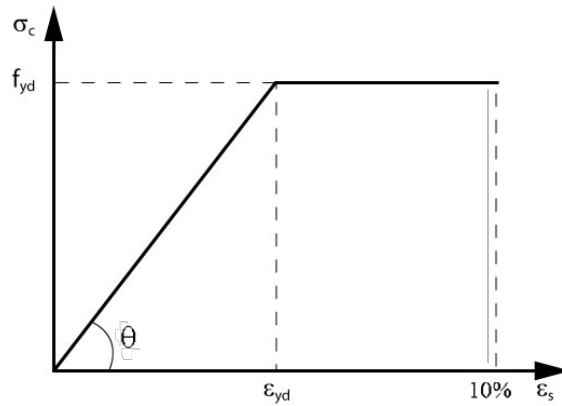
Fonte: ALMEIDA, 2024

4.1.5 Diagrama tensão-deformação do aço

É apresentado o Diagrama Tensão-Deformação idealizado pela ABNT NBR6118(2023). O diagrama se desenvolve inicialmente em um trecho inclinado, em

que é válida a lei de Hooke, com as tensões sendo inferiores à tensão de escoamento. Ao atingir a deformação de início de escoamento (ϵ_{yd}), o gráfico assume uma reta horizontal limitada a 10%, caracterizando o escoamento de referência para projeto, Figura 5.

Figura 5- Diagrama Tensão-Deformação do Aço



Fonte: ALMEIDA, 2024.

Onde:

$$\tan \theta = E_s = \frac{f_{yd}}{\epsilon_{yd}} \quad (1)$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (1)$$

Sendo f_{sd} (tensão no aço) dado por:

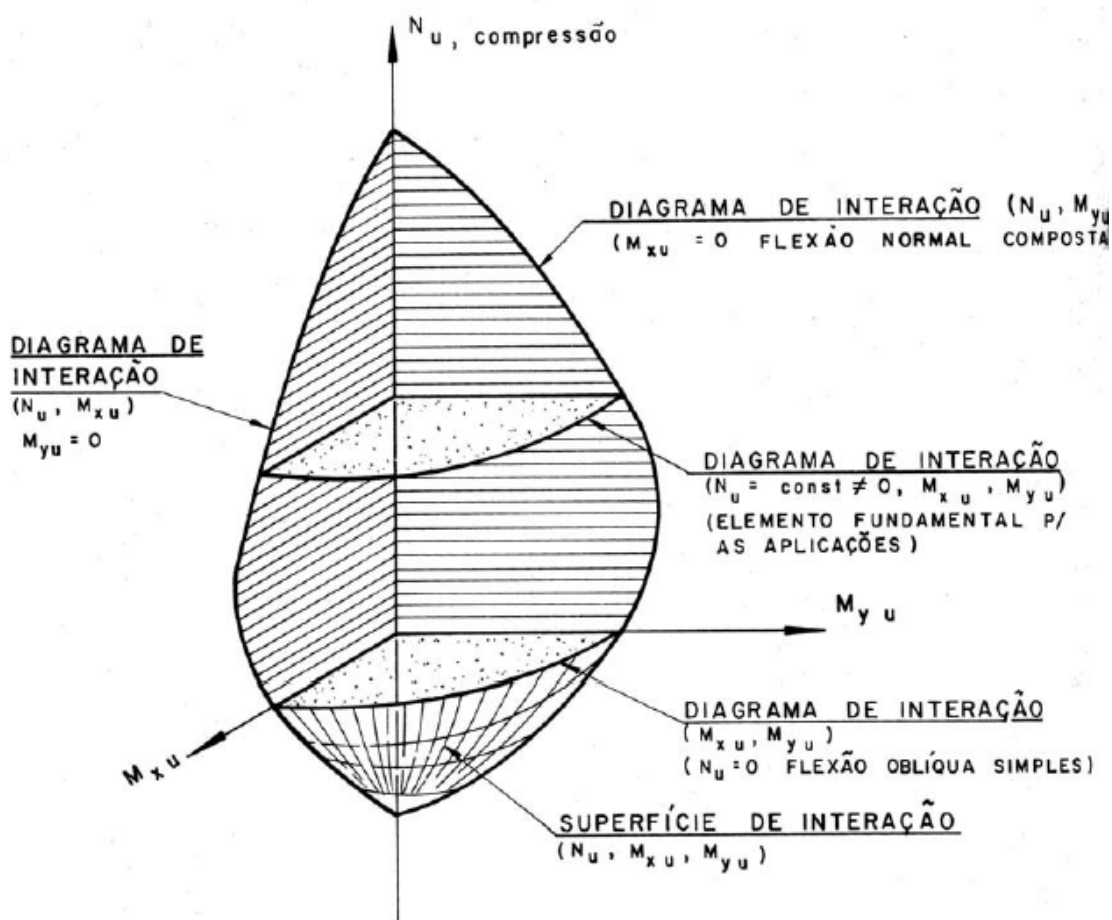
$$f_{sd} = \begin{cases} f_{yd} & \text{se } \epsilon_{yd} \leq \epsilon_s \leq 10\%_0 \\ E_s \cdot \epsilon_s & \text{se } 0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{yd} \end{cases} \quad (2)$$

Salienta-se que o comportamento do aço em tração é o mesmo com relação à compressão.

4.1.6 Seções transversais em Flexão Composta Oblíqua

De acordo com Santos (2001), em Flexão Composta Oblíqua, tem-se uma superfície de interação (em 3D) para N_d , M_{dx} e M_{dy} , Figura 6.

Figura 6- Superfície de interação N_d , M_{dx} , M_{dy}



Fonte: SANTOS, 2001.

Nota-se que, no plano ZX, tem-se o ábaco de interação em FCR para M_{dx} , enquanto, no plano ZY, o correspondente ao M_{dy} , para uma determinada seção transversal com armadura definida.

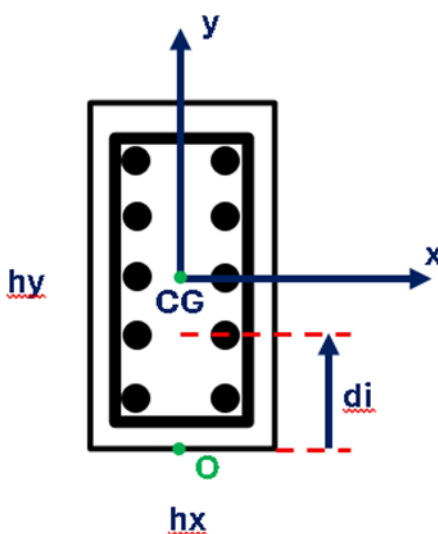
A verificação da seção transversal em Flexão Composta Oblíqua terá como referência a elipse resistente gerada, tendo seus limites o momento fletor MR_{dx} (máximo momento no ábaco de FCR correspondente ao N_d fornecido) e o momento fletor MR_{dy} (máximo momento no ábaco de FCR correspondente ao N_d fornecido). O par de momentos fletores ($M_{dx}; M_{dy}$) da solicitação deve estar contido no interior ou até no limite da elipse (notar que a Figura 6 apresenta apenas um quarto da superfície, por conseguinte, a elipse resistente apenas no quadrante positivo).

4.2 Métodos

4.2.1 Seção retangular com distribuição prévia de armadura longitudinal

Seja uma seção retangular de dimensões h_x e h_y , com determinada distribuição de armação longitudinal. Considerando que o detalhamento atende ao cobrimento mínimo, que o diâmetro do estribo é suficiente para o contraventamento das barras longitudinais, que os espaçamentos mínimos e máximos estão adequados, bem como a quantidade de armadura mínima e máxima estão verificadas, portanto, representada na Figura 7:

Figura 7 – Seção transversal retangular genérica



Fonte: AUTORES

4.2.2 Determinação do par N_d x M_d na Flexão Composta Reta

Qualquer que seja o eixo pertencente ao momento fletor, tanto para Momento Fletor Resistente em torno de x (M_{Rdx}) quanto para Momento Fletor Resistente em torno de y (M_{Rdy}), o valor do par (N_d , M_d) é obtido levando-se as resultantes das armaduras em cada camada para o Centro de Gravidade da seção transversal, bem como a resultante do concreto, caso haja região de concreto comprimida. Consequentemente, aparecerá no Centro de Gravidade o Momento Fletor Resistente.

Os momentos resistentes têm que respeitar a condição de ruptura, portanto, qualquer deformada da seção transversal pertencente a um domínio de deformação atende a essa premissa.

Considerando que cada camada de barras têm uma quantidade de área de aço, se encontrarmos a deformação normal de uma determinada camada de armadura e, em função da relação tensão x deformação, encontrarmos a tensão que solicita a camada de armadura e a multiplicação dessa área de aço pela respectiva tensão resultará na força resultante em cada camada. Há a necessidade de se determinar cada resultante para levá-las para o Centro de Gravidade.

Para o concreto, identificando a região comprimida (se houver), encontra-se o valor da resultante e a sua posição, de modo a levar, também, essa resultante para o Centro de Gravidade da seção transversal.

Ao final do processo, para cada deformada pertencente a qualquer domínio de deformação, tem-se o par (N_d , M_d), em torno do eixo escolhido, resistente para a seção com armadura longitudinal definida.

Portanto, estudar a função (polinômio de primeiro grau, uma reta; a seção plana permanece plana após a deformação: hipóteses básicas simplificadoras, que desconsideram o empenamento da seção transversal, válida neste caso) que rege a deformada pertencente em cada Domínio de Deformação dará condições para se avaliar o somatório das forças resultantes nas diversas camadas de aço e a resultante na região comprimida de concreto (se houver).

Nos itens seguintes, apresentam-se os padrões das deformadas pertencentes a cada domínio de deformação e a expressão para a deformada em uma camada genérica de barras longitudinais.

4.2.3 Determinação do par N_d x M_d na Reta “a” (início do Domínio 1)

Na reta “a” (início do Domínio 1), a seção transversal está submetida à tração uniforme. O concreto se apresenta totalmente fissurado, sendo que apenas as barras longitudinais são responsáveis pela resistência. Atendendo aos padrões de ruptura de projeto, a seção está com deformação de tração constante com o valor de

10%.,consequentemente, todas as barras estão com tensão de tração f_{yd} . A seção deformada não gira, portanto, para uma distribuição simétrica de armadura, a resultante de tração estará posicionada no centro de gravidade da seção transversal, cujo valor é apresentado na Equação 4.

$$Nd = A_s \cdot f_{yd} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{S_i} = \varepsilon_{c_SUP} + \left(\frac{\frac{10}{1000} - \varepsilon_{c_SUP}}{h - d_1} \right) \cdot (h - d_i) \quad (5)$$

No Domínio 1 (flexo-tração) não há região comprimida, portanto não há Resultante no concreto (Rcd).

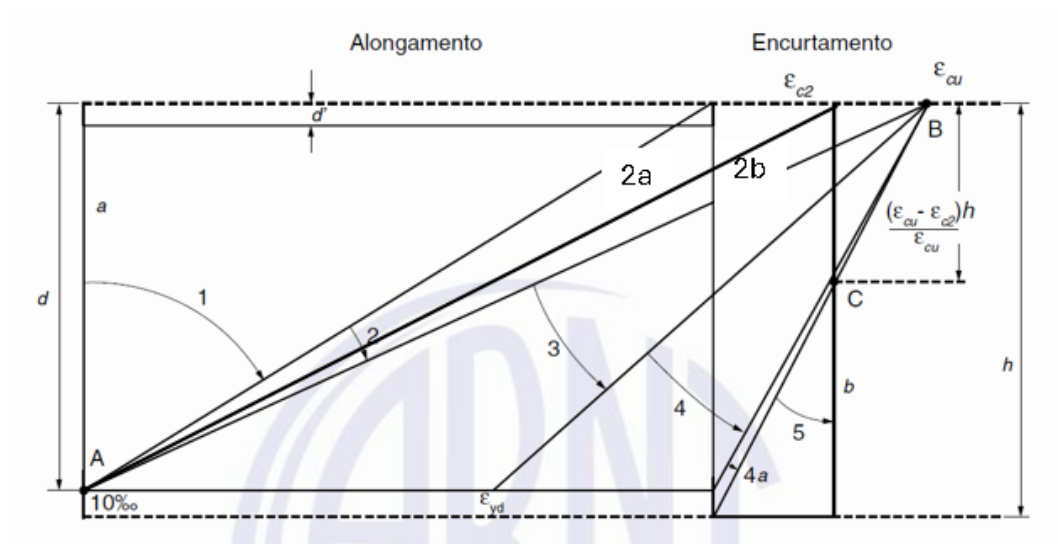
A posição da linha neutra no Domínio 1 é negativa e seu valor é determinado por Equação 6:

$$x = - \left[\frac{\varepsilon_c \cdot (h - d_1)}{\varepsilon_{S1} - \varepsilon_c} \right] \quad (6)$$

4.2.5 Deformada qualquer pertencente aos Domínio 2, 3 e 4

Seja uma deformada genérica pertencente aos Domínios 2, 3 ou 4, Figuras 9 e 10.

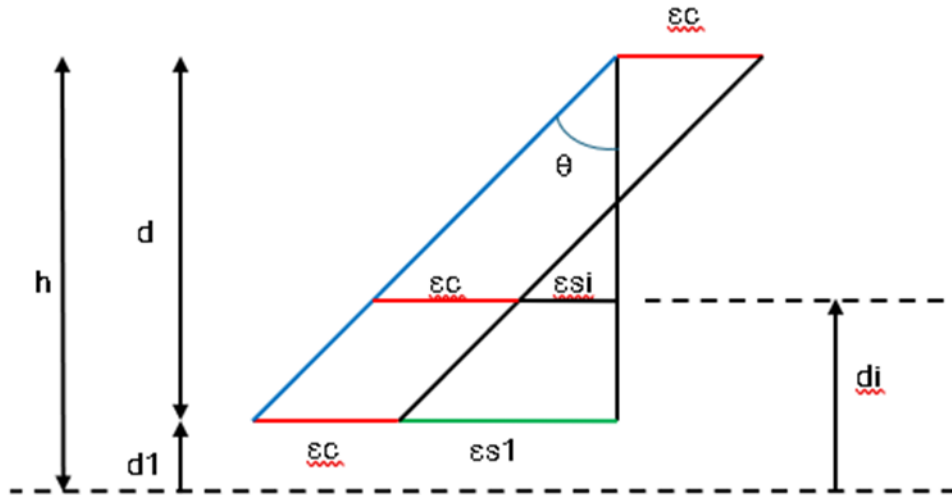
Figura 9 – Deformada pertencente aos Domínios 2 (2a, 2b), 3 e 4



Fonte: AUTORES

Qualquer que seja o domínio em que a deformada esteja contida, para os domínios 2 (subdomínio 2a, subdomínio 2b), 3 e 4, genericamente, temos o seguinte padrão para a posição final da seção transversal, após a deformação da seção transversal:

Figura 10 – Deformada genérica pertencente aos Domínios 2 (2a, 2b), 3 e 4



Fonte: AUTORES

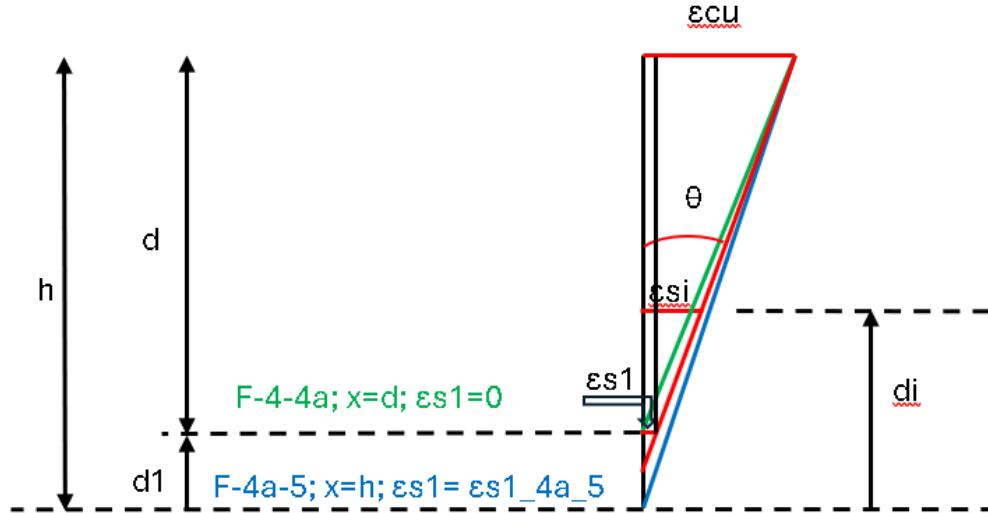
A expressão que rege o valor da deformação normal ε_{si} em uma camada genérica de barras de aço, distantes d_i da extremidade mais tracionada da seção transversal é, segundo a Equação 7:

$$\varepsilon_{s_i} = \left(\frac{\varepsilon_{s_1} + \varepsilon_c}{h - d_1} \right) \cdot (h - d_i) - \varepsilon_c \quad (7)$$

Nos Domínios 2 (2a, 2b), 3 e 4 há região comprimida, portanto, com a determinação da posição da linha neutra ($x = kx \cdot d$), descobre-se o valor e o ponto de aplicação da resultante comprimida no concreto, que será acrescida ao somatório das resultantes nas diversas camadas de armadura longitudinal.

No domínio 4a, genericamente, temos o seguinte padrão para a posição final da seção transversal, após as deformações:

Figura 12 – Deformada genérica pertencente ao Domínios 4a



Fonte: AUTORES

A expressão que rege o valor da deformação normal ε_{si} em uma camada genérica de barras de aço, distantes d_i da extremidade tracionada ou menos comprimida da seção transversal é, segundo Equação 10:

$$\varepsilon_{s_i} = - \left(\left(\frac{d_i - d_1}{h - d_1} \right) \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s_1}) + \varepsilon_{s_1} \right) \quad (10)$$

Sendo que, ε_{s1} varia, em módulo, segundo Equação 11:

$$\left(0 \leq \varepsilon_{s_1} \right) \leq \left(\varepsilon_{s_1_4a_5} = \left(\frac{d_1}{h} \cdot \varepsilon_{cu} \right) \right) \quad (11)$$

A expressão que rege o valor da deformação normal ε_{si} em uma camada genérica de barras de aço, distantes d_i da extremidade tracionada ou menos comprimida da seção transversal é, segundo Equação 14

$$\varepsilon_{s_i} = - \left(\left(\frac{d_i - d_1}{h - d_1} \right) \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s_1}) + \varepsilon_{s_1} \right) \quad (14)$$

No Domínio 5, há região comprimida de concreto e a expressão da linha neutra (x) é apresentada na Equação 15.

$$x = \frac{\varepsilon_c \cdot h_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}} \quad (15)$$

em que h_c é expresso por meio da Equação 16:

$$h_c = \left(\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) \cdot h \quad (16)$$

4.2.8 Determinação do par $N_d \times M_d$ na Reta “b” (final do Domínio 5)

Na reta “b” (final do Domínio 5), a seção transversal está submetida à compressão uniforme. O concreto se apresenta totalmente comprimido, sendo que as barras longitudinais, por aderência, acompanham a mesma deformada. Atendendo aos padrões de ruptura de projeto, a seção transversal está com deformação de compressão constante com o valor de ε_{c2} ,consequentemente, todas as barras de aço estarão submetidas a uma tensão de compressão f_{scd} correspondente ao encurtamento de ε_{c2} . A seção deformada não gira, portanto, para uma distribuição

simétrica de armadura, a resultante de compressão estará posicionada no centro de gravidade da seção transversal, cujo valor é apresentado na Equação 17.

$$Nd = A_s \cdot f_{scd} + A_c \cdot \sigma_{cd_máx} \quad (17)$$

4.2.9 Profundidade efetivamente comprimida para deformada qualquer pertencente aos Domínio 2, 3, 4, 4a e 5

Qualquer que seja a deformada nesse caso, a norma ABNT NBR6118(2003) recomenda que se tome um valor da profundidade efetiva da região comprimida de um valo $y = \lambda \cdot x$. Especificamente no Domínio 5, deve-se verificar que o valor de y não supera o valor da altura da seção transversal (h_x ou h_y), dependendo da situação de Flexão Composta Reta que está sendo analisada. A expressão de λ está representada no Quadro 4.

Quadro 4 – Parâmetro λ

Classe de Concreto GRUPO I (C20 – C50)	Classe de Concreto GRUPO II (C55 – C90)
$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,8 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{400} \right)$

Fonte: ALMEIDA, 2024

4.2.10 Sequência para determinação do par (Nd;Md) do ábaco de interação em Flexão Composta Reta para qualquer deformada pertencente aos Domínios de Deformação

- I. Para cada linha da planilha implementada, tem-se a deformação da fibra superior (ϵ_c) da seção transversal e a deformação na camada mais tracionada (ou menos comprimida) de armadura (ϵ_{s1});
- II. Nos Domínios 1 e 5, há uma expressão específica para a linha neutra(x); para os demais, a posição da linha neutra é obtida pela multiplicação de $kx \cdot d$, em que $d=h-d1$;

- III. Com o valor de **x**, tem-se a posição efetivamente comprimida (com exceção do Domínio 1) **y=λ.x**;
- IV. Em seguida a área efetivamente comprimida é definida: **Ac_EF = b.y**, em que **b** é a largura da seção transversal, dimensão paralela ao eixo em que o Momento Fletor está girando;
- V. A tensão de compressão no concreto σ_{cd} é definida pela multiplicação de **$\sigma_{cd_m\acute{a}x$** pelo fator **k2**, que será calculado se a seção estiver solicitada no **subdomínio 2a**, cujo valor será menor ou igual a 1. Para os demais Domínios, **k2 =1**;
- VI. A resultante de compressão do concreto (**Rcd**, se houver) será determinada pela multiplicação da tensão **σ_{cd}** pela área efetivamente comprimida **Ac_EF**;
- VII. Na sequência calcula-se o momento fletor (**M0_Rcd**) que a resultante do concreto gera no ponto **0 (fibra inferior da seção transversal)**; o braço de alavanca (**dc**) para este cálculo vale **h – y/2**;
- VIII. Para cada camada de armadura, determina-se a deformação correspondente e, conseqüentemente, a tensão; se a deformada for positiva, a resultante na camada de aço é de tração; do contrário, compressão;
- IX. Cada camada de aço apresenta uma resultante (**Rsd_i**), cujo somatório será **Rsd**;
- X. A partir daí, calcula-se o somatório de momento fletor (**M0_Rsd**) que é gerado no ponto **0** para cada resultante **Rsd_i** das camadas de armadura; o braço de alavanca para cada resultante será a distância **d_i**, do ponto **0** até o centro de gravidade de cada camada;
- XI. A resultante do Esforço Normal será **Nd = Rcd + Rsd**; isso vale para qualquer ponto em que for levada essa resultante.
- XII. O momento fletor acumulado no ponto **0 (M0_tot)** será a soma dos momentos gerados pela resultante do concreto (**M0_Rcd**) e pelo somatório das resultantes nas camadas de aço (**M0_Rsd**);
- XIII. Para representar o par de esforços no centro de gravidade da seção transversal, Esforço Normal (**Nd_CG**) e Momento Fletor (**Md_CG**), basta levar a resultante **Nd = N0_d = Rcd + Rsd** do ponto **0** ao **CG** da

seção; **Nd_{CG}** é igual ao **N0_d**; o braço de alavanca, nessa operação, vale **h/2** para o caso de seção retangular; **h** é a medida da seção perpendicular ao eixo em que gira o momento fletor analisado;

- XIV. O Momento Fletor no CG da seção será **M_{CG} = M0_{tot} + N0_d.(h/2)**, em que **N0_d = Nd**.

4.2.11 Sequência para geração da elipse resistente (FCO)

Santos (2001) apresenta uma proposta de traçado da elipse resistente em Flexão Composta Oblíqua para a seção transversal com determinada distribuição de armadura longitudinal, também recomendada pela ABNT NBR6118 (2023), Equação 18

$$\left[\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^\alpha + \left[\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^\alpha = 1 \quad (18)$$

MRd,x e MRd,y são os pares de momento fletor sobre a curva que define o traçado da elipse resistente.

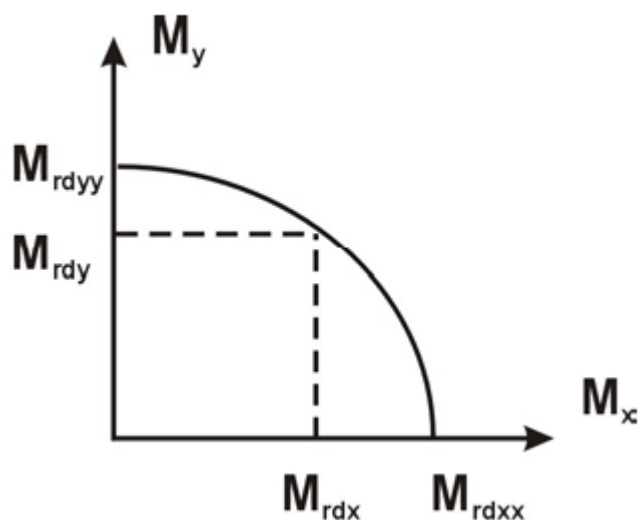
MRd,xx e MRd,yy são os momentos máximos resistentes de cálculo segundo cada um dos eixos em Flexão Composta Reta, obtidos separadamente a partir da solicitação do esforço normal (Nd), a partir dos referidos ábacos de interação para determinado arranjo de armadura.

A partir da Equação 17, tem-se a seguinte expressão, Equação 19.

$$M_{Rd,y} = \sqrt[\alpha]{1 - \left[\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^\alpha} \cdot M_{Rd,yy} \quad (19)$$

Em que o parâmetro α vale 1,2 para seções retangulares. Arbitrando-se valores de MRd,x (variando de 0 a MRd,xx), obtém-se o seguinte gráfico, representado no quadrante positivo, Figura 14.

Figura 14 – Envoltória resistente (FCO)



Fonte: SANTOS, 2001

4.2.12 Sequência para geração da elipse de Momento Mínimo

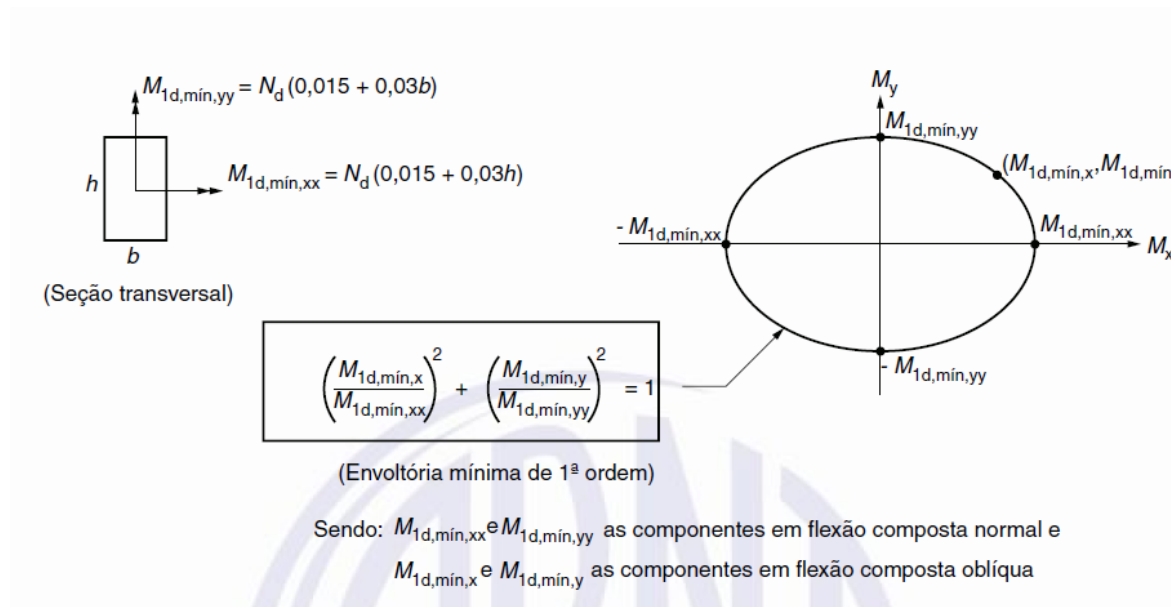
A ABNT NBR6118(2023) sugere para estruturas reticuladas que as imperfeições geométricas podem ser substituídas pela consideração de um momento mínimo de primeira ordem, Equação 20.

$$Md_{\min} = (0,015 + 0,03 \cdot h) \quad (20)$$

em que h é a altura da seção (perpendicular ao eixo em que o momento gira), expresso em metros(m):

Para seções retangulares, recomenda-se a seguinte elipse de momento mínimo, Figura 15.

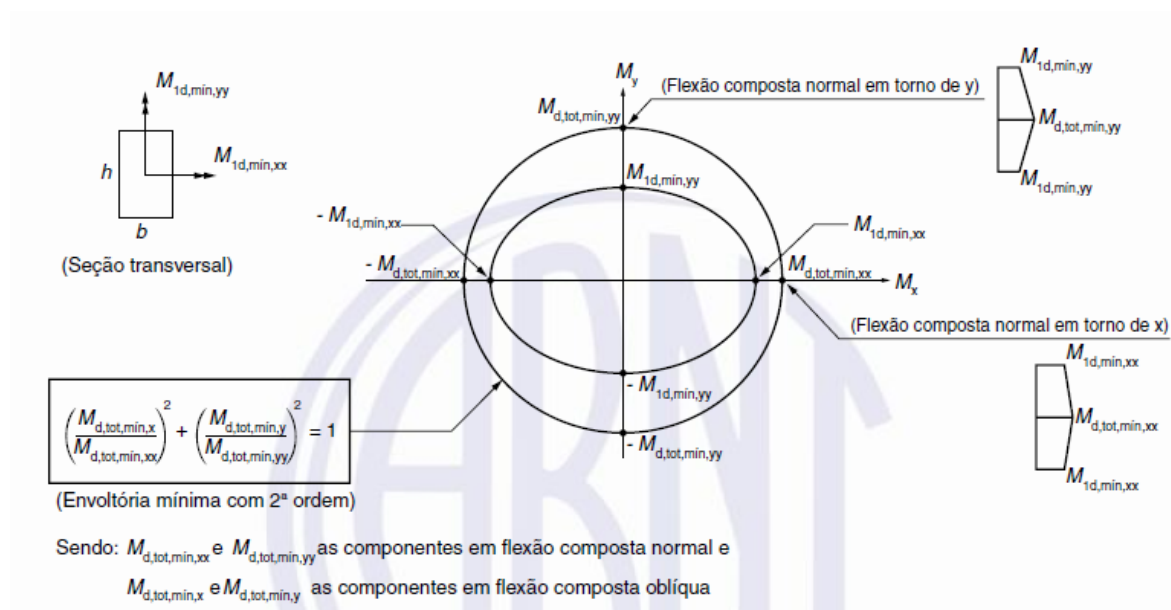
Figura 15 – Envoltória mínima de 1ª ordem



Fonte: ABNT NBR:6118, 2023

Quando houver necessidade de se calcular os efeitos locais de segunda ordem, deve-se considerar tais efeitos ampliadores a partir dos valores dos momentos mínimos de primeira ordem em cada direção, Figura 16.

Figura 16 – Envoltória mínima com 2ª ordem



Fonte: ABNT NBR:6118, 2023

5 RESULTADOS OBTIDOS

Como resultado obtido, o produto desse trabalho é planilha desenvolvida. A aplicação é para seções retangulares com o limite de dez (10) camadas de armadura por lateral. Para a primeira e a última camada, há a possibilidade de distribuir duas ou mais barras longitudinais (limitadas em dez). Nas camadas internas, apenas duas(2) barras longitudinais. Todas as classes de concreto estão contempladas, bem como as categorias dos aços, sendo que, para a seção em Flexo-Compressão há de se partir de um diâmetro de 10mm, necessariamente nas categorias CA-50 e CA-25.

A planilha foi desenvolvida para dez deformadas pertencentes a cada Domínio de Deformação, entre as fronteiras (Reta “a”, Fronteira 1-2, Fronteira 2a-2b, Fronteira 3-4, Fronteira 4-4a, Fronteira 4a-5 e Reta “b”). Dessa forma, os ábacos de FCR são gerados para setenta (70) pares ordenados ($N_d; M_d$) segundo orientação de cada eixo (x e y).

Para cada solicitação em FCO ($N_d; M_{dx}; M_{dy}$), é gerada a elipse resistente.

A elipse de momento mínimo é plotada juntamente com a elipse resistente e o par de solicitação ($M_{dx}; M_{dy}$).

Visualmente, verifica-se se a seção transversal sugerida com determinada distribuição de armadura longitudinal simétrica está atendendo ou não à solicitação, com relação à capacidade portante (ELU).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que o produto deste trabalho – revisão bibliográfica e planilha de cálculo – promovam mais facilidade para o aprendizado do assunto. O produto foi desenvolvido com o objetivo de ser uma ferramenta didática e eficaz para a compreensão dos conceitos de verificação de seções transversais retangulares de concreto armado submetidas à Flexão Composta Oblíqua, para facilitar o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula.

7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

De forma complementar aos resultados obtidos neste trabalho, sugerem-se para trabalhos futuros:

- Melhoria da apresentação da planilha, com a inserção de um tutorial;
- Inclusão do cálculo do momento fletor de segunda ordem, a partir da situação do pilar ao longo do trecho (apoiado ou engastado em livre);
- Aprimoramento da interação usuário-planilha.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro - RJ. 2023.

ALMEIDA, D. R. L., CHAER, A. V. **VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR SUBMETIDAS À FLEXÃO PURA ELU e ELS - PLANILHAS PARA O AUTOAPRENDIZADO**. Trabalho de Conclusão de Curso. Engenharia Civil. PUC Goiás. Goiânia-GO, 2024.

SANTOS, L. M. *et alli*. **Exemplo de um Projeto Completo de um Edifício de Concreto Armado (apostila, e-book)**. São Paulo - SP. 2001.

RESOLUÇÃO nº 038/2020 – CEPE

ANEXO I

APÊNDICE ao TCC

Termo de autorização de publicação de produção acadêmica

O estudante **RAFAEL CARNEIRO NAVES** do Curso de **ENGENHARIA CIVIL**, matrícula **2015.2.0025.0437-3**, telefone: **(62) 9-8148-5760**, e-mail **rafaelcarneironaves10@gmail.com**, na qualidade de titular dos direitos autorais, em consonância com a Lei nº 9.610/98 (Lei dos Direitos do Autor), autoriza a Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) a disponibilizar o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **VERIFICAÇÃO DE PILARES NO ELU SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**, gratuitamente, sem ressarcimento dos direitos autorais, por 5 (cinco) anos, conforme permissões do documento, em meio eletrônico, na rede mundial de computadores, no formato especificado (Texto(PDF); Imagem (GIF ou JPEG); Som (WAVE, MPEG, AIFF, SND); Vídeo (MPEG, MWV, AVI, QT); outros, específicos da área; para fins de leitura e/ou impressão pela internet, a título de divulgação da produção científica gerada nos cursos de graduação da PUC Goiás.

Goiânia, 30 de setembro de 2025

Assinatura do autor:  Documento assinado digitalmente
RAFAEL CARNEIRO NAVES
Data: 30/09/2025 20:15:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Nome completo do autor: **RAFAEL CARNEIRO NAVES**

Assinatura do professor-orientador:  Documento assinado digitalmente
ALBERTO VILELA CHAER
Data: 30/09/2025 20:06:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Nome completo do professor-orientador: **ALBERTO VILELA CHAER**